Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03

НЕРАЗРЕШИМЫЕ ФРАГМЕНТЫ ПОЗИТИВНЫХ ТЕОРИЙ СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУПП

А. И. Зеткина, В. Г. Дурнев

Аннотация. Доказана алгоритмическая неразрешимость нескольких простых фрагментов позитивных теорий свободных нециклических полугрупп, состоящих из позитивных формул с простыми кванторными приставками и с малым числом констант в их бескванторной части.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.507

Ключевые слова: свободная полугруппа, позитивная формула.

1. Введение

Содержащиеся в работе результаты были частично анонсированы без доказательств в тезисах [1]. В статье излагаются подробные доказательства как анонсированных в тезисах результатов, так и новых.

В 60-е гг. прошлого века С. И. Адян сформулировал достаточно общую программу «Уточнение границы между алгоритмически разрешимыми и алгоритмически неразрешимыми проблемами в математике и ее приложениях».

Исследования в этом направлении достаточно активно ведутся уже более полувека как у нас в стране, так и за рубежом, прежде всего в области алгоритмических проблем алгебры, математической логики, теории чисел и теории алгоритмов. Условно можно выделить два дополняющих друг друга направления исследований.

1. Построение «все более сложных» алгоритмически разрешимых проблем.

2. Построение «все более простых» алгоритмически неразрешимых проблем.

Однако, на наш взгляд, пока еще нельзя говорить об успешном завершении программы С. И. Адяна.

А. И. Мальцев в докладе на Международном математическом конгрессе, состоявшемся в 1966 г. в Москве, сформулировал «Программу исследования алгоритмической природы различных ограниченных элементарных теорий, определяемых прежде всего типом кванторных приставок рассматриваемых формул, а также проблему исследования возможности различения алгебраических систем формулами с простыми кванторными приставками».

Содержащиеся в статье результаты, на наш взгляд, вписываются в общий процесс реализации программы С. И. Адяна и программы А. И. Мальцева.

Через S_m будем обозначать свободную полугруппу ранга m со свободными образующими $a_1, \dots, a_m$ с пустым словом в качестве нейтрального элемента, а через S_m^+ — свободную полугруппу без пустого слова ранга m с теми же самыми свободными образующими $a_1, \dots, a_m$. В некоторых работах свободная полугруппа S_m называется свободным моноидом и обозначается через M_m.

Как обычно, при $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно, а при $m = 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 соответственно a, b и c. Заметим, что S_1 — циклическая полугруппа.

В дальнейшем речь будет идти только о нециклических (некоммутативных) полугруппах S_m, т. е. будем считать, что $m \geq 2$. Особый интерес по ряду причин представляет «пограничный» случай — свободная полугруппа $S_2 = \langle a, b\rangle$ с двумя свободными образующими a и b. Именно для нее в статье формулируются и доказываются основные результаты. Однако нетрудно понять, как часть из них переносится на произвольную полугруппу S_m при $m \geq 2$.

Мы рассматриваем формулы в предваренной нормальной форме в сигнатурах $\langle\,\cdot, a_1, \dots , a_m\,\rangle$, $\langle\,\cdot, a, b\,\rangle$, $\langle\,\cdot, a\,\rangle$ и $\langle\,\cdot\,\rangle$.

Уточним определения некоторых используемых ниже понятий.

Элементарная теория с константами $a_1, \dots , a_l$ $(1 \leq l \leq m)$ (в сигнатуре $\langle\,\cdot, a_1, \dots , a_l\,\rangle$) свободной полугруппы S_m (S_m^+) — это множество всех *замкнутых* (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\dots(Q_n\, x_n)\Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}\Big(\Big(\bigwedge_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it}\Big)\Big),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} \text{ — слова в алфавите } \{x_1, \dots , x_n, a_1, \dots , a_l\},$$

$$A_i \text{ и } B_i \text{ — конечные (возможно пустые) множества натуральных чисел,}$$

$$\text{а } Q_1, \dots , Q_n \text{ — кванторы } \forall \text{ или } \exists,$$

истинных на свободной полугруппе S_m (S_m^+).

При этом $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы Φ, $Q_1Q_2\dots Q_n$ — *типом кванторной приставки*, а Ψ — *бескванторной частью* формулы Φ.

Формула Φ называется *позитивной*, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т. е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k}\Big(\bigwedge_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}\Big).$$

Позитивной теорией с константами a_1, …, a_l $(1 \leq l \leq m)$ (в сигнатуре $\langle\cdot, a_1, \dots , a_l\rangle$) свободной полугруппы S_m (S_m^+) называется множество всех замкнутых позитивных формул Φ в сигнатуре $\langle\cdot, a_1, \dots , a_l\rangle$, истинных на свободной полугруппе S_m (S_m^+).

Изучение элементарных теорий свободных нециклических полугрупп началось с работы Куайна [2] 1946 г., в которой он доказал алгоритмическую неразрешимость элементарной теории любой нециклической свободной полугруппы.

Так как для любых двух элементов U и V полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)\left(\bigvee_{i=1}^{m}(U = Va_ix \vee V = Ua_ix) \vee \left(\bigvee_{i,j=1, i\neq j}^{m}(U = xa_iy \wedge V = xa_jz)\right)\right), \qquad (\neg)$$

то из результата Куайна сразу следует алгоритмическая неразрешимость позитивной теории любой свободной нециклической полугруппы S_m (этот факт в работе Куайна не отмечается).

Аналогичным образом определяются *элементарная* и *позитивная теории* с константами $a_1, \dots, a_l$ свободной группы F_m со свободными образующими $a_1, \dots, a_m$.

Тарский в монографии [3] сформулировал две проблемы, которые долгие годы не поддавались решению.

1. Верно ли, что при $m \leq n$ *элементарные теории* с константами $a_1, \dots, a_m$ свободных групп F_m и F_n совпадают?

2. Является ли алгоритмически разрешимой *элементарная теория* с константами $a_1, \dots, a_m$ свободной группы F_m?

Первые результаты в направлении решения проблем Тарского были получены Ю. И. Мерзляковым и Г. С. Маканиным. В работе [4] Ю. И. Мерзляков доказал, что при $m \leq n$ позитивные теории с константами $a_1, \dots, a_m$ свободных групп F_m и F_n совпадают, а Г. С. Маканин в [5] доказал алгоритмическую разрешимость универсальной и позитивной теорий с константами $a_1, \dots, a_m$ свободной группы F_m. Полное положительное решение проблем Тарского было получено в совместной работе О. Г. Харлампович и А. Г. Мясникова [6].

В работах [7, 8] был существенно усилен результат Куайна — доказано, что можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\left(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(x,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b,c) = u_i(x,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b,c)\right),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_3 позитивная формула

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\left(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(A,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b,c) = u_i(A,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b,c)\right).$$

Естественно встал вопрос о возможности упрощения бескванторной части.

Знак конъюнкции можно удалить из формул, используя эквивалентность из работы Ю. И. Хмелевского [9]: при $m \geq 2$ система уравнений $\bigwedge_{i=1}^{k} w_i = u_i$ равносильна одному уравнению

$$w_1a_1w_2a_1\dots a_1w_kw_1a_2w_2a_2\dots a_2w_k = u_1a_1u_2a_1\dots a_1u_ku_1a_2u_2a_2\dots a_2u_k.$$

Вопрос об удалении из формул, относящихся к свободным полугруппам, знака дизъюнкции впервые исследовал Н. К. Косовский в работе [10], в которой была построена формула $DK(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)w(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) = u(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m ($m \geq 2$) справедлива эквивалентность

$$
\begin{aligned}
&(A = B \vee C = D) \\
&\qquad \Longleftrightarrow S_m \models (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4) w(A, B, C, D, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \\
&\qquad\qquad = u(A, B, C, D, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b).
\end{aligned}
$$

Однако такое удаление из формул знака дизъюнкции приводит к существенному усложнению кванторной приставки.

В работе [11] был несколько усилен результат Н. К. Косовского — построена аналогичная формула $DD(x, y, z, v)$, но содержащая лишь два квантора существования, т. е. имеющая вид

$$
(\exists x_1)(\exists x_2) w(x, y, z, v, x_1, x_2, a, b) = u(x, y, z, v, x_1, x_2, a, b)
$$

и такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m ($m \geq 2$) справедлива эквивалентность

$$
\begin{aligned}
&(A = B \vee C = D) \\
&\qquad \Longleftrightarrow S_m \models (\exists x_1)(\exists x_2) w(A, B, C, D, x_1, x_2, a, b) = u(A, B, C, D, x_1, x_2, a, b).
\end{aligned}
$$

В работе [12] построена формула $DKMP_n(x, y, z, v)$

$$
(\exists x_1)(\exists x_2) w(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n, x_1, x_2, a, b) = u(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n, x_1, x_2, a, b)
$$

такая, что для произвольных элементов A_1, B_1, …, A_n и B_n свободной полугруппы S_m ($m \geq 2$) справедлива эквивалентность

$$
\begin{aligned}
&(A_1 = B_1 \vee A_2 = B_2 \vee \ldots \vee A_n = B_n) \\
&\qquad \Longleftrightarrow S_m \models (\exists x_1)(\exists x_2) w(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, x_1, x_2, a, b) \\
&\qquad\qquad = u(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, x_1, x_2, a, b).
\end{aligned}
$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул за счет незначительного усложнения кванторной приставки. В качестве следствия получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром* x

$$
\begin{aligned}
&(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(x, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b, c) \\
&\qquad = u(x, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b, c),
\end{aligned}
$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, *элементу свободной полугруппы* S_2, *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_3 *позитивная формула*

$$
\begin{aligned}
&(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(A, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b) \\
&\qquad = u(A, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b).
\end{aligned}
$$

В работе [13] С. С. Марченков построил такое однопараметрическое семейство формул вида

$$
\begin{aligned}
&(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\Bigg(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \\
&\qquad = u_i(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b)\Bigg),
\end{aligned}
$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(a^k, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \right.$$
$$\left. = u_i(a^k, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b)\right).$$

В работе [11] получено дальнейшее усиление результатов работ [7, 8] и [13] — построено такое однопараметрическое семейство формул вида

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, y, x_1, x_2, x_3, a, b) = u_i(x, y, x_1, x_2, x_3, a, b)\right),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(a^k, y, x_1, x_2, x_3, a, b) = u_i(a^k, y, x_1, x_2, x_3, a, b)\right).$$

Используя для удаления дизъюнкции из бескванторной части указанную выше формулу из работы [12], получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул с параметром x*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b)$$
$$= u(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 позитивная формула

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5) w(a^k, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b)$$
$$= u(a^k, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b).$$

В 1976 г. Г. С. Маканин [14] получил фундаментальный результат в теории уравнений в свободных полугруппах (уравнений в словах) — он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений

$$\bigwedge_{i=1}^{k} w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$$

определить, имеет ли она решение в свободной полугруппе S_m.

Из этого фундаментального результата Г. С. Маканина сразу следует существование алгоритма, позволяющего по произвольной замкнутой формуле Φ с кванторной приставкой типа $\exists\exists\dots\exists$ или типа $\forall\forall\dots\forall$, т. е. с кванторами одного вида в кванторной приставке, определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_m ($m \geq 2$), так как формулу вида

$$(\exists x_1)\dots(\exists x_n)\left(\bigwedge_{i=1}^{k} w_i = u_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{p} z_j \neq v_j\right) \qquad (*)$$

можно заменить равносильной ей позитивной $\exists$-формулой, используя, например, указанную выше эквивалентность $(\neg)$. Более того, из полученной формулы можно удалить логические связки и получить позитивную формулу вида (уравнение)

$$(\exists z_1)\dots(\exists z_p)W(z_1,\dots,z_p,a_1,\dots,a_m) = U(z_1,\dots,z_p,a_1,\dots,a_m) \qquad (**)$$

такую, что формула $(*)$ истинна на свободной полугруппе S_m тогда и только тогда, когда на ней истинна формула $(**)$.

Аналогичное рассуждение справедливо и для свободной полугруппы без пустого слова S_m^+.

В работе [15] показано, что по произвольной замкнутой позитивной формуле Φ с кванторной приставкой типа $Q_1Q_2\dots Q_n\forall$ можно построить замкнутую позитивную формулу Φ^* с кванторной приставкой типа $Q_1Q_2\dots Q_n$ такую, что формула Φ истинна на свободной полугруппе S_m $(m \geq 2)$ тогда и только тогда, когда на этой полугруппе истинна формула Φ^*.

Поэтому вопрос об истинности на свободной полугруппе S_m позитивных формул с кванторными приставками вида

$$(\exists x_1)\dots(\exists x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_k)$$

алгоритмически разрешим.

Таким образом, алгоритмически неразрешима проблема определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3),$$

но алгоритмически разрешима проблема определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\forall y).$$

С. И. Адяна интересовал вопрос об алгоритмической разрешимости для двух «промежуточных» классов формул, т. е. вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида

$$(\exists x_1)(\forall y)(\exists x_2)(\exists x_3) \quad \text{и} \quad (\exists x_1)(\exists x_2)(\forall y)(\exists x_3).$$

Напомним, что выше речь шла о позитивных формулах с произвольной бескванторной частью.

В связи с теоремой 2 представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с простейшей бескванторной частью вида $w = u$, имеющих кванторные приставки вида

$$(\exists x_1)(\forall y)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5), \quad (\exists x_1)(\exists x_2)(\forall y)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5),$$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\forall y)(\exists x_4)(\exists x_5), \quad (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\forall y)(\exists x_5).$$

Естественно возникает вопрос: можно ли построить формулу $D(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)w(x,y,z,v,x_1,a,b) = u(x,y,z,v,x_1,a,b)$$

такую, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \Longleftrightarrow S_2 \models (\exists x_1)w(A,B,C,D,x_1,a,b) = u(A,B,C,D,x_1,a,b).$$

Отметим, что еще в работе [15] показана невозможность построения такой формулы $D(x, y, z, v)$ вида

$$w(x, y, z, v, a, b) = u(x, y, z, v, a, b),$$

что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_2 справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \Longleftrightarrow S_2 \models w(A, B, C, D, a, b) = u(A, B, C, D, a, b).$$

Интересно заметить, что в случае свободной группы F_2 знак конъюнкции из формул можно удалять с помощью уравнения А. И. Мальцева [5]

$$[x_1, a] = \big([x_1, b]x_2^2\big)^2,$$

где $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ — коммутатор элементов g и h, имеющего в свободной группе F_2 лишь тривиальное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, а знак дизъюнкции — с помощью эквивалентности Г. А. Гуревича [5]

$$F_2 \models \big((x_1 = 1 \vee x_2 = 1) \\ \Longleftrightarrow \bigwedge_{\alpha,\beta=\pm1} \big(x_1 a_1^{\alpha} x_1 a_1^{-\alpha}\big) \cdot \big(x_2 a_2^{\beta} x_2 a_2^{-\beta}\big) = \big(x_2 a_2^{\beta} x_2 a_2^{-\beta}\big) \cdot \big(x_1 a_1^{\alpha} x_1 a_1^{-\alpha}\big)\big)$$

без использования кванторов существования.

2. Неразрешимые фрагменты позитивных теорий с малым числом констант свободных полугрупп

В работах [7, 8, 11, 13] рассматривались позитивные формулы в предваренной форме, содержащие в бескванторной части в виде констант образующие элементы свободных полугрупп (формулы с константами), а основное внимание уделялось возможности упрощения кванторной приставки и бескванторной части путем удаления пропозициональных связок с сохранением алгоритмической неразрешимости.

Впервые вопрос о возможности удаления констант из бескванторной части формул исследовал Н. А. Перязев в работе [16]. В ней он доказал, в частности, что при $2 \le n < m$ позитивные теории свободных моноидов M_n и M_m (свободных полугрупп с единицей S_n и S_m) в сигнатуре $\langle \cdot, a_1, \ldots, a_{n-2} \rangle$ совпадают, при $m \ge 2$ позитивная теория свободного моноида M_m (свободной полугруппы с единицей S_m) в сигнатуре $\langle \cdot, a_1, \ldots, a_{m-2} \rangle$ алгоритмически разрешима, а в сигнатуре $\langle \cdot, a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$ алгоритмически неразрешима.

В частности, это означает, что позитивная формула Φ без констант, т. е. имеющая вид

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \ldots (Q_t x_t) \bigvee_{i=1}^{k} \Big(\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij}(x_1, \ldots, x_t) = u_{ij}(x_1, \ldots, x_t) \Big),$$

истинна на свободном моноиде M_2 (свободной полугруппе с единицей S_2) тогда и только тогда, когда она истинна на любом свободном моноиде M_m ($m \ge 2$), позитивная формула Φ без констант истинна на свободном моноиде M_2 тогда и только тогда, когда она истинна на счетнопорожденном свободном моноиде

M_ω, при любом m позитивная теория без констант свободной полугруппы с единицей S_m (свободного моноида M_m) алгоритмически разрешима.

Однако при удалении из бескванторной части формул констант усложняется кванторная приставка, а при $n = 2$ нельзя удалить конъюнкцию и дизъюнкцию без использования двух констант.

Ниже рассматриваются аналогии и существенные различия между алгоритмической природой фрагментов позитивных теорий свободной полугруппы S_2^+ без пустого слова со свободными образующими a и b и свободной полугруппы S_2 с пустым словом (свободного моноида M_2) с теми же свободными образующими a и b.

Теорема 3. *Позитивная* $\forall\exists^3$*-теория с двумя константами свободной полугруппы без пустого слова* S_2^+ *алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Как отмечалось выше, в работе [11] построена такая формула $\Phi_{S_2}(x)$, имеющая вид

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(zz = z \vee \Psi_{S_2}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)),$$

где

$$\Psi_{S_2}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) \right),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, истинна ли на свободной полугруппе с пустым словом S_2 формула $\Phi_{S_2}(a^n)$.

Нам необходима аналогичная формула $\Phi_{S_2^+}(x)$ для свободной полугруппы S_2^+, в которой нет пустого слова.

Преобразуем формулу $\Phi_{S_2}(x)$ для свободной полугруппы с пустым словом S_2 в формулу $\Phi_{S_2^+}(x)$ для свободной полугруппы S_2^+ с учетом отсутствия в ней пустого слова. Полагаем

$$\Phi_{S_2^+}(x) = (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

где

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \Big(\bigvee_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0,1} \Psi_{S_2}(x, z, (y_1)^{\varepsilon_1}, (y_2)^{\varepsilon_2}, (y_3)^{\varepsilon_3}, a, b) \Big),$$

где $(y_i)^0$ — пустое слово, а $(y_i)^1$ — это просто y_i. Тогда для любого непустого слова w справедлива эквивалентность

$$S_2 \models \Phi_{S_2}(w) \Longleftrightarrow S_2^+ \models \Phi_{S_2^+}(w).$$

Тем самым доказано, что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного непустого слова w определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2^+ формула $\Phi_{S_2^+}(w)$.

Ниже в тексте при ссылках на теорему 3 будем считать, что

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) \right).$$

Теорема 4. *Позитивная $\forall^2\exists^3$-теория с одной константой свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 3 построена такая формула $\Phi_{S_2^+}(x)$, имеющая вид

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

где

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)\right),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного непустого слова $w(a, b)$ определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2^+ формула $\Phi_{S_2^+}(w(a, b))$.

В формулу $\Phi_{S_2^+}(x)$ входят обе константы a и b. По формуле $\Phi_{S_2^+}(x)$ построим формулу с одной константой $\overline{\Phi_{S_2^+}}(x)$. Полагаем

$$\overline{\Phi_{S_2^+}}(x) = (\forall t)(\exists y_1)(\exists y_2)(t = y_1y_2 \vee t = a \\ \vee (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, t)).$$

Нетрудно понять, что для произвольного непустого слова $w(a, b)$ справедлива эквивалентность

$$S_2^+ \models \Phi_{S_2^+}(w(a, b)) \Longleftrightarrow S_2^+ \models \overline{\Phi_{S_2^+}}(w(a, t)).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что формулу $\overline{\Phi_{S_2^+}}(x)$ можно привести к виду

$$(\forall t)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(t = y_1y_2 \vee t = a \vee \Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, t)),$$

где

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, t) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, t) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, t)\right).$$

Теорема 5. *Позитивная $\forall^3\exists^3$-теория без констант свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся формулой $\Phi_{S_2^+}(x)$, построенной при доказательстве теоремы 3, и доказанным для нее утверждением, что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного непустого слова w определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2^+ формула $\Phi^+_{S_2}(w)$.

Как отмечалось выше, в формулу $\Phi_{S_2^+}(x)$ входят обе константы a и b.

По формуле $\Phi_{S_2^+}(x)$ построим формулу *без констант* $\widetilde{\Phi_{S_2^+}}(x)$. Полагаем

$$\widetilde{\Phi_{S_2^+}}(x) = (\forall u)(\forall v)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(u = v \vee uv = y_1y_2y_3 \\ \vee (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v)).$$

Нетрудно понять, что для произвольного непустого слова $w(a, b)$ справедлива эквивалентность

$$S_2^+ \models \Phi_{S_2^+}(w(a, b)) \Longleftrightarrow S_2^+ \models \widetilde{\Phi_{S_2^+}}(w(u, v)).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что формулу $\widetilde{\Phi_{S_2}}(x)$ можно привести к виду

$$(\forall u)(\forall v)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(u = v \vee uv = y_1y_2y_3 \vee \Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v)),$$

где

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v)\right).$$

Следствие. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной позитивной формуле без констант вида*

$$(\forall u)(\forall v)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)(\exists y_5)(u = v \vee uv = y_1y_2y_3$$
$$\vee W(z, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, u, v) = U(z, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, u, v))$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_2^+.

Доказательство. Для доказательства следствия заменим в формуле $\widetilde{\Phi_{S_2^+}}(x)$ подформулу

$$\Psi_{S_2^+}(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v)\right)$$

формулой вида

$$(\exists y_4)(\exists y_5)W(z, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, u, v) = U(z, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, u, v).$$

Для этого несколько модернизируем методы работы [12] с учетом отсутствия в свободной полугруппе S_2^+ пустого слова. Полагаем

$$W(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = w_1(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) \dots w_m(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

$$U_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = w_1(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) \dots w_{i-1}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)$$
$$u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)w_{i+1}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) \dots w_m(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b).$$

Тогда дизъюнкция

$$\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)$$

равносильна дизъюнкции

$$\bigvee_{i=1}^{m} W(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = U_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b).$$

Такой прием впервые был использован Н. К. Косовским в работе [10].

Следуя работе [12], для произвольного слова s полагаем $\langle s\rangle = sasb$,

$$s = WU_1 \dots U_m, \quad V = \langle s\rangle^2 W \langle s\rangle^2, \quad U = \langle s\rangle^2\langle s\rangle^2 U_1 \langle s\rangle^2 U_2 \langle s\rangle^2 \dots \langle s\rangle^2 U_m \langle s\rangle^2 \langle s\rangle^2.$$

Так как в свободной полугруппе S_2^+ нет пустого слова, то доказанное в цитируемой работе утверждение дает эквивалентность

$$\bigvee_{i=1}^{m} W(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = U_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)$$
$$\iff (\exists y_4)(\exists y_5)y_4V(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)y_5 = U(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b).$$

Для завершения доказательства в последней формуле заменим a на u и b на v.

Теорема 6. *При любом k позитивные $\forall^2\exists^k$-теории без констант свободных полугрупп S_2^+ и S_2 (свободного моноида M_2) алгоритмически разрешимы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную позитивную формулу Φ указанного вида

$$\Phi = (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_1)\dots(\exists y_k)\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_k) = \left(\bigvee_{i=1}^{p}\bigwedge_{j=1}^{q_j} w_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_k) = u_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_k)\right).$$

Полагаем

$$\widehat{\Phi} = (\exists y_1)\dots(\exists y_k)\Psi(a, b, y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$\Psi(a, b, y_1, y_2, \dots, y_k) = \left(\bigvee_{i=1}^{p}\bigwedge_{j=1}^{q_j} w_{ij}(a, b, y_1, y_2, \dots, y_k) = u_{ij}(a, b, y_1, y_2, \dots, y_k)\right).$$

Нетрудно понять, что справедливы эквивалентности

$$S_2^+ \models \Phi \Longleftrightarrow S_2^+ \models \widehat{\Phi}, \quad S_2 \models \Phi \Longleftrightarrow S_2 \models \widehat{\Phi}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться фундаментальным результатом Г. С. Маканина [14].

Теорема 7. *Позитивная $\exists^2\forall\exists^4$-теория без констант свободной полугруппы S_2^+ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. В теореме 3 установлено, что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольной формулы Φ вида

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi(z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

где

$$\Psi(z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(z, y_1, y_2, y_3, a, b)\right),$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_2^+.

По формуле Φ, содержащей две константы, построим формулу $\widehat{\Phi}$ без констант, полагая

$$\widehat{\Phi} = (\exists u)(\exists v)(\forall z)(\exists y_4)((z = u \vee z = v \vee z = uy_4 \vee z = vy_4) \wedge (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi(z, y_1, y_2, y_3, u, v)),$$

где

$$\Psi(z, y_1, y_2, y_3, u, v) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(z, y_1, y_2, y_3, u, v) = u_i(z, y_1, y_2, y_3, u, v)\right).$$

Нетрудно понять, что справедлива эквивалентность

$$S_2^+ \models \Phi \Longleftrightarrow S_2^+ \models \widehat{\Phi}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что построенная позитивная формула $\widehat{\Phi}$ не содержит констант и ее можно привести к виду

$$(\exists u)(\exists v)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)\widehat{\Psi}(z, y_1, y_2, y_3, y_4, u, v).$$

Теорема 8. *При любом m алгоритмически разрешимы позитивные $\forall\exists^m$-теории с одной константой свободных полугрупп S_2^+ и S_2 (свободного моноида M_2).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную позитивную формулу Φ указанного вида

$$\Phi = (\forall x)(\exists y_1)\dots(\exists y_m)\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_m, a),$$

где

$$\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_m, a) = \left(\bigvee_{i=1}^{p}\bigwedge_{j=1}^{q_j} w_{ij}(x, y_1, y_2, \dots, y_m, a) = u_{ij}(x, y_1, y_2, \dots, y_m, a)\right).$$

Полагаем

$$\widetilde{\Phi} = (\exists y_1)\dots(\exists y_m)\Psi(b, y_1, y_2, \dots, y_m, a),$$

где

$$\Psi(b, y_1, y_2, y_3, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{p}\bigwedge_{j=1}^{q_j} w_{ij}(b, y_1, y_2, \dots, y_m, a) = u_{ij}(b, y_1, y_2, \dots, y_m, a)\right).$$

Нетрудно понять, что справедливы эквивалентности

$$S_2^+ \models \Phi \iff S_2^+ \models \overline{\Phi}, \quad S_2 \models \Phi \iff S_2 \models \widetilde{\Phi}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться фундаментальным результатом Г. С. Маканина [14].

На наш взгляд, интересно сравнить доказанные для свободной полугруппы S_2^+ без пустого слова теоремы со следующими теоремами для свободной полугруппы S_2 с пустым словом (свободного моноида M_2).

Теорема (В. Г. Дурнев [7, 8]). *Позитивные $\exists\forall\exists^3$-теории с двумя константами свободных полугрупп S_2 (свободного моноида M_2) и S_2^+ алгоритмически неразрешимы.*

Теорема (Н. А. Перязев [16]). *Позитивная теория без констант свободной полугруппы S_2 с пустым словом (свободного моноида M_2) алгоритмически разрешима.*

Теорема (С. С. Марченков [13]). *Позитивная $\forall\exists^4$-теория с двумя константами свободной полугруппы S_2 с пустым словом (свободного моноида M_2) алгоритмически неразрешима.*

Теорема (В. Г. Дурнев [11]. *Позитивная $\forall\exists^3$-теория с двумя константами свободной полугруппы S_2 с пустым словом (свободного моноида M_2) алгоритмически неразрешима.*

Следующие две теоремы 9 и 10, на наш взгляд, интересно сравнить с сформулированной выше теоремой Н. А. Перязева.

Теорема 9. *Алгоритмически неразрешима позитивная* $\forall^3\exists^3$*-теория с одной константой свободной полугруппы* S_2 *с пустым словом (свободного моноида* M_2*).*

Доказательство. Воспользуемся построенной в работе [11] формулой $\Phi_{S_2}(x)$, имеющей вид

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b),$$

где

$$\Psi_{S_2}(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b)=\left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b)=u_i(x,z,y_1,y_2,y_3,a,b)\right),$$

для которой в этой работе доказано, что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, истинна ли на свободной полугруппе S_2 формула $\Phi_{S_2}(a^n)$.

Формула $\Phi_{S_2}(x)$ содержит две константы. Построим по ней такую формулу $F_{S_2}(x)$ с одной константой, что для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность

$$S_2\models\Phi_{S_2}(a^n)\iff S_2\models F_{S_2}(a^n).$$

Полагаем

$$F_{S_2}(x)=(\forall t)(\forall s)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(tt=t\vee ts=y_1ay_2 \\ \vee\big(t=y_1y_2\wedge sy_2=y_3^3\big)\vee\Psi_{S_2}(x,z,y_1,y_2,y_3,a,t)\big).$$

Покажем, что для произвольного слова $w(a,b)$ справедлива эквивалентность

$$S_2\models\Phi_{S_2}(w(a,b))\iff S_2\models F_{S_2}(w(a,t)),$$

т. е.

$$S_2\models(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(w(a,b),z,y_1,y_2,y_3,a,b)\iff S_2\models F_{S_2}(w(a,t)).$$

Обозначим через $\mathscr{C}(t,s)$ формулу

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(tt=t\vee ts=y_1ay_2\vee\big(t=y_1y_2\wedge sy_2=y_3^3\big)\big),$$

а через $\mathscr{D}(t)$ — формулу

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(x,z,y_1,y_2,y_3,a,t).$$

Тогда формула $F_{S_2}(x)$ равносильна формуле

$$(\forall t)((\forall s)\mathscr{C}(t,s)\vee\mathscr{D}(t)).$$

Если $S_2\models F_{S_2}(w(a,t))$, то, в частности,

$$S_2\models(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(bb=b\vee bb=y_1ay_2 \\ \vee\big(b=y_1y_2\wedge by_2=y_3^3\big)\vee\Psi_{S_2}(w(a,b),z,y_1,y_2,y_3,a,b)\big).$$

Значит,

$$S_2\models(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(w(a,b),z,y_1,y_2,y_3,a,b).$$

Для доказательства обратной импликации предположим, что

$$S_2\models\Phi_{S_2}(w(a,b)),$$

т. е.

$$S_2 \models (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(w(a,b), z, y_1, y_2, y_3, a, b).$$

Покажем, что тогда $S_2 \models F_{S_2}(w(a,t))$, т. е.

$$S_2 \models (\forall t)(\forall s)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(tt = t \vee ts = y_1 a y_2 \\ \vee \big(t = y_1 y_2 \wedge s y_2 = y_3^3\big) \vee \Psi_{S_2}(w(a,t), z, y_1, y_2, y_3, a, t)\big).$$

Пусть t_0 и s_0 — произвольные элементы свободной полугруппы S_2. Покажем, что

$$S_2 \models (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(t_0 t_0 = t_0 \vee t_0 s_0 = y_1 a y_2 \\ \vee \big(t_0 = y_1 y_2 \wedge s_0 y_2 = y_3^3\big) \vee \Psi_{S_2}(w(a,t_0), z, y_1, y_2, y_3, a, t_0)\big).$$

Последняя формула равносильна формуле $(\mathscr{C}(t_0, s_0) \vee \mathscr{D}(t_0))$.

Если t_0 или s_0 не является ненулевой степенью буквы b, то

$$S_2 \models (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(t_0 t_0 = t_0 \vee t_0 s_0 = y_1 a y_2 \vee \big(t_0 = y_1 y_2 \wedge s_0 y_2 = y_3^3\big)\big).$$

Значит, $S_2 \models \mathscr{C}(t_0, s_0)$, но тогда $S_2 \models (\mathscr{C}(t_0, s_0) \vee \mathscr{D}(t_0))$.

Пусть t_0 и s_0 — ненулевые степени буквы b.

Если $t_0 = b^r$ и $r \geq 2$, то

$$S_2 \models (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\big(t_0 = y_1 y_2 \wedge s_0 y_2 = y_3^3\big).$$

Значит, $S_2 \models \mathscr{C}(t_0, s_0)$, но тогда $S_2 \models (\mathscr{C}(t_0, s_0) \vee \mathscr{D}(t_0))$.

Если $t_0 = b$, то так как

$$S_2 \models (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(w(a,b), z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

получим

$$S_2 \models (\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(w(a,t_0), z, y_1, y_2, y_3, a, t_0).$$

Значит, $S_2 \models \mathscr{D}(t_0)$, но тогда и $S_2 \models (\mathscr{C}(t_0, s_0) \vee \mathscr{D}(t_0))$.

Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 10. *Алгоритмически неразрешима элементарная* $\exists^2\forall\exists^4$*-теория без констант свободной полугруппы с пустым словом* S_2 (*свободного моноида* M_2).

Доказательство. Воспользуемся уже использованной выше формулой $\Phi_{S_2}(x)$, имеющей вид

$$(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\Psi_{S_2}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

где

$$\Psi_{S_2}(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = \left(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b) = u_i(x, z, y_1, y_2, y_3, a, b)\right).$$

По ней построим формулу $\overline{\Phi_{S_2}}(x)$ без констант, но с одним вхождением знака отрицания. Полагаем

$$\overline{\Phi_{S_2}}(x) = (\exists u)(\exists v)(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)(uv \neq vu \\ \wedge (zz = z \vee z = u y_4 \vee z = v y_4) \wedge \Psi_{S_2}(x, z, y_1, y_2, y_3, u, v)).$$

Нетрудно понять, что для произвольного слова $w(a,b)$ справедлива эквивалентность

$$S_2 \models \Phi_{S_2}(w(a,b)) \Longleftrightarrow S_2 \models \overline{\Phi_{S_2}}(w(u,v)).$$

Это завершает доказательство теоремы.

В связи с доказанными выше теоремами представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости позитивных $\exists\forall\exists^2$-теорий и $\exists^2\forall\exists$-теорий свободных полугрупп (свободных моноидов) ранга 2 и 3. Заметим, что при любых m и p позитивная $\exists^m\forall^p$-теория любой свободной полугруппы (свободного моноида) алгоритмически разрешима.

Заметим, что формула $(\forall x)(\exists y)(xx = x \vee x = ay \vee x = by)$ истинна на свободном моноиде M_2, но ложна на свободном моноиде M_3. Удалив знак дизъюнкции, получим формулу вида

$$(\forall x)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)w(x, y_1, y_2, y_3, a, b) = u(x, y_1, y_2, y_3, a, b),$$

истинную на свободном моноиде M_2, но ложную на свободном моноиде M_3.

Возникает вопрос, можно ли построить формулу вида

$$(\forall x)(\exists y_1)(\exists y_2)w(x, y_1, y_2, a, b) = u(x, y_1, y_2, a, b),$$

истинную на свободном моноиде M_2, но ложную на свободном моноиде M_3?

Замечание. В обзорной статье [17] рассматриваются, в частности, некоторые результаты различных авторов, которые также вписываются в реализацию программы С. И. Адяна и программы А. И. Мальцева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дурнев В. Г., Зеткина А. И.* Неразрешимые фрагменты позитивной теории свободной полугруппы с простыми кванторными приставками и малым числом констант // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева и 80-летия со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова (г. Казань, 27 июня–1 июля 2024 г.) Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2024. С. 200–201.
2. *Quine W.* Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbol. Logic. 1946. V. 11. P. 105–114.
3. *Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M.* Undecidable theories. Amsterdam: Noth-Holland Publ. Company, 1953.
4. *Мерзляков Ю. И.* Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 4. С. 25–42.
5. *Маканин Г. С.* Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 4. С. 735–749.
6. *Kharlampovich O. G., Myasnikov A. G.* Elementary theory of free non-abelian groups // J. Algebra. 2006. V. 302. P. 451–552.
7. *Дурнев В. Г.* Позитивная теория свободной полугруппы // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 4. С. 772–774.
8. *Дурнев В. Г.* О позитивных формулах на свободных полугруппах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 25, № 6. С. 1131–1137.
9. *Хмелевский Ю. И.* Уравнения в свободной полугруппе. М.: Наука, 1971.
10. *Косовский Н. К.* Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Зап. науч. семин. Ленингр. отд. Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 32. С. 21–28.
11. *Дурнев В. Г.* Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1067–1080.
12. *Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W.* On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables // Bull. Belg. Math. Soc. 2001. V. 8, N 2. P. 293–303.

13. *Марченков С. С.* Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 1. С. 196–198.
14. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Мат. сб. 1977. Т. 103, № 2. С. 147–236.
15. *Дурнев В. Г.* О позитивной теории свободной полугруппы // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: Тульск. гос. пед. ин-т. им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 122–172.
16. *Перязев Н. А.* Позитивные теории свободных моноидов // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 2. С. 148–159.
17. *Адян С. И., Дурнев В. Г.* Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 3–94.

Поступила в редакцию 21 апреля 2025 г.
После доработки 21 апреля 2025 г.
Принята к публикации 5 июля 2025 г.

Зеткина Алена Игоревна (ORCID 0009-0006-2347-3662),
Дурнев Валерий Георгиевич (ORCID 0000-0003-1731-3372)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14/2, Ярославль 150003
a.zetkina1@uniyar.ac.ru, durnev@uniyar.ac.ru