

О ЧИСЛЕ ЛОСИКА — ЧЕРНА СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Ю. Д. Ефременко

Аннотация. Рассматривается первый класс Лосика — Черна (CL-класс) слоений коразмерности 2 на расслоениях над окружностью со структурной группой, являющейся циклической подгруппой специальной линейной группы над полем комплексных чисел. Вводится понятие числа Лосика — Черна для слоений, имеющих по крайней мере два гиперболических слоя. Показано, что для матриц, сопряженных диагональным с различными элементами на диагонали, не равными по модулю единице, класс Лосика — Черна соответствующего слоения нетривиален. При этом значение числа Лосика — Черна однозначно определяется диагональными элементами. Для матриц, сопряженных диагональным с различными, но равными по модулю единице, элементами на диагонали класс Лосика — Черна тривиален. Для матриц, сопряженных единичной, CL-класс тривиален, а для матриц, сопряженных жордановой клетке, нетривиален.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.506

Ключевые слова: слоение, пространство слоев, характеристические классы слоений, когомологии Гельфанда — Фукса, класс Лосика — Черна, динамические системы, неподвижные точки.

1. Введение

В теории характеристических классов слоений особое место занимает класс Годбийона — Вея [1] для слоений коразмерности 1. К сожалению, для слоений произвольной коразмерности ни один известный класс такого же развития и активного исследования не получил. Различные характеристические классы были предложены в работах Ботта и Хафлигера [2], Бернштейна и Розенфельда [3], а также Фукса [4]. Данные классы задаются образующими относительных когомологий $H^*(W_n, O_n(\mathbb{R}))$ алгебры Ли формальных векторных полей на $\mathbb{R}^n$ и принадлежат когомологиям $H^*(M)$ многообразия M , на котором определено слоение. Также в работе [5] был предложен более общий подход к характеристическим классам слоений — характеристические классы определяются как элементы когомологий Чеха — де Рама $\check{H}^*(M/\mathcal{F})$ пространства слоев $M/\mathcal{F}$. Данные классы также могут быть спроектированы в $H^*(M)$.

В недавней работе [6] были предложены характеристические классы Лосика для слоений произвольной коразмерности. Данные классы определяются как образы образующих когомологий Гельфанда — Фукса $H^*(W_n, GL_n(\mathbb{R}))$ и $H^*(W_n, O_n(\mathbb{R}))$ под действием гомоморфизмов:

$$\chi' : H^*(W_n, GL_n(\mathbb{R})) \cong H^*(S'(\text{pt}_n)) \rightarrow H^*(S'(M/\mathcal{F})),$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349.

$$\chi'' : H^*(W_n, O_n(\mathbb{R})) \cong H^*(S''(\text{pt}_n)) \rightarrow H^*(S''(M/\mathcal{F})).$$

Здесь pt_n — точка в $\mathbb{R}^n$, $S(X)$ обозначает пространство струй бесконечного порядка над пространством X , а $S'(X) = S(X)/\text{GL}_n(\mathbb{R})$ и $S''(X) = S(X)/O_n(\mathbb{R})$. Построение таких классов существенным образом опирается на понятие $\mathcal{D}_n$ -пространства — предложенного Лосиком [7, 8] обобщения понятия многообразия. Пространство струй над точкой $S(\text{pt}_n)$, пространство струй $S(M/\mathcal{F})$ над пространством слоев и само $M/\mathcal{F}$ рассматриваются именно как $\mathcal{D}_n$ -пространства.

В настоящее время данный подход является наиболее общим, и характеристические классы Лосика несут в себе больше информации о слоении, чем иные известные классы. В частности, недавно было показано [9], что для $\mathcal{D}_n$ -пространства X существует следующая цепочка гомоморфизмов:

$$H^*(W_n, O_n(\mathbb{R})) \cong H^*(S''(\text{pt}_n)) \rightarrow H^*(S''(X)) \rightarrow \check{H}^*(S''(X)) \cong \check{H}^*(X).$$

В случае $X = M/\mathcal{F}$ из этого следует, что характеристические классы Лосика проектируются в классы из $\check{H}^*(M/\mathcal{F})$, более того, последний гомоморфизм не является инъективным. При этом существует и гомоморфизм $\check{H}^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^*(M)$, переводящий классы Лосика в обыкновенные характеристические классы. В сравнении с классами из $H^*(W_n, O_n(\mathbb{R}))$ классы из $H^*(W_n, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$, называемые классами Лосика — Черна, не порождают никаких новых классов в $H^*(M)$ и $\check{H}^*(M/\mathcal{F})$, однако для слоений коразмерности 1 первый класс Лосика — Черна имеет тривиальные образы в $H^*(M)$ и $\check{H}^*(M/\mathcal{F})$, при этом не являясь тривиальным [10].

В настоящей работе рассматривается упрощенная версия первого класса Лосика — Черна слоений коразмерности 2, принадлежащая $H^2(B(M/\mathcal{F}))$. Конструкция $\mathcal{D}_4$ -пространства $B(X)$ над $\mathcal{D}_2$ -пространством X будет описана в следующем разделе. Для слоений, имеющих по крайней мере два гиперболических слоя, найдены условия нетривиальности первого класса Лосика — Черна, зависящие от свойств образующего группы голономии компактных слоев. Также предложено число Лосика — Черна — некоторый числовой инвариант, с помощью которого можно доказать нетривиальность первого класса Лосика — Черна. Кроме того, рассмотрены примеры слоений на расслоениях над S^1 со структурной группой, порожденной элементом из $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Для таких слоений с использованием первого класса Лосика — Черна построено их разбиение на попарно недиффеоморфные классы, зависящие от класса сопряженности матрицы из $\text{SL}_2(\mathbb{C})$.

2. Первый класс Лосика — Черна

Ключевым объектом в построении модифицированных классов Лосика является $\mathcal{D}_n$ -пространство — обобщение понятия многообразия, предложенное Лосиком [7]. На $\mathcal{D}_n$ -пространстве можно ввести гладкую структуру, позволяющую определить дифференциальные формы и соответственно когомологии де Рама. $\mathcal{D}_n$ -пространствами являются любое гладкое многообразие размерности n , пространство слоев $M/\mathcal{F}$ слоения $\mathcal{F}$ коразмерности n на многообразии M и пространство орбит N/G n -мерного многообразия N под действием некоторой группы диффеоморфизмов G . $\mathcal{D}_n$ -пространствам и классам Лосика посвящены, например, работы [6–8], поэтому здесь приведем лишь основные результаты.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$ с координатами (y^1, y^2) определим множество $S_2(U)$ с координатами (y^i, y_j^i, y_{jk}^i) , $i, j, k = 1, 2$, которые под действием

локальных диффеоморфизмов U в открытое множество $V \subset \mathbb{R}^2$ изменяются следующим образом:

$$\alpha^i = \alpha^i(y^1, y^2), \quad \alpha_j^i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial y^p} y_j^p, \quad \alpha_{jk}^i = \frac{\partial y^p}{\partial \alpha^j} \frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial y^p \partial y^q} \frac{\partial y^q}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial y^p}{\partial \alpha^j} \frac{\partial \alpha^i}{\partial y^s} \frac{\partial y^q}{\partial \alpha^k} y_{pq}^s, \quad (1)$$

где $(\alpha^i, \alpha_j^i, \alpha_{jk}^i)$ — координаты на V . Действие группы $GL_2(\mathbb{R})$ на $S_2(U)$ в указанных координатах имеет вид [10]

$$A : (y^i, y_j^i, y_{jk}^i) \mapsto (y^i, y_p^i A_j^p, y_{jk}^i),$$

где $A = (A_j^i) \in GL_2(\mathbb{R})$. Следовательно, функции (y^i, y_{jk}^i) являются координатами на $S'_2(U) = S_2(U)/GL_2(\mathbb{R})$.

Пусть X — $\mathcal{D}_2$ -пространство, оно определяется набором открытых множеств $\{U_a \mid a \in A\}$, $U_a \subset \mathbb{R}^2$, и набором локальных диффеоморфизмов (морфизмов) $\{m_{ab} \mid a, b \in A\}$, $m_{ab} : U_a \rightarrow U_b$. Для каждого U_a можно рассмотреть множество $S'_2(U_a)$, которое является открытым подмножеством $\mathbb{R}^8$. Кроме того, для каждого морфизма m_{ab} существует индуцированный морфизм $\tilde{m}_{ab} : S'_2(U_a) \rightarrow S'_2(U_b)$, определенный согласно (1). Набор открытых множеств $\{S'_2(U_a) \mid a, b \in A\}$ вместе с набором морфизмов $\{\tilde{m}_{ab} \mid a, b \in A\}$ определяют некоторое $\mathcal{D}_8$ -пространство, которое обозначается через $S'_2(X)$.

Первым классом Лосика — Черна $\mathcal{D}_2$ -пространства X называется когомологический класс из $H^2(S'_2(X))$, на каждой карте $S'_2(U_a)$ представленный формой $dy_{ik}^i \wedge dy^k$ [6]. Для любого морфизма карт $\tilde{m}_{ab} : S'_2(U_a) \rightarrow S'_2(U_b)$ выполнено $\tilde{m}_{ab}^*(dy_{ik}^i \wedge dy^k) = dy_{ik}^i \wedge dy^k$, поэтому данная форма действительно определяет некоторый элемент из $\Omega^2(S'_2(X))$. К сожалению, для изучения данный класс достаточно сложен, поэтому далее рассматривается упрощенная его версия.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим пространство $\tilde{S}_2(U)$ с координатами (y^i, y_j^i, y_i) , где $y_i = y_{ji}^j$. Далее рассмотрим фактор-пространство $B(U) = \tilde{S}_2(U)/GL_2(\mathbb{R})$ с координатами (y^i, y_i) . Таким же образом, как и в случае $S'_2(X)$, для $\mathcal{D}_2$ -пространства X можно определить $\mathcal{D}_4$ -пространство $B(X)$. *Первым классом Лосика — Черна (CL-классом) со значениями в $H^2(B(X))$* называется класс, определяемый симплектической формой $dy_i \wedge dy^i$ в координатах (y^i, y_i) [6]. В частности, если $\mathcal{F}$ — это слоение коразмерности 2 на многообразии M , а $X = M/\mathcal{F}$, то первый класс Лосика — Черна X называется первым классом Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}$. CL-класс $\mathcal{D}_2$ -пространства X тривиален тогда и только тогда, когда для каждой карты $k : U \rightarrow X$ существует форма ω_U такая, что

$$d\omega_U = dy_1 \wedge dy^1 + dy_2 \wedge dy^2$$

и для каждого морфизма $\mathcal{D}_2$ -карт $m : U_1 \rightarrow U_2$ выполнено $\tilde{m}^* \omega_{U_2} = \omega_{U_1}$.

Перед тем как двигаться дальше, приведем некоторые вспомогательные сведения о пространствах $B(U)$. Пусть есть еще одно открытое множество $V \subset \mathbb{R}^2$ и локальный диффеоморфизм $h : U \rightarrow V$. Обозначим через (η^i, η_i) координаты на $B(V)$. Тогда индуцированное отображение $\tilde{h} : B(U) \rightarrow B(V)$ определяется следующим образом:

$$\eta^i = \eta^i(y^1, y^2), \quad \eta_i = \frac{\partial y^p}{\partial \eta^j} \frac{\partial^2 \eta^j}{\partial y^p \partial y^q} \frac{\partial y^q}{\partial \eta^i} + \frac{\partial y^j}{\partial \eta^i} y_j, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Пусть на U задано некоторое векторное поле $V = (V^1, V^2)$, тогда индуцированное векторное поле $\tilde{V}$ на $B(U)$ имеет компоненты

$$\tilde{V}^i = V^i(y^1, y^2), \quad \tilde{V}_i = \frac{\partial^2 V^j}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial V^j}{\partial y^i} y_j.$$

Для доказательства данного факта достаточно рассмотреть однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, порожденную $\tilde{V}$, затем воспользоваться соотношениями (2) и равенством $\tilde{V} = \frac{d}{dt}\varphi|_{t=0}$.

4. Число Лосика — Черна слоения коразмерности 2

Пусть M^n — многообразие размерности n , на котором задано некоторое слоение $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ коразмерности 2. Пусть также в многообразии проведена трансверсаль D^2 — поверхность размерности 2, трансверсальная к слоям слоения. Допустим, что для некоторого слоя L его псевдогруппа голономии порождается локальным диффеоморфизмом $f : D^2 \rightarrow D^2$. Тогда пространство слоев $M^n/\mathcal{F}$ совпадает с пространством орбит $D^2/\langle f \rangle$, где $\langle f \rangle$ — группа, порожденная диффеоморфизмом f . Пусть далее $X = M^n/\mathcal{F} = D^2/\langle f \rangle$.

В пространстве $\Omega^2(B(D^2))$ существует форма $y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2$, инвариантная относительно любого диффеоморфизма пространства $B(D^2)$, порожденного диффеоморфизмом D^2 , т. е. для любого диффеоморфизма $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ и его продолжения $\tilde{\varphi}$ на $B(D^2)$ согласно (2) выполнено

$$\varphi^*(y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2) = y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2.$$

В частности $\tilde{f}^*(y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2) = y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2$, следовательно, эта форма определяет класс в

$$H^2(B(D^2/\langle f \rangle)) = H^2(B(X)).$$

Когомологический класс этой формы в $H^2(B(X))$ называется *первым классом Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}$* . Класс Лосика — Черна тривиален тогда и только тогда, когда для каждой карты $k : U \rightarrow D^2$ найдется форма $\omega_U \in \Omega^1(B(U))$, инвариантная относительно $\tilde{f}^*$, такая, что $d\omega_U = y_1 \wedge y^1 + y_2 \wedge y^2$ и для каждого морфизма карт $\tilde{h} : B(U) \rightarrow B(V)$, определенного в (2), выполнено $\tilde{h}^*\omega_V = \omega_U$ [6].

Следовательно, в этом случае исследование слоения сводится к изучению псевдогруппы группы голономии некоторого его слоя, а именно, к изучению свойств диффеоморфизма f на D^2 . Предположим далее, что f на D^2 имеет две неподвижные точки a_1 и a_2 . Назовем число $\ln(|\det Jf(a_1)/\det Jf(a_2)|)$ *числом Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}$* . Здесь $Jf(a)$ — матрица Якоби диффеоморфизма f в точке a .

Слой L слоения $\mathcal{F}$ назовем *гиперболическим*, если его псевдогруппа голономии содержит элемент f такой, что для соответствующей слою точки $a \in D^2$ выполнено $f(a) = a$ и $Jf(a)$ не содержит 1 среди собственных значений. Сама точка a при этом называется *неподвижной гиперболической*, а элемент f псевдогруппы голономии — *гиперболическим*.

Лемма 1. Пусть a — неподвижная гиперболическая точка f на трансверсали D^2 слоения $\mathcal{F}$ коразмерности 2. Тогда в пространстве $B(D^2)$ существует единственная точка $\tilde{a}$, неподвижная относительно действия $\tilde{f}$.

Доказательство. Под действием диффеоморфизма $\tilde{f} : (y^i, y_i) \mapsto (\alpha^i, \alpha_i)$ координаты изменяются следующим образом согласно (2):

$$\begin{aligned} \alpha^i &= f^i(y^1, y^2), \\ \alpha_k &= \frac{\partial(f^{-1})^p}{\partial \alpha^j}(\alpha^1, \alpha^2) \frac{\partial^2 f^j}{\partial y^p \partial y^q}(y^1, y^2) \frac{\partial(f^{-1})^q}{\partial \alpha^k}(\alpha^1, \alpha^2) + \frac{\partial(f^{-1})^j}{\partial \alpha^k} y_j(\alpha^1, \alpha^2). \end{aligned}$$

Пусть неподвижная точка a имеет координаты (y_0^1, y_0^2) . Тогда $\alpha^i = y_0^i$ и неподвижная точка $\tilde{a}$ отображения $\tilde{f}$ имеет координаты $(y_0^1, y_0^2, y_{1,0}, y_{2,0})$, где $y_{i,0}$ — решение системы

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\partial(f^{-1})^p}{\partial\alpha^j}(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial^2 f^j}{\partial y^p \partial y^q}(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial(f^{-1})^q}{\partial\alpha^1}(y_0^1, y_0^2) + \frac{\partial(f^{-1})^j}{\partial\alpha^1} y_j(y_0^1, y_0^2), \\ y_2 &= \frac{\partial(f^{-1})^p}{\partial\alpha^j}(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial^2 f^j}{\partial y^p \partial y^q}(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial(f^{-1})^q}{\partial\alpha^2}(y_0^1, y_0^2) + \frac{\partial(f^{-1})^j}{\partial\alpha^2} y_j(y_0^1, y_0^2) \end{aligned}$$

Эту систему можно переписать в матрично-векторном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = J(f^{-1})(y_0^1, y_0^2) \left(Hf^1(y_0^1, y_0^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial(f^{-1})^1}{\partial\alpha^1}(y_0^1, y_0^2) \\ \frac{\partial(f^{-1})^2}{\partial\alpha^1}(y_0^1, y_0^2) \end{pmatrix} + Hf^2(y_0^1, y_0^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial(f^{-1})^1}{\partial\alpha^2}(y_0^1, y_0^2) \\ \frac{\partial(f^{-1})^2}{\partial\alpha^2}(y_0^1, y_0^2) \end{pmatrix} \right) + J(f^{-1})(y_0^1, y_0^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где $Hf^i(y_0^1, y_0^2)$ — гессиан функции f^i в точке (y_0^1, y_0^2) . Преобразуем далее:

$$\begin{aligned} &(Jf(y_0^1, y_0^2) - E) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= Hf^1(y_0^1, y_0^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial(f^{-1})^1}{\partial\alpha^1}(y_0^1, y_0^2) \\ \frac{\partial(f^{-1})^2}{\partial\alpha^1}(y_0^1, y_0^2) \end{pmatrix} + Hf^2(y_0^1, y_0^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial(f^{-1})^1}{\partial\alpha^2}(y_0^1, y_0^2) \\ \frac{\partial(f^{-1})^2}{\partial\alpha^2}(y_0^1, y_0^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Правая часть не зависит от y_1 и y_2 , поэтому при фиксированных y_0^1 и y_0^2 это линейная система с постоянной матрицей. Так как 1 не является собственным значением матрицы Jf , матрица данной системы невырожденная, следовательно, существует единственное решение $(y_{1,0}, y_{2,0})$. Таким образом, существует единственная неподвижная точка $\tilde{a}$ отображения $\tilde{f}$ в $B(D^2)$. $\square$

Следующая теорема показывает, каким образом по числу Лосика — Черна можно определять нетривиальность первого класса Лосика — Черна.

Теорема 1. Пусть слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 2 имеет два гиперболических слоя L_1 и L_2 , причем гиперболические элементы псевдогруппы голономии обоих слоев можно продолжить до одного и того же локального диффеоморфизма трансверсали. Тогда если число Лосика — Черна не равно нулю, класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}$ нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D^2 — общая трансверсаль для слоев L_1 и L_2 , $f : D^2 \rightarrow D^2$ — диффеоморфизм, продолжающий гиперболические элементы слоев L_1 и L_2 . Пусть также $a_1, a_2 \in D^2$ — неподвижные гиперболические точки f , соответствующие слоям L_1 и L_2 . По лемме 1 существуют точки $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ из $B(D^2)$, неподвижные относительно $\tilde{f}$. Рассмотрим гладкий путь $\gamma(t)$ ($t \in [0, 1]$) в $B(D^2)$, соединяющий $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ ($\gamma(0) = \tilde{a}_1$, $\gamma(1) = \tilde{a}_2$). Пусть $y^i(t)$ и $y_i(t)$ ($i = 1, 2$, $t \in [0, 1]$) — уравнения кривой γ . Рассмотрим отображение $l : [0, 1]^2 \rightarrow B(D^2)$, заданное в координатах уравнениями

$$y^i(t, s) = (1-s)y^i(t) + s\tilde{y}^i(t), \quad y_i(t, s) = (1-s)y_i(t) + s\tilde{y}_i(t), \quad t, s \in [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\tilde{y}^i(t)$ и $\tilde{y}_i(t)$ — координаты точки $\tilde{f}(\gamma(t))$. Отображение l определяет некоторую двумерную поверхность в $B(D^2)$, натянутую на замкнутый контур, образованный кривой $\gamma(t)$ и ее образом под действием $\tilde{f}$. В пространстве $B(X)$

отображение $\tilde{l}$, полученное композицией l и проекцией $B(D^2)$ в $B(X)$, определяет некоторую замкнутую поверхность. Обозначим эту поверхность через S . Учитывая

$$dy_i \wedge dy^i = d(y_i dy^i) \text{ и } \tilde{f}^*(y_i dy^i) = \frac{\partial y^p}{\partial f^j} \frac{\partial^2 f^j}{\partial y^p \partial y^k} dy^k + y_i dy^i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_S dy_i \wedge dy^i &= \int_S d(y_i dy^i) = \int_{\partial S} y_i dy^i \\ &= \int_{\gamma} y_i dy^i - \int_{\tilde{f}(\gamma)} y_i dy^i = \int_{\gamma} y_i dy^i - \int_{\gamma} \tilde{f}^*(y_i dy^i) = - \int_{\gamma} \frac{\partial y^p}{\partial f^j} \frac{\partial^2 f^j}{\partial y^p \partial y^k} dy^k \\ &= - \int_{\gamma} \frac{1}{\det Jf} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{\partial f^1}{\partial y^1} \frac{\partial f^2}{\partial y^2} - \frac{\partial f^1}{\partial y^2} \frac{\partial f^2}{\partial y^1} \right) dy^i = - \int_{\gamma} d(\ln |\det Jf|) \\ &= - \ln \left| \frac{\det Jf(a_1)}{\det Jf(a_2)} \right| \neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью числа Лосика — Черна можно изучать тривиальность/нетривиальность первого класса Лосика — Черна слоений, имеющих два гиперболических слоя с общей трансверсалью. Стоит отметить, что лемма 1 и теорема 1 являются обобщением результатов Лосика [7], полученных для случая коразмерности 1. Кроме того, с помощью числа Лосика — Черна нельзя определить тривиальность класса, но на рассматриваемых далее примерах нулевое число Лосика — Черна соответствует тривиальному первому классу Лосика — Черна. Однако несомненный плюс такого инварианта состоит в том, что для его вычисления нет необходимости прибегать к аппарату струй — достаточно свойств самого слоения в окрестности гиперболических слоев.

4. Приложение к конкретным слоениям

В данном разделе под гладкостью функции понимается бесконечная гладкость. Соответственно все слоения также являются C^∞ -слоениями. Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{CP}^1$, каждая матрица A действует как линейное преобразование. Также это действие совпадает с дробно-линейным действием на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Далее это действие будем понимать именно таким образом:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Замене координат (линейной в случае $\mathbb{CP}^1$ или дробно-линейной в случае $\overline{\mathbb{C}}$) будет соответствовать сопряжение матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ некоторой невырожденной матрицей $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Если матрица A равна $\pm E$, то в любой системе координат φ_A действует тождественно, ведь тогда

$$\varphi_A(z) = \frac{\pm z}{\pm 1} = z.$$

Если A имеет два различных собственных значения λ и $1/\lambda$, то найдется такая матрица $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, что $T^{-1}AT$ диагональная с собственными значениями на

диагонали. Наконец, A может быть сопряжена жордановой клетке с 1 или -1 на диагонали. При этом в новой системе координат

$$\varphi_A(z) = \frac{\pm z + 1}{\pm 1} = z \pm 1.$$

Таким образом, с точностью до линейной замены координат существует четыре типа таких преобразований $\mathbb{CP}^1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1, \lambda \neq 0.$$

Степени каждого из этих преобразований продолжаются до однопараметрической группы диффеоморфизмов, явные формулы будут представлены далее. Для заданной матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ обозначим соответствующий диффеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ через φ_A , а группу — через $\{\varphi_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$. С помощью данной группы можно построить слоение $\mathcal{F}_A$ коразмерности 2 на $\overline{\mathbb{C}} \times S^1$ (S^1 — единичная окружность) следующим образом. Рассмотрим сначала слоение на $\overline{\mathbb{C}} \times [0, 1]$ со слоями

$$L_z = \{(\varphi_{A,t}(z), t) : t \in [0, 1]\}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Затем рассмотрим фактор-пространство данного пространства по отношению эквивалентности $\sim$, где $(z, 0) \sim (w, 1)$, если $z = w$. Таким образом строится некоторое слоение $\mathcal{F}_A$ на $\overline{\mathbb{C}} \times S^1$ со слоями

$$L_z = \{(\varphi_{A,t}(z), e^{2\pi i t}) : t \in \mathbb{R}\}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Отметим, что слой L_z совпадает со слоем $L_{\varphi_A(z)}$. В этом случае $\overline{\mathbb{C}}$ будет трансверсалью размерности 2 для данного слоения. Для таким образом заданных слоений верна следующая

Теорема 2. Пусть для матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ построено слоение $\mathcal{F}_A$ по описанной выше процедуре. Тогда выполнено следующее:

- если $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален;
- если $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален;
- если $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $|\lambda| \neq 1$, то первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален. Более того, по числу Лосика — Черна можно явно вычислить значение $|\lambda|$;
- если $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1$, то первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален.

Доказательство этой теоремы будет разбито на несколько лемм в зависимости от рассматриваемых случаев. Перед этим напомним, каким образом можно определять тривиальность или нетривиальность первого класса Лосика — Черна.

Класс определяется формой $dy_i \wedge dy^i$ в координатах (y^i, y_i) пространства $B(\overline{\mathbb{C}})$. Он тривиален тогда и только тогда, когда существует форма $\omega \in \Omega^1(B(\overline{\mathbb{C}}))$, инвариантная относительно диффеоморфизма $\tilde{\varphi}_A$, порожденного действием φ матрицы A на $\overline{\mathbb{C}}$, и такая, что $d\omega = dy_i \wedge dy^i$. Если такая форма существует,

то можно считать, что она инвариантна и относительно всей группы диффеоморфизмов $\{\tilde{\varphi}_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ пространства $B(\overline{\mathbb{C}})$, порожденной группой $\{\varphi_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ [11]. В этом случае инвариантность формы ω равносильна равенству $L_{\tilde{V}}\omega = 0$, где L — производная Ли, а $\tilde{V}$ — векторное поле группы $\{\tilde{\varphi}_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Таким образом, тривиальность первого класса Лосика — Черна равносильна существованию для каждой карты (U_i, k_i) гладкой формы ω_{U_i} , удовлетворяющей условиям:

$$d\omega_{U_i} = dy_1 \wedge dy^1 + dy_2 \wedge dy^2, \quad L_{\tilde{V}}\omega_{U_i} = 0,$$

причем для любого морфизма карт $\tilde{h} : B(U_i) \rightarrow B(U_j)$, определенного в (2), выполнено $\tilde{h}^*\omega_{U_j} = \omega_{U_i}$. В работе [6] было показано, что тривиальность первого класса Лосика — Черна равносильна существованию для каждой карты (U_i, k_i) гладкой функции η_i на $B(U_i)$ такой, что

$$\frac{\partial V^k}{\partial y^k} + \tilde{V}\eta_i = c(i) = \text{const}, \quad (3)$$

и на каждом пересечении $U_i \cap U_j$ выполнено

$$d\eta_i = \frac{\partial y^p}{\partial \alpha^l} \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial y^p \partial y^q} dy^q + d\eta_j, \quad (4)$$

где y^k и α^k — координаты на U_i и U_j соответственно. Для одной карты уравнение на нахождение такой гладкой функции принимает вид

$$V^1 \frac{\partial G}{\partial y^1} + V^2 \frac{\partial G}{\partial y^2} + V_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + V_2 \frac{\partial G}{\partial y_2} = -\frac{\partial V^1}{\partial y^1} - \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + R, \quad (5)$$

где V^i и V_i — компоненты векторного поля V , а R — некоторая постоянная. При этом искомая форма имеет вид

$$\omega_U = dG + y_1 dy^1 + y_2 dy^2. \quad (6)$$

Таким образом, для того чтобы доказать тривиальность первого класса Лосика — Черна, необходимо предъявить гладкое решение уравнения (5) для каждой карты, согласованное с морфизмами согласно (4), или доказать, что оно существует. Для доказательства нетривиальности класса необходимо доказать, что уравнение (5) гладкого решения не имеет. Для такой проверки в случае $\mathcal{F}_A$ необходимо определить действие матрицы $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ на трансверсали $\overline{\mathbb{C}}$ в декартовых координатах (y^1, y^2) , а затем и порожденного им диффеоморфизма пространства $B(\overline{\mathbb{C}})$ в координатах (y^i, y_i) , после этого необходимо найти компоненты векторного поля $\tilde{V}$ и исследовать уравнение (5).

Лемма 2. Пусть $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален.

Доказательство. В этом случае действие матрицы A на трансверсали тождественно, поэтому компоненты векторного поля $\tilde{V}$ равны нулю. Следовательно, при постоянной $R = 0$ любая гладкая форма на $B(\overline{\mathbb{C}})$ является решением уравнения (5). Рассмотрим две карты (U_1, k_1) и (U_2, k_2) , накрывающие $\overline{\mathbb{C}}$:

$$k_1 : U_1 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad k_1(y^1, y^2) = y^1 + i \cdot y^2.$$

$$k_2 : U_2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad k_2(\eta^1, \eta^2) = \frac{\eta^1 - i \cdot \eta^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}.$$

Морфизм карт $m : U_1 \rightarrow U_2$ действует следующим образом:

$$m\left(\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \begin{pmatrix} y^1 \\ -y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда индуцированное отображение $\tilde{m} : B(U_1) \rightarrow B(U_2)$ определяется как

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}; & \eta^2 &= \frac{-y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}; \\ \eta_1 &= y_1((y^2)^2 - (y^1)^2) - 2y_2y^1y^2 + 4y^1; \\ \eta_2 &= 2y_1y^1y^2 + y_2((y^1)^2 - (y^2)^2) - 4y^2. \end{aligned}$$

Если $\omega = dG + \eta_1 d\eta^1 + \eta_2 d\eta^2$ — форма на $B(U_2)$ для некоторой гладкой функции $G(\eta^1, \eta^2, \eta_1, \eta_2)$, то ее образом на $B(U_1)$ под действием $\tilde{m}^*$ является форма

$$\tilde{k}^*(\omega) = d\tilde{k}^*(G) - 2d\ln((y^1)^2 + (y^2)^2) + y_1 dy^1 + y_2 dy^2. \quad (7)$$

Пусть ω_{U_1} и ω_{U_2} — гладкие формы на $B(U_1)$ и $B(U_2)$ соответственно, заданные как

$$\begin{aligned} \omega_{U_1} &= -d\ln(1 + (y^1)^2 + (y^2)^2) + y_1 dy^1 + y_2 dy^2, \\ \omega_{U_2} &= -d\ln(1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2) + \eta_1 d\eta^1 + \eta_2 d\eta^2. \end{aligned}$$

Так как компоненты векторного поля $\tilde{V}$ нулевые, любая дифференциальная форма вида (6) удовлетворяет уравнению (5). Следовательно,

$$L_{\tilde{V}}\omega_{U_1} = L_{\tilde{V}}\omega_{U_2} = 0.$$

Кроме того, легко заметить, что $d\omega_{U_1} = dy_i \wedge dy^i$, $d\omega_{U_2} = d\eta_i \wedge d\eta^i$. Также прямыми вычислениями можно показать, что $\tilde{m}^*(\omega_{U_2}) = \omega_{U_1}$. Таким образом, класс Лосика — Черна в этом случае тривиален. $\square$

Лемма 3. Пусть $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На трансверсали $\overline{\mathcal{C}}$ слоение $\mathcal{F}_A$ задает диффеоморфизм $\varphi_A(z) = z \pm 1$. Он имеет одну неподвижную точку — бесконечно удаленную $z = \infty$, поэтому определить число Лосика в этом случае нельзя. Данный диффеоморфизм можно вписать в однопараметрическую группу $\{\varphi_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, задаваемую по правилу $\varphi_{A,t}(z) = z + t$. Определяется каждый $\varphi_{A,t}$ матрицей

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На этом этапе видно, что обе матрицы из условия леммы порождают одну и ту же группу, поэтому далее эти случаи различаться не будут.

Для того чтобы изучить свойства слоения в окрестности неподвижной точки, необходимо сделать замену координат, чтобы неподвижная точка стала собственной. С этой целью приведем матрицу A не к жордановой нормальной форме, а к нормальной форме Фробениуса [12]. Тогда матрица A_t будет подобна матрице $\tilde{A}_t$:

$$\tilde{A}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$$

Соответствующий диффеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ выглядит следующим образом:

$$\psi_t(z) = \frac{(1-t)z - t}{tz + 1 + t}.$$

Он имеет единственную неподвижную точку $z = -1$, причем ψ_1 будет образующим группы голономии слоя, проходящего, через $z = -1$. В ее окрестности и будет изучаться поведение слоения. Обозначим соответствующую карту как (U, k) , где

$$k : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad k(x, y) = x + i \cdot y.$$

Определим действие ψ_t в этих координатах и вычислим компоненты порождаемого группой векторного поля V :

$$\psi_t \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{(tx + t + 1)^2 + (ty)^2} \begin{pmatrix} (t - t^2)(x^2 + y^2) + (1 - 2t^2)x - (t^2 + t) \\ y \end{pmatrix}.$$

Можно вычислить компоненты векторного поля V , порожденного ψ_t :

$$\begin{aligned} V^1(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \psi_t^1(x, y) \right|_{t=0} = -x^2 + y^2 - 2x - 1, \\ V^2(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \psi_t^2(x, y) \right|_{t=0} = -2y(1 + x). \end{aligned}$$

Пусть (y^1, y^2, y_1, y_2) с $y^1 = x$, $y^2 = y$ — координаты на пространстве $B(U)$. Так же, как группа $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ порождает группу $\{\tilde{\psi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ на $B(U)$, векторное поле V на U порождает векторное поле $\tilde{V}$ на $B(U)$. Его компоненты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^1 &= V^1 = -(y^1)^2 + (y^2)^2 - 2y^1 - 1, \\ \tilde{V}^2 &= V^2 = -2(y^1 + 1)y^2, \\ \tilde{V}_1 &= \frac{\partial^2 V^j}{\partial y^1 \partial y^j} - \frac{\partial V^j}{\partial y^1} y_j = 2(y^1 + 1)y_1 + 2y^2 y_2 - 4, \\ \tilde{V}_2 &= \frac{\partial^2 V^j}{\partial y^2 \partial y^j} - \frac{\partial V^j}{\partial y^2} y_j = 2(y^1 + 1)y_2 - 2y^2 y_1, \end{aligned}$$

Для удобства сделаем линейную замену переменных $\xi = y^1 + 1$, $\eta = y^2$, $r = y_1$, $s = y_2$, тогда для данного векторного поля уравнение (5) принимает вид

$$(\eta^2 - \xi^2) \frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + 2(\xi r + \eta s - 2) \frac{\partial G}{\partial r} + 2(\xi s - \eta r) \frac{\partial G}{\partial s} = 4\xi + R. \quad (8)$$

Покажем, что данное уравнение не имеет гладких решений на $B(U)$. Обозначим через $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{\eta = 0\}$ подмножество координатной окрестности $U = \mathbb{R}^2$, на котором η не равно нулю. Нетрудно проверить, что функции

$$I_1 = (\xi^2 + \eta^2)/\eta, \quad I_2 = -4\xi + (\xi^2 - \eta^2)r + 2\xi\eta s, \quad I_3 = 4\eta - 2\xi\eta r + (\xi^2 - \eta^2)s$$

являются гладкими на $B(W)$ решениями однородного уравнения $\tilde{V}G = 0$. В то же время функция

$$G_0 = \frac{R\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \ln \eta^2$$

является гладким на $B(W)$ решением неоднородного уравнения $\tilde{V}G = 4\xi + R$.

Линии уровня $I_1 = c$ на W — это окружности радиуса $|c|/2$ с центром в точке $(0, c/2)$, причем через каждую точку W проходит единственная окружность. Введем на W новую систему координат (t, I_1) , где $I_1 \neq 0$ соответствует некоторой окружности а t — положение точки на этой окружности. Формулы перехода в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \xi = -\frac{I_1}{2} \sin(2 \operatorname{arctg} t), \\ \eta = \frac{I_1}{2} (1 + \cos(2 \operatorname{arctg} t)), \end{cases} \quad \begin{cases} t = -\xi/\eta, \\ I_1 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta}. \end{cases}$$

При фиксированных (ξ, η) отображение

$$h_{\xi, \eta} : \{\xi, \eta\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h_{\xi, \eta}(\xi, \eta, r, s) = (I_2, I_3)$$

является диффеоморфизмом, так как это линейное отображение с невырожденной матрицей. Следовательно, набор функций (t, I_1, I_2, I_3) можно рассматривать как глобальную систему координат на $B(W)$. В этой системе координат однородное уравнение $\tilde{V}G = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} \cdot \left(V^1 \frac{\partial t}{\partial \xi} + V^2 \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta} = 0.$$

Так как $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$ в $B(W)$, однородное уравнение сводится к $G'_t = 0$. Тогда общее решение уравнения $\tilde{V}G = 0$ в области $B(W)$ имеет вид $D(I_1, I_2, I_3)$, где D — некоторая гладкая на $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ функция.

Пусть G — некоторое гладкое в $B(W)$ решение уравнения (8), тогда $G - G_0$ — гладкое в $B(W)$ решение однородного уравнения $\tilde{V}G = 0$. Поэтому $G - G_0 = D(I_1, I_2, I_3)$ для некоторой гладкой в $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ функции D . Таким образом, общее решение уравнения (8) в области $B(W) = \mathbb{R}^4 \setminus \{\eta = 0\}$ имеет вид

$$G(\xi, \eta, r, s) = \frac{R\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \ln \frac{1}{\eta^2} + D\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta}; -4\xi + (\xi^2 - \eta^2)r + 2\xi\eta s; 4\eta - 2\xi\eta r + (\xi^2 - \eta^2)s\right). \quad (9)$$

Первый класс Лосика — Черна тривиален тогда и только тогда, когда данное решение допускает гладкое продолжение на всё $B(U)$, т. е. и на гиперплоскость $\eta = 0$. Первый аргумент функции D имеет особенность при $\eta = 0$, остальные аргументы гладкие. Второе слагаемое решения также имеет особенность при $\eta = 0$, а первое — при $\xi = \eta = 0$.

Предположим, что такое продолжение существует, т. е. существует бесконечно гладкое в $B(U) = \mathbb{R}^4$ решение $\tilde{G}$, в области $\mathbb{R}^4 \setminus \{\eta = 0\}$ имеющее вид (9). Положим $\xi = 0$, $\eta = 1$, $r = 0$, $s = 4$. Тогда

$$G(0, 1, 0, 4) = D(1, 0, 0).$$

Таким образом, $D(1, 0, 0) < \infty$, кроме того, в силу гладкости своих аргументов в окрестности точки $(1, 0, 0)$ функция D бесконечно гладкая. Далее положим $\xi = 1/\sqrt{n}$ и $\eta = 1/n$, $r = 0$, $s = 4$. Отсюда

$$\begin{aligned} G(0, 0, 0, 4) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, 0, 4\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R/\sqrt{n}}{1/n + 1/n^2} - \ln n^2 + D\left(\frac{1/n + 1/n^2}{1/n}; -\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n\sqrt{n}}; \frac{4}{n} + 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R\sqrt{n}}{1 + 1/n} - \ln n^2 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} D \left(1 + 1/n; -\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n\sqrt{n}}; \frac{4}{n} + 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R\sqrt{n}}{1 + 1/n} - \ln n^2 \right) + D(1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Таким образом

$$G(0, 0, 0, 4) = \begin{cases} +\infty & \text{при } R > 0, \\ -\infty & \text{при } R \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, решение уравнения (8) гладким быть не может. Поэтому первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален. $\square$

Лемма 4. Пусть $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \neq 1$, тогда первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален. Более того, по числу Лосика — Черна можно явно вычислить значение $|\lambda|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На трансверсали $\overline{\mathbb{C}}$ слоение $\mathcal{F}_A$ задает диффеоморфизм $\varphi_A(z) = \lambda^2 z$. Он имеет две неподвижные точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Для доказательства нетривиальности класса Лосика — Черна воспользуемся теоремой 1. Для того чтобы вычислить матрицу Якоби в окрестности бесконечно удаленной точки, необходимо сделать такую замену координат, что обе точки станут собственными для $\mathbb{C}$. Для этого от жордановой нормальной формы перейдем к нормальной форме Фробениуса таким же образом, как и в лемме 3. Тогда матрица A подобна матрице $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\lambda & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda + 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Соответствующий диффеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ выглядит следующим образом:

$$\psi(z) = \frac{-1}{z + (\lambda + 1/\lambda)}.$$

Он имеет ровно две неподвижные точки: $z = -\lambda$ и $z = -1/\lambda$. Далее для удобства обозначим $q = \lambda + 1/\lambda = \alpha + i\beta$. В декартовых координатах (x, y) ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) диффеоморфизм ψ действует следующим образом:

$$\psi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{-1}{(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2} \begin{pmatrix} x + \alpha \\ -y - \beta \end{pmatrix}.$$

Можно вычислить матрицу Якоби:

$$J\psi = \frac{1}{(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2} \begin{pmatrix} (x + \alpha)^2 - (y + \beta)^2 & 2(x + \alpha)(y + \beta) \\ -2(x + \alpha)(y + \beta) & (x + \alpha)^2 - (y + \beta)^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда в точке (x, y) определитель матрицы Якоби равен

$$\det J\psi(x, y) = \frac{1}{((x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2)^2}.$$

В терминах переменной z определитель равен $1/|z + q|^2$. Видим, что в неподвижной точке $z = -\lambda$ он равен $|\lambda|^2$, а в неподвижной точке $z = -1/\lambda$ равен $1/|\lambda|^2$. При $|\lambda| \neq 1$ данные значения не совпадают. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в этом случае 1 не является собственным значением

матрицы Якоби в каждой из неподвижных точек. Следовательно, по теореме 1 класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален. Кроме того, для слоения $\mathcal{F}_A$ число Лосика — Черна равно

$$\ln \frac{\det J\psi(-\lambda)}{\det J\psi(-1/\lambda)} = 4 \ln |\lambda|.$$

Таким образом, $|\lambda|$ однозначно определяется по числу Лосика — Черна. $\square$

Остался последний случай: $|\lambda| = 1$. Здесь уже не получится использовать результаты, связанные с числом Лосика — Черна, так как оно равно нулю. Необходимо проверять тривиальность первого класса Лосика — Черна напрямую, исследуя решение дифференциального уравнения (5).

Лемма 5. Пусть $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$, $|\lambda| = 1$, тогда первый класс Лосика — Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален.

Доказательство. В этом случае слоение определяет такой же диффеоморфизм φ_A , как и в лемме 4. Его можно дополнить до однопараметрической группы $\{\varphi_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, определяемой матрицами

$$A_t = \begin{pmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & 1/\lambda^t \end{pmatrix}.$$

Эта группа имеет две неподвижные точки $z = 0$ и $z = \infty$. Сделаем замену координат так, чтобы локальная система координат содержала обе неподвижные точки. Линейной заменой переменной переведем матрицу A к нормальной форме Фробениуса. Обозначим через $U = \mathbb{R}^2$ координатную окрестность, на которой A принимает такой вид. Эта же замена переведет группу $\{\varphi_{A,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ в группу $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, определяемую матрицами

$$\tilde{A}_t = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda^{t-1} - 1/\lambda^{t-1} & \lambda^t - 1/\lambda^t \\ 1/\lambda^t - \lambda^t & 1/\lambda^{t+1} - \lambda^{t+1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

По условию леммы $|\lambda| = 1$, следовательно, $\lambda = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Подставив это значение в (10), имеем

$$\tilde{A}_t = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta(t-1) & -\sin \theta t \\ \sin \theta t & \sin \theta(t+1) \end{pmatrix}.$$

Получаем группу диффеоморфизмов, действующих по правилу

$$\psi_t(z) = -\frac{(\sin \theta(t-1))z + \sin \theta t}{(\sin \theta t)z + \sin \theta(t+1)}.$$

Аналогично предыдущему случаю можно вычислить действие ψ_t в декартовых координатах (x, y) и найти компоненты векторного поля V на U , порожденного этой группой:

$$V^1(x, y) = \left. \frac{d}{dt} \psi_t^1(x, y) \right|_{t=0} = \frac{\theta}{\sin \theta} (y^2 - x^2 - 2x \cos \theta - 1),$$

$$V^2(x, y) = \left. \frac{d}{dt} \psi_t^2(x, y) \right|_{t=0} = \frac{\theta}{\sin \theta} (-2y(x + \cos \theta)).$$

Наконец, можно найти компоненты векторного поля $\tilde{V}$ группы $\{\tilde{\psi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ на $B(U)$, порожденной группой $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Будем работать в координатах (y^1, y^2, y_1, y_2) с $y^1 = x$, $y^2 = y$ пространства $B(U)$. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{V}^1 = V^1 &= \frac{\theta}{\sin \theta}((y^2)^2 - (y^1)^2 - 2y^1 \cos \theta - 1), \quad \tilde{V}^2 = V^2 = \frac{\theta}{\sin \theta}(-2y^2(y^1 + \cos \theta)), \\ \tilde{V}_1 &= \frac{\partial^2 V^j}{\partial y^1 \partial y^j} - \frac{\partial V^j}{\partial y^1} y_j = \frac{\theta}{\sin \theta}(2y^1 y_1 + 2y^2 y_2 + 2 \cos \theta y_1 - 4), \\ \tilde{V}_2 &= \frac{\partial^2 V^j}{\partial y^2 \partial y^j} - \frac{\partial V^j}{\partial y^2} y_j = \frac{\theta}{\sin \theta}(2y^1 y_2 - 2y^2 y_1 + 2 \cos \theta y_2).\end{aligned}$$

Для данного векторного поля уравнение (5) на координатной окрестности U примет вид

$$\begin{aligned}&((y^2)^2 - (y^1)^2 - 2y^1 \cos \theta - 1) \frac{\partial G}{\partial y^1} - 2y^2(y^1 + \cos \theta) \frac{\partial G}{\partial y^2} \\ &+ (2y^1 y_1 + 2y^2 y_2 + 2 \cos \theta y_1 - 4) \frac{\partial G}{\partial y_1} + (2y^1 y_2 - 2y^2 y_1 + 2 \cos \theta y_2) \frac{\partial G}{\partial y_2} = 4y^1 + R,\end{aligned}$$

где все константы были включены в постоянную R . Упростим уравнение, введя новые переменные $x^1 = y^1 + \cos \theta$, $x^2 = y^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Соответствующую карту на $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим через (U_1, k_1) , где $U_1 = \mathbb{R}^2$ и

$$k_1 : U_1 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad k_1(x^1, x^2) = x^1 + i \cdot x^2.$$

В этой системе координат уравнение примет вид

$$\begin{aligned}&((x^2)^2 - (x^1)^2 - \sin^2 \theta) \frac{\partial G}{\partial x^1} - 2x^1 x^2 \frac{\partial G}{\partial x^2} + (2x^1 x_1 + 2x^2 x_2 - 4) \frac{\partial G}{\partial x_1} \\ &+ (2x^1 x_2 - 2x^2 x_1) \frac{\partial G}{\partial x_2} = 4x^1 + R. \quad (11)\end{aligned}$$

Гладкая на $B(U_1)$ функция

$$G(x^1, x^2, x_1, x_2) = \ln(((x^1)^2 + (x^2)^2 + \sin^2 \theta)^{-2})$$

является решением уравнения (11) при постоянной $R = 0$ на координатной окрестности $B(U_1)$ (так как $\sin \theta \neq 0$). Соответствующая данной функции форма ω_{U_1} имеет вид

$$\omega_{U_1} = d \ln(((x^1)^2 + (x^2)^2 + \sin^2 \theta)^{-2}) + x_1 \wedge dx^1 + x_2 \wedge dx^2.$$

Вместе с картой (U_1, k_1) рассмотрим также карту (U_2, k_2) с координатами $(\eta^1, \eta^2, \eta_1, \eta_2)$, определенную такими же формулами, что и в лемме 2, накрывающую противоположный полюс сферы. Для того чтобы показать тривиальность класса Лосика — Черна, необходимо найти на $B(U_2)$ гладкую форму ω_{U_2} такую, что $d\omega_{U_2} = dy_i \wedge dy^i$, $L_{\tilde{V}} \omega_{U_2} = 0$ и $\tilde{m}^*(\omega_{U_2}) = \omega_{U_1}$. На области $B(U_2) \setminus (\{0, 0\} \times \mathbb{R}^2)$ определим форму $\omega_{U_2} = (\tilde{m}^{-1})^*(\omega_{U_1})$. Для таким образом заданной формы верны следующие равенства:

$$d\omega_{U_2} = d((\tilde{m}^{-1})^*(\omega_{U_1})) = (\tilde{m}^{-1})^*(d\omega_{U_1}) = (\tilde{m}^{-1})^*(dx_i \wedge dx^i) = d\eta_i \wedge d\eta^i,$$

$$\begin{aligned}(\tilde{m} \circ \tilde{\psi}_t \circ \tilde{m}^{-1})^*(\omega_{U_2}) &= (\tilde{m}^{-1})^* \circ \tilde{\psi}_t^* \circ \tilde{m}^*((\tilde{m}^{-1})^*(\omega_{U_1})) \\ &= (\tilde{m}^{-1})^* \circ \tilde{\psi}_t^*(\omega_{U_1}) = (\tilde{m}^{-1})^*(\omega_{U_1}) = \omega_{U_2}.\end{aligned}$$

Таким образом, форма ω_{U_2} удовлетворяет условиям (3) и (4). Более того, данная форма может быть гладко продолжена на всё $B(U_2)$. Действительно, ее вид можно вычислить явно, пользуясь формулой (7):

$$\omega_{U_2} = d \ln(1 + \sin^2 \theta \cdot ((\eta^1)^2 + (\eta^2)^2))^{-2} + \eta_1 \wedge d\eta^1 + \eta_2 \wedge d\eta^2.$$

Несложно заметить, что данная форма будет гладкой и на $B(U_2)$, так как в нуле особенности не возникает.

Отметим, что в этом случае нулевому числу Лосика соответствует тривиальный класс, хотя в общем случае это может быть неверно. По крайней мере пока такой результат доказать не удалось. $\square$

5. Заключение

Для слоений коразмерности 2, имеющих два гиперболических слоя с общей трансверсалью определено число Лосика — Черна, с помощью которого можно доказать нетривиальность первого класса Лосика — Черна, не прибегая к аппарату струй и $\mathcal{D}_n$ -пространств. С использованием числа Лосика — Черна и первого класса Лосика — Черна построена классификация слоений на $\overline{\mathbb{C}} \times S^1$, порождаемых матрицами из $SL_2(\mathbb{C})$, с точностью до класса сопряженности матрицы. В этом направлении имеется ряд открытых вопросов. Например, существует ли аналог этого числа в случае, если диффеоморфизм трансверсали не является глобальным. Также на представленных в тексте примерах видно, что нулевому числу Лосика — Черна соответствует тривиальный класс Лосика — Черна. В связи с этим одним из направлений будущих исследований может быть нахождение других слоений с таким же свойством.

Благодарность Автор выражает благодарность Ярославу Владимировичу Базайкину и Антону Сергеевичу Галаеву за содержательные замечания и предложения по полученным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurder S. Dynamics and the Godbillon–Vey class: A history and survey // *Foliations: Geometry and Dynamics* (Warsaw, 2000). River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2002. P. 29–60.
2. Bott R., Haefliger A. On characteristic classes of Γ -foliations // *Bull. Am. Math. Soc.* 1972. V. 78. P. 1039–1044.
3. Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И. Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений // *Успехи мат. наук.* 1973. Т. 28, № 4. С. 103–138.
4. Fuchs D. B. Characteristic classes of foliations // *Russian Math. Surveys.* 1973. V. 28, N 2. P. 1–16.
5. Crainic M., Moerdijk I. Čech–De Rham theory for leaf spaces of foliations // *Math. Ann.* 2004. V. 328. P. 59–85.
6. Bazaikin Ya. V., Efremenko Yu. D., Galaev A. S. On Losik classes of diffeomorphism pseudogroups. 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20778>. 12 p.
7. Лосик М. В. О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах // *Функцион. анализ и его прил.* 1990. Т. 24, № 1. С. 29–37.
8. Losik M. V. Categorical differential geometry // *Cahiers de topologie et géom. diff. catégoriques.* 1994. V. 35, N 4. P. 274–290.
9. Galaev A. S. Comparison of approaches to characteristic classes of foliations. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1709.05888>. 16 p.
10. Bazaikin Y. V., Galaev A. S. Losik classes for codimension-one foliations // *J. Inst. Math. Jussieu.* 2022. V. 21, N 4. P. 1391–1419.

-
11. Bazaikin Ya. V., Galaev A. S., Gumenyuk P. Non-diffeomorphic Reeb foliations and modified Godbillon-Vey class // Math. Zeit. 2022. V. 300. P. 1335–1349.
 12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

Поступила в редакцию 25 марта 2025 г.

После доработки 1 июля 2025 г.

Принята к публикации 15 июля 2025 г.

Ефременко Юрий Данилович (ORCID 0000-0002-6978-1517)

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

`i.efremenko@ng.su.ru`