Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 517.521.2

РАВНОМЕРНАЯ И АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЭРМИТА — СОБОЛЕВА

Р. М. Гаджимирзаев

Аннотация. Рассмотрена система полиномов, ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева и ассоциированная с классическими полиномами Эрмита. Показано, что для функций из весового пространства Соболева ряд Фурье по этой системе сходится равномерно на отрезке при условии, что параметр p не меньше двух. Для случаев, когда p меньше двух, построен пример функции, ряд Фурье которой расходится в заданной точке. Также исследован вопрос абсолютной сходимости на отрезке ряда Фурье по указанной системе полиномов.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.505

Ключевые слова: полиномы Эрмита — Соболева, ряд Фурье, равномерная сходимость, абсолютная сходимость.

§ 1. Введение

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $1 \le p < \infty$, $L^p_\rho(\mathbb{R})$ — пространство измеримых вещественнозначных функций f, определенных на $\mathbb{R}$ и таких, что

$$\|f\|_{L^p_\rho(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})}$ — пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[-A, A] \subset \mathbb{R}$, а $f^{(r)} \in L^p_\rho(\mathbb{R})$. В пространстве $W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$ определим скалярное произведение типа Соболева

$$\langle f, g\rangle_S = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(x) g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Рассмотрим систему полиномов Эрмита — Соболева

$$h_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} h_{n-r}(t)dt, \quad n \ge r, \tag{2}$$

$$h_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Правительства Республики Дагестан (проект № 25-21-20043).

Здесь $h_n(x)$ — ортонормированный полином Эрмита степени n. Система полиномов $\{h_{r,n}(x)\}$ полна в $W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1) (см. [1, п.11]). В работе [2] были получены рекуррентные формулы для $h_{r,n}(x)$. Другие виды скалярных произведений типа Соболева, связанные с весовой функцией $\rho(x)$, рассматривались в работах [3–8]. В частности, в [3] для $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda - \gamma^2 > 0$, было рассмотрено скалярное произведение вида

$$\langle f, g\rangle_S = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)(1+2\gamma x)\rho(x)\,dx + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\rho(x)\,dx, \tag{3}$$

а в [4–7]

$$\langle f, g\rangle_S = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu_0 + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\,d\mu_1, \quad \lambda > 0, \tag{4}$$

в котором меры μ_0 и μ_1 образуют когерентную пару. Результаты, полученные в этих работах, в основном связаны с изучением асимптотических, алгебраических и дифференциальных свойств полиномов, ортогональных относительно (3), (4). При этом ряды Фурье по этим полиномам и их сходимость исследованы мало. В то время как по другим системам полиномов, ортогональным относительно различных скалярных произведений типа Соболева и ассоциированным с полиномами Якоби и Лагерра, эти вопросы исследованы достаточно подробно [9–14]. Более того, для некоторых частных случаев этих систем получены окончательные результаты [15–18].

Ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$ по системе $\{h_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}(f) h_{r,k}(x), \tag{5}$$

где

$$c_{r,k}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) h_{k-r}(t)\rho(t)\,dt, \quad k \ge r. \tag{6}$$

Из неравенства Гёльдера следует, что коэффициенты (6) существуют для любой функции $f \in W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})}$, $1 < p < \infty$. Тогда можно сопоставить ей ряд Фурье (5). Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. Тогда если $f \in W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})}$, то при $p \ge 2$ ряд (5) сходится равномерно к f на любом отрезке $[-A, A]$. Если же $1 \le p < 2$, то существует функция $f \in W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})}$, ряд Фурье которой расходится в точке $x_0 = 1$.*

Замечание 1. Для $p = 1$ нетрудно привести пример функции $f \in W^r_{L^1_\rho(\mathbb{R})}$, для которой коэффициенты (6) не существуют. Однако функция, рассматриваемая для доказательства второй части теоремы 1, принадлежит пространству $W^r_{L^1_\rho(\mathbb{R})}$ и для нее существуют коэффициенты (6).

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) = e^{-x^2}$, $f \in W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$. Тогда ряд (5) абсолютно сходится на любом отрезке $[-A, A]$.*

Доказательства этих теорем приведены в § 3 и § 4.

§ 2. Некоторые свойства полиномов Эрмита и Эрмита — Соболева

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ можно определить с помощью формулы Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n \rho(x) \frac{d^n}{dx^n} \rho(x).$$

Эти полиномы ортогональны на $\mathbb{R}$ относительно весовой функции $\rho(x)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) \rho(x)\, dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}.$$

Через $h_n(x)$ обозначим соответствующие ортонормированные полиномы Эрмита:

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}}. \tag{7}$$

Отметим также следующие свойства, которые можно найти в [19]:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}, \tag{8}$$

$$H_{n+r}^{(r)}(x) = 2^r (n+r)^{[r]} H_n(x), \quad n^{[r]} = n(n-1)\cdots(n-r+1), \tag{9}$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n+1)} \sqrt{\rho(x)} H_n(x) = \cos\left(\sqrt{N_n} x - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{6} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sin\left(\sqrt{N_n} x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad N_n = 2n+1. \tag{11}$$

Далее через $S_n(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье — Эрмита функции $f \in L^2_\rho(\mathbb{R})$:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k h_k(x), \quad \hat{f}_k = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) h_k(t) \rho(t)\, dt.$$

В работе [20] показано, что если $f \in L^2_\rho(\mathbb{R})$, то

$$\|f - S_n(f)\|_{L^2_\rho(\mathbb{R})} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Для полиномов $h_{r,n+r}(x)$ найдем явное представление, свободное от интеграла с переменным верхним пределом.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$h_{r,n+r}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \frac{1}{2^r (n+r)^{[r]}} \left(H_{n+r}(x) - \mathscr{A}_{r,n+r}(x)\right), \tag{13}$$

где

$$\mathscr{A}_{r,n+r}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} H_{n+r}^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!},$$

$$H_{n+r}^{(\nu)}(0) = 2^\nu (n+r)^{[\nu]} H_{n+r-\nu}(0) = 2^\nu (n+r)^{[\nu]} \begin{cases} (-1)^l \frac{(2l)!}{l!}, & n+r-\nu = 2l, \\ 0, & n+r-\nu = 2l+1. \end{cases}$$

Доказательство. Из (9), интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} H_n(t)\,dt = \frac{1}{2^r (n+r)^{[r]} (r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} H_{n+r}(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2^r (n+r)^{[r]}} \left(H_{n+r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} H_{n+r}^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right).$$

Отсюда и из (2), (7) следует равенство (13). □

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства гамма-функции

$$\Gamma(2n) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n)}{2\sqrt{\pi}} 4^n, \tag{14}$$

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = n^{a-b}(1 + O(n^{-1})). \tag{15}$$

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующая

Лемма 2. *Пусть ε — фиксированное положительное число и $|x| \in [\varepsilon, A]$. Тогда для $\mathscr{A}_{r,n+r}(x)$ имеют место асимптотические формулы*

$$\mathscr{A}_{r,2m+r}(x)$$
$$= m! 4^m \left((-1)^{m+1} \frac{2^r}{\sqrt{\pi}} (2m+r)^{[r-2]} \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} + O(m^{r-\frac{5}{2}}) \right), \quad r \ge 2, \tag{16}$$

$$\mathscr{A}_{r,2m+r+1}(x)$$
$$= m! 4^m \left((-1)^{m+1} \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} (2m+r+1)^{[r-1]} \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + O(m^{r-\frac{3}{2}}) \right). \tag{17}$$

Доказательство. Из (9) и (10) следует, что $H_{2m+r}^{(r-1)}(0) = 0$. Пусть r четное. Тогда в силу (10) в $\mathscr{A}_{r,2m+r}(x)$ останутся слагаемые с четными номерами:

$$\mathscr{A}_{r,2m+r}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-2} 2^\nu (2m+r)^{[\nu]} H_{2m+r-\nu}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$
$$= H_{2m+r}(0) + 2^2 (2m+r)^{[2]} H_{2m+r-2}(0) \frac{x^2}{2!} + \cdots$$
$$+ 2^{r-4} (2m+r)^{[r-4]} H_{2m+4}(0) \frac{x^{r-4}}{(r-4)!} + 2^{r-2} (2m+r)^{[r-2]} H_{2m+2}(0) \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}.$$

Отсюда и из (14) имеем

$$\mathscr{A}_{r,2m+r}(x) = (-1)^{m+\frac{r}{2}} m! \frac{\Gamma\left(m+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)} 4^{m+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$+ m! 4^m \left((-1)^{m+\frac{r}{2}-1} 2^2 (2m+r)^{[2]} \frac{\Gamma\left(m+\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)} 4^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right.$$

$$+ (-1)^{m+2}2^{r-4}(2m+r)^{[r-4]}\frac{\Gamma\bigl(m+\frac{5}{2}\bigr)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)}4^{\frac{5}{2}}\frac{x^{r-4}}{(r-4)!}$$
$$+ (-1)^{m+1}2^{r-2}(2m+r)^{[r-2]}\frac{\Gamma\bigl(m+\frac{3}{2}\bigr)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)}4^{\frac{3}{2}}\frac{x^{r-2}}{(r-2)!}\Bigr).$$

При $|x| \in [\varepsilon, A]$ наибольший рост в правой части имеет последнее слагаемое. С другой стороны, для нечетного r два последних слагаемых имеют такой же вид. Поэтому можно написать

$$\mathscr{A}_{r,2m+r}(x) = m!4^m\left((-1)^{m+1}\frac{4}{\sqrt{\pi}}(2m+r)^{[r-2]}\frac{\Gamma\bigl(m+\frac{3}{2}\bigr)}{\Gamma(m+1)}\frac{x^{r-2}}{(r-2)!} + O(m^{r-\frac{5}{2}})\right).$$

Аналогично доказывается формула (17). $\square$

В дальнейшем через c, $c(r)$, $c(r,A)$ будем обозначать положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах. При исследовании абсолютной сходимости ряда (5) нам понадобятся оценки для величины $\mathscr{A}_{r,n+r}(x)$.

Лемма 3. *Для $\mathscr{A}_{r,n+r}(x)$ имеют место оценки:*

$$|\mathscr{A}_{r,n+r}(x)| \le c(r)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)2^n(n+1)^{\frac{r}{2}}, \quad |x| \in [0, c/\sqrt{n}], \tag{18}$$

$$|\mathscr{A}_{r,n+r}(x)| \le c(r,A)\begin{cases}\Gamma\bigl(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\bigr)2^n n^{r-\frac{1}{2}}, & n=2l+1,\\ \Gamma\bigl(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\bigr)2^n n^{r-1}, & n=2l,\end{cases} \quad |x| \in (c/\sqrt{n}, A]. \tag{19}$$

Доказательство. В самом деле, для каждого слагаемого в сумме

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}2^\nu(n+r)^{[\nu]}|H_{n+r-\nu}(0)|\frac{|x^\nu|}{\nu!}$$

при $|x| = \frac{c}{\sqrt{n}}$ имеет место оценка

$$2^\nu(n+r)^{[\nu]}|H_{n+r-\nu}(0)|\frac{|x^\nu|}{\nu!} \le c(r)(n+1)^{\frac{\nu}{2}}|H_{n+r-\nu}(0)|.$$

Отсюда и из (14), (15) получаем

$$2^\nu(n+r)^{[\nu]}|H_{n+r-\nu}(0)|\frac{|x^\nu|}{\nu!} \le c(r)(n+1)^{\frac{\nu}{2}}2^n\Gamma\left(\frac{n+r-\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$\le c(r)(n+1)^{\frac{r}{2}}2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$|\mathscr{A}_{r,n+r}(x)| \le c(r)(n+1)^{\frac{r}{2}}2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Если $|x| = A$ и $n = 2l+1$, то из (15) и асимптотической формулы (17) находим

$$|\mathscr{A}_{r,n+r}(x)| \le c(r,A)2^n n^{r-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \le c(r,A)2^n n^{r-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Аналогично для $n = 2l$:

$$|\mathscr{A}_{r,n+r}(x)| \le c(r,A)2^n n^{r-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right). \quad \square$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $p = 2$. Через $S_{r,n}(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (5):

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n} c_{r,k}(f)h_{r,k}(x).$$

Для f напишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt.$$

С учетом (6) получаем

$$f(x) - S_{r,n}(f,x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt - \sum_{k=r}^{n} c_{r,k}(f)h_{r,k}(x)$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\left(\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\sum_{k=r}^{n} c_{r,k}(f)h_{k-r}(x)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}(f^{(r)}(t) - S_{n-r}(f^{(r)},t))\,dt.$$

Отсюда и из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|f(x) - S_{r,n}(f,x)| \le \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int\limits_0^x \frac{dt}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \|f^{(r)} - S_{n-r}(f^{(r)})\|_{L^2_\rho(\mathbb{R})}.$$

В силу (12) правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$, $x \in [-A, A]$. Равномерная сходимость ряда (5) для $p > 2$ следует из вложения $W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})} \subset W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$.

Пусть теперь $1 \le p < 2$, $f \in W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})}$ такая, что $f^{(r)}(x) = e^{ax^2}$, $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{p}$. Покажем, что предел общего члена ряда Фурье этой функции не равен нулю. Для этого найдем явный вид коэффициентов (6) для этой функции. Из (8) имеем

$$c_{r,k+r}(f) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(1-a)t^2} k! \sum_{k=0}^{[\frac{k}{2}]}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{(2t)^{k-2j}}{(k-2j)!}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{k!}}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k}}\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{2^{k-2j}}{(k-2j)!}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(1-a)t^2} t^{k-2j}\,dt.$$

Заметим, что если $k = 2m+1$, то $c_{r,k+r}(f) = 0$ в силу нечетности подынтегральной функции. Пусть $k = 2m$. Производя замену переменной $y = (1-a)t^2$, получим

$$c_{r,2m+r}(f) = \frac{\sqrt{(2m)!}}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{2m}}}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{2^{2m-2j}}{(2m-2j)!}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{m-j+\frac{1}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{m-j-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{(2m)!}}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{2m}}}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{2^{2m-2j}}{(2m-2j)!}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{m-j+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m-j+\frac{1}{2}\right).$$

Так как

$$\Gamma\left(m-j+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-2j)!}{4^{m-j}(m-j)!}\sqrt{\pi},$$

то

$$c_{r,2m+r}(f)=\frac{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{(2m)!}}{\sqrt{2^{2m}}}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{j!(m-j)!}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{m-j}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-a}}\frac{\sqrt{(2m)!}}{m!\sqrt{2^{2m}}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{m}. \quad (20)$$

Из (11) находим

$$H_{2m+r}(x)=\frac{2^r}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)4^m\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\left[\cos\left(\sqrt{N_{2m+r}}x-\frac{(2m+r)\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{x^3}{6}\frac{1}{\sqrt{N_{2m+r}}}\sin\left(\sqrt{N_{2m+r}}x-\frac{(2m+r)\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{2m+r}\right)\right]. \quad (21)$$

При $r=1$ второе слагаемое в правой части (13) равно 0. Тогда из (13), (14), (20) и (21) для $x=1$ имеем

$$c_{1,2m+1}(f)h_{1,2m+1}(1)=\frac{1}{\sqrt{1-a}}\frac{1}{m!4^m}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{2(2m+1)}H_{2m+1}(1)$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{\pi(1-a)}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{2m+1}\left(\cos\left(\sqrt{4m+3}-\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)+O(m^{-\frac{1}{2}})\right)$$

$$=\frac{(-1)^m\sqrt{e}}{\sqrt{\pi(1-a)}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{2m+1}(\sin\sqrt{4m+3}+O(m^{-\frac{1}{2}})).$$

Так как $\frac{a}{1-a}>1$ при $a>\frac{1}{2}$, то $c_{1,2m+1}(f)h_{1,2m+1}(1)\not\to 0$, $m\to\infty$.

Пусть теперь $r=2$. Тогда из (13), (20) и (21) получаем асимптотическую формулу

$$c_{2,2m+2}(f)h_{2,2m+2}(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-a}}\frac{1}{m!4^m}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{2^2(2m+2)^{[2]}}\left(H_{2m+2}(x)-H_{2m+2}(0)\right)$$

$$=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-a}}\frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{m!}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{(2m+2)^{[2]}}$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}[(-1)^{m+1}\cos(\sqrt{4m+5}x)+O(m^{-1/2})]+(-1)^m\right\}.$$

Как и в предыдущем случае, при $x=1$ имеем $c_{2,2m+2}(f)h_{2,2m+2}(x)\not\to 0$, $m\to\infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда $r\geq 3$. Из (15), (16), (20) и (21) следует, что общий член ряда Фурье функции $f(x)=e^{ax^2}$ при $x=1$ ведет себя как

$$c_{r,2m+r}(f)h_{r,2m+r}(1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-a}}\frac{1}{m!4^m}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m\frac{1}{2^r(2m+r)^{[r]}}(H_{2m+r}(1)-\mathscr{A}_{r,2m+r}(1))$$

$$\sim(-1)^m\left(\frac{a}{1-a}\right)^m m^{-\frac{3}{2}}.$$

Этот ряд расходящийся, так как $\frac{a}{1-a}>1$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин ряда (5):

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_{r,k+r}(f)h_{r,k+r}(x)|. \tag{22}$$

Так как $W^r_{L^p_\rho(\mathbb{R})} \subset W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$, $p > 2$, ограничимся исследованием сходимости ряда (22) для $f \in W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$. С этой целью через $\widetilde{S}_{r,n+r}(x)$ обозначим его частичную сумму

$$\widetilde{S}_{r,n+r}(x) = \sum_{k=0}^{n}|c_{r,k+r}(f)h_{r,k+r}(x)|.$$

Из (13) имеем

$$|c_{r,k+r}(f)h_{r,k+r}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\frac{1}{2^r(k+r)^{[r]}}|c_{r,k+r}(f)|(|H_{k+r}(x)| + |\mathscr{A}_{r,k+r}(x)|).$$

Из (11), (14) и (15) следует, что при $|x| \in [0, A]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\frac{1}{2^r(k+r)^{[r]}}|H_{k+r}(x)| \\
&\qquad \le \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\frac{1}{2^r(k+r)^{[r]}}\frac{\Gamma(k+r+1)}{\Gamma\left(\frac{k+r}{2}+1\right)}e^{\frac{x^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\
&\qquad \le \frac{e^{\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(k+r)^{[r]}\sqrt{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\
&\qquad \le c(r,A)(k+1)^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Пусть $|x| \le \frac{c}{\sqrt{n}}$. Тогда из (18) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\frac{1}{2^r(k+r)^{[r]}}|\mathscr{A}_{r,k+r}(x)| \le c(r)\frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{\Gamma\left(2\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)}}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)^{\frac{r}{2}}}.$$

Отсюда и из (14), (15) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}}\frac{1}{2^r(k+r)^{[r]}}|\mathscr{A}_{r,k+r}(x)| \le c(r)(k+1)^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Таким образом, из (23), (24) и неравенства Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty}(c_{r,k+r}(f))^2 \le \|f^{(r)}\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$$

находим

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_{r,n+r}(x) &\le c(r)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|c_{r,k+r}(f)|\frac{1}{(k+1)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}} \\
&\le c(r)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(c_{r,k+r}(f))^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{r+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Если $|x| \in \left[\frac{c}{\sqrt{n}}, A\right]$, то из (19) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^k k!}} \frac{1}{2^r (k+r)^{[r]}} |\mathscr{A}_{r,k+r}(x)| \le c(r) k^{-\frac{3}{4}}.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{r,k+r}(f) h_{r,k+r}(x)| - \widetilde{S}_{r,n+r}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{r,k+r}(f) h_{r,k+r}(x)|$$
$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_{r,k+r}(f)|}{k^{\frac{3}{4}}} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_{r,k+r}(f))^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{c\|f^{(r)}\|_{L^2_\rho(\mathbb{R})}}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М.* Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электрон. мат. изв. 2016. № 6. С. 31–60.
2. *Sultanakhmedov M. S.* Recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // Пробл. анализа. 2020. V. 9, N 2. P. 97–118.
3. *Álvarez de Morales M., Moreno-Balcázar J. J., Pérez T. E., et al.* Nondiagonal Hermite–Sobolev orthogonal polynomials // Acta Appl. Math. 2000. V. 61, N 1–3. P. 257–266.
4. *Alfaro M., Moreno-Balcázar J. J., Pérez T. E. et al.* Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for Hermite coherent pairs // J. Comput. Appl. Math. 2001. V. 133, N 1–2. P. 141–150.
5. *De Bruin M. G., Groenevelt W.G. M., Meijer H. G.* Zeros of Sobolev orthogonal polynomials of Hermite type // Appl. Math. Comput. 2002. V. 132, N 1. P. 135–166.
6. *Castano-Garcı́a L., Moreno-Balcazar J. J.* A Mehler–Heine-type formula for Hermite–Sobolev orthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. 2003. V. 150, N 1. P. 25–35.
7. *Ruiz H. D., Marcellán F., Molano A.* Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for Hermite $(1,1)$-coherent pairs // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 467, N 1. P. 601–621.
8. *Liu Y., Yu X.-H., Wang Z.-Q., Li H.-Y.* Hermite–Sobolev orthogonal functions and spectral methods for second- and fourth-order problems on unbounded domains // Intern. J. Comput. Math. 2019. V. 96, N 5. P. 950–970.
9. *Marcellán F., Osilenker B. P., Rocha I. A.* On Fourier series of a discrete Jacobi–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2002. V. 117, N 1. P. 1–22.
10. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68.
11. *Гаджимирзаев Р. М.* О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 4. С. 416–423.
12. *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 4. С. 87–164.
13. *Ciaurri Ó., Mı́nguez J.* Fourier series of Jacobi–Sobolev polynomials // Integral Transf. Spec. Funct. 2019. V. 30, N 4. P. 334–346.
14. *Осиленкер Б. П.* О мультипликаторах рядов Фурье по ортогональным многочленам Соболева // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 8. С. 44–82.
15. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.
16. *Diáz-González A., Marcellán F., Pijeira-Cabrera H., et al.* Discrete–continuous Jacobi–Sobolev spaces and Fourier series // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2021. V. 44. P. 571–598.

17. *Магомед-Касумов М. Г.* Равномерная сходимость рядов Фурье по системе полиномов, ортогональной в смысле Соболева и ассоциированной с полиномами Якоби // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 339–349.
18. *Магомед-Касумов М. Г.* Равномерная сходимость рядов Фурье по системе полиномов, ортогональной в смысле Соболева и ассоциированной с ультрасферическими полиномами Якоби // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1173–1190.
19. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
20. *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series. II // Trans. Am. Math. Soc. 1948. V. 63, N 2. P. 355–367.

Поступила в редакцию 19 июня 2025 г.
После доработки 23 июля 2025 г.
Принята к публикации 27 июля 2025 г.

Гаджимирзаев Рамис Махмудович (ORCID 0000-0002-6686-881X)
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
ул. М. Гаджиева, 45, Махачкала 367032
ramis3004@gmail.com