Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 513.813:512.972+513.814+530.12

О ТЕНЗОРАХ КРИВИЗНЫ, РИЧЧИ, ЭЙНШТЕЙНА И ВЕЙЛЯ ВСЕЛЕННОЙ ДЕФРИЗА

В. Н. Берестовский

Аннотация. Изучается Вселенная Дефриза с отрицательной космологической постоянной. Вычислены тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна, Вейля и матрицы ковариантного и контравариантного тензоров энергии-импульса. Доказано выполнение условия времениподобного схождения и нарушение слабого энергетического условия. С помощью тензора Вейля конформной кривизны установлено, что Вселенная имеет вырожденный тип II Петрова, тип N.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.504

Ключевые слова: алгебра Ли, Вселенная Дефриза, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, тензор Вейля, тензор кривизны, тензор Риччи, тензор Эйнштейна, тензор энергии-импульса, типы Петрова.

Посвящаю светлой памяти
Семёна Самсоновича Кутателадзе

§ 1. Введение

Вселенная Дефриза была введена в работе [1] Дефриза. Автору были доступны лишь источники [2, 3], где приведена без деталей и пояснений некоторая информация о Вселенной Дефриза, в частности что она имеет тип N Петрова, а группа ее изометрий шестимерна. Кроме того, в работе Подольского [3] выписаны, как он утверждает, явные уравнения геодезических Вселенной Дефриза.

Авторы статьи [4] исследовали модель Вселенной Дефриза DU с отрицательной космологической постоянной как некоторой четырехмерной группы Ли G_4 с левоинвариантной лоренцевой метрикой и нашли ее геодезические (они незамкнуты, но могут быть неполными), все киллинговы векторные поля и структуры алгебр Ли группы Ли G_4, группы Ли изометрий G_6 для DU и ее подгрупп Ли.

Видимо, DU — единственная Вселенная (решение уравнения тяготения Эйнштейна) «наблюдаемого» типа II, все остальные «физически реализуемые» модели относятся к типу I. Типы I, II описаны далее в этой статье; есть и «физически нереализуемые» типы III, IV.

Несмотря на уникальность DU, автору не удалось найти в литературе точных сведений о тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна, Вейля и структуре тензора энергии-импульса для Вселенной Дефриза DU. Так, в книге [5] уже нет

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006.

никаких упоминаний о DU. Поэтому в статье вычислены эти тензоры и установлены условие времениподобного схождения, нарушение слабого энергетического условия и тип N Петрова. Статья имеет чисто математический характер, хотя в ней цитируются некоторые физические интерпретации полученных результатов. Она предназначена в основном математикам с целью ознакомления их с определениями и разными подходами к поиску основных объектов ОТО. Аналогичной цели служит книга [6].

Но в ней нет тензора конформной кривизны Вейля, необходимого для определения типа Петрова Вселенной Дефриза.

Сходные вопросы для других Вселенных рассматривались в [7].

§ 2. О Вселенной Дефриза DU

Вселенная Дефриза DU была впервые введена в [1] как чисто радиационное решение типа N Петрова уравнения тяготения Эйнштейна с шестимерной группой движения G_6, как утверждается в [2], и приводится там в следующей форме (12.6):

$$ds^2 = \frac{3}{|\Lambda| y^2}\left[dx^2 + dy^2 - dv\left(du - \frac{\Lambda\, dv}{|\Lambda| y^2}\right)\right], \quad (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4,\ y > 0, \tag{1}$$

где Λ — ненулевая космологическая постоянная.

Подольский в [3], предполагая, что Λ отрицательна, дает похожую на (1) форму линейного элемента Вселенной Дефриза

$$ds^2 = \frac{\beta^2}{y^2}\left[dx^2 + dy^2 + 2du dv - \frac{dv^2}{y^2}\right], \quad \beta = \sqrt{-3/\Lambda}. \tag{2}$$

Он пишет в [3], что x, y — пространственные координаты, u — аффинный параметр для лучей вдоль векторного поля $\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial u}$ (геодезическим, киллинговым и изотропным [4]), а v — *замедленное время.*

Замечание 1. При переходе от (1) к (2) Подольский несколько искусственно умножил dv на 2, а du на -1.

В этой статье, как и в [4], мы принимаем эту форму линейного элемента с противоположным знаком, полагая $\beta = 1$:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left[-dx^2 - dy^2 - 2\, du dv + \frac{dv^2}{y^2}\right]. \tag{3}$$

Квадратичная форма (3) приводится к сумме полных квадратов так:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left[-dx^2 - dy^2 + \left(\frac{dv}{y} - y\, du\right)^2\right] - (du)^2. \tag{4}$$

Все ненулевые компоненты для метрического тензора (3) в x, y, u, v:

$$g_{11} = g_{22} = g_{34} = \frac{-1}{y^2}, \quad g_{44} = \frac{1}{y^4}. \tag{5}$$

У DU есть просто транзитивная группа изометрий $G_4(x', y', u', v')$:

$$(x, y, u, v) \to (y'x + x', y'y, u + u', (y')^2 v + v'), \quad (x', u', v') \in \mathbb{R}^3,\ y' \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где единица в G_4 соответствует $(0, 1, 0, 0)$. Заметим, что группу Ли G_4 можно представить в виде матричной группы.

Вследствие равенств (3) и (5) касательные векторы к G_4 в единице

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{7}$$

образуют ортонормальный базис сигнатуры $(-,-,-,+)$ в ds^2. Вследствие (6) им соответствуют левоинвариантные векторные поля на G_4

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = y^2\frac{\partial}{\partial v} \tag{8}$$

и для элементов (7) алгебры Ли $(\mathfrak{g}_4, [\cdot,\cdot])$ группы Ли G_4 есть только следующие (с точностью до перестановок) ненулевые скобки Ли:

$$[e_2, e_1] = e_1, \quad [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 2e_4. \tag{9}$$

§ 3. Тензоры кривизны и Риччи

Для векторных полей X, Y, Z на произвольном (псевдо)римановом многообразии $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ с (псевдо)скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и связностью Леви-Чивита ∇ известна формула (7) п. 3.5 в [8]:

$$\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}[X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle + \langle[Z,X],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle]. \tag{10}$$

Эта же формула приведена в (1.25) из [9] и начале с. 52 книги [10]. В частном случае группы Ли с левоинвариантными (псевдо)метрическим тензором и векторными полями эта формула сводится к следующей:

$$\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}[\langle[X,Y],Z\rangle + \langle[Z,X],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle]. \tag{11}$$

Тензор кривизны в $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ вычисляется по формуле

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{12}$$

Та же формула дана в (2.18) из [10] и с противоположным знаком в [11]. По соображениям, приведенным на с. 46 в [10], левая часть (12) в компонентах (векторных полей X, Y, Z) записывается в виде

$$R^a_{bcd}X^cY^dZ^d. \tag{13}$$

Сравнение формул (1.34) в [9], (5.2) в [12] и (2.20) в [10] показывает, что в [12] и [10] применяется запись (13) для (12) в координатном случае.

Мы определяем *ковариантный тензор кривизны* формулой

$$R(X,Y,Z,V) = \langle R(X,Y)Z, V\rangle. \tag{14}$$

Сравнение (14) с [10–12] показывает, что там ковариантный тензор кривизны имеет противоположный знак с (14).

Определение *тензора Риччи* в псевдоримановом многообразии:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \operatorname{trace} R(\cdot, X)Y. \tag{15}$$

Это дает тот же результат, что в [10–12], вследствие симметрий R и формул на с. 47 в [10], в определении 1.90 из [11], в (5.10) из [12].

В произвольном ортонормированном базисе $E_1, \dots, E_n$ (векторных полей или векторов в данной точке из M^n)

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} \langle E_k, E_k \rangle R(E_k, X, Y, E_k). \tag{16}$$

Скалярная кривизна многообразия $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ равна

$$\mathrm{R} = \sum_{k=1}^{n} \langle E_k, E_k \rangle \operatorname{Ric}(E_k, E_k). \tag{17}$$

Применим (11) к случаю, когда X, Y, Z — векторные поля из (8).

Если X, Y, Z отличны от X_2, то $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$ вследствие (9) и (11).

Рассмотрим теперь случаи, когда $X \neq X_2 \neq Y$, $Z = X_2$. Имеем

$$\langle \nabla_{X_1} X_3, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_1} X_4, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_3} X_3, X_2 \rangle = 0,$$

$$-\langle \nabla_{X_1} X_1, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_3} X_4, X_2 \rangle = 1, \quad \langle \nabla_{X_4} X_4, X_2 \rangle = 2.$$

Используя эти равенства и

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \tag{18}$$

получаем

$$\nabla_{X_1} X_3 = \nabla_{X_3} X_1 = \nabla_{X_1} X_4 = \nabla_{X_4} X_1 = \nabla_{X_3} X_3 = 0, \tag{19}$$

$$-\nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_3} X_4 = \nabla_{X_4} X_3 = -X_2, \quad \nabla_{X_4} X_4 = -2X_2. \tag{20}$$

Ясно, что $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$, если два вектора из X, Y, Z равны X_2. Далее,

$$\langle \nabla_{X_2} X_1, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_j, X_1 \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_3, X_3 \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_4, X_4 \rangle = 0,$$

$$\langle \nabla_{X_2} X_3, X_4 \rangle = -\langle \nabla_{X_2} X_4, X_3 \rangle = 1;$$

$$\nabla_{X_2} X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2} X_2 = 0, \quad \nabla_{X_2} X_3 = X_4, \quad \nabla_{X_2} X_4 = X_3, \tag{21}$$

$$\nabla_{X_1} X_2 = -X_1, \quad \nabla_{X_3} X_2 = -X_4, \quad \nabla_{X_4} X_2 = X_3 - 2X_4. \tag{22}$$

Применим (12) к случаю, когда X, Y, Z — векторные поля из (8). Предположим сначала, что X, Y отличны от X_2. Применяя (19)–(22) и *учитывая здесь и в дальнейшем, что* $R(X, Y) = -R(Y, X)$, выпишем только ненулевые выражения:

$$R(X_1, X_3) X_4 = X_1, \quad R(X_1, X_3) X_1 = X_4, \tag{23}$$

$$R(X_1, X_4) X_1 = -X_3 + 2X_4, \quad R(X_1, X_4) X_3 = X_1, \tag{24}$$

$$R(X_1, X_4) X_4 = 2X_1, \quad R(X_3, X_4) X_3 = X_4, \quad R(X_3, X_4) X_4 = X_3. \tag{25}$$

Предположим теперь, что одно из X, Y равно X_2.

Применяя (19)–(22) и подразумевая $R(X, Y) = -R(Y, X)$, выпишем только ненулевые выражения:

$$R(X_1, X_2) X_1 = X_2, \quad R(X_1, X_2) X_2 = -X_1, \tag{26}$$

$$R(X_2, X_3) X_2 = -3X_3 + 4X_4, \quad R(X_2, X_3) X_3 = 3X_2, \tag{27}$$

$$R(X_2, X_3) X_4 = 4X_2, \quad R(X_2, X_4) X_2 = 5X_4 - 4X_3, \tag{28}$$

$$R(X_2, X_4) X_3 = 4X_2, \quad R(X_2, X_4) X_4 = 5X_2. \tag{29}$$

Выпишем ненулевые компоненты тензора (14) с учетом (23)–(29), $R(X,Y) = -R(Y,X)$, $R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y)$ [10]:

$$R(X_1,X_2,X_1,X_2) = -1, \quad R(X_1,X_3,X_1,X_4) = 1, \tag{30}$$

$$R(X_1,X_4,X_1,X_4) = 2, \quad R(X_2,X_3,X_2,X_3) = 3, \tag{31}$$

$$R(X_2,X_3,X_4,X_2) = -4, \quad R(X_4,X_2,X_4,X_2) = 5, \tag{32}$$

$$R(X_3,X_4,X_3,X_4) = 1. \tag{33}$$

Применяя (23)–(29) и (15) или (16), получаем симметричный тензор Риччи с ненулевыми компонентами, где

$$\mathrm{Ric}(X_1,X_1) = -3, \quad \mathrm{Ric}(X_2,X_2) = -3, \quad \mathrm{Ric}(X_3,X_3) = 2, \tag{34}$$

$$\mathrm{Ric}(X_3,X_4) = \mathrm{Ric}(X_4,X_3) = 5, \quad \mathrm{Ric}(X_4,X_4) = 8. \tag{35}$$

Из (17) и (34), (35) вытекает

Теорема 1. *Матрица ковариантного тензора Риччи имеет вид*

$$(\mathrm{Ric}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$\mathrm{R} = 3 + 3 - 2 + 8 = 12. \tag{37}$$

§ 4. Тензоры Эйнштейна и энергии-импульса

Тензор Эйнштейна G лоренцева многообразия $(M^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ есть

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}\langle\cdot,\cdot\rangle. \tag{38}$$

Уравнение тяготения Эйнштейна имеет вид

$$G = T, \tag{39}$$

симметричный тензор T называется *тензором энергии-импульса.*

Матрица квадратичной формы $G = T$ в базисе (X_1, X_2, X_3, X_4):

$$(G) = (T) = (\mathrm{Ric}) - (6)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \tag{40}$$

У $T(\cdot,\cdot)$ сигнатура $(+,+,+,-)$, $T = -3 - 3 - 8 + 2 = -12 = -\mathrm{R}$.

Предложение 1. *Для причинного вектора* X *в* DU

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq 0. \tag{41}$$

Доказательство. Причинный вектор в DU коллинеарен вектору $X = X_4 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$, где $0 \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$. Вследствие (36)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= -3\alpha^2 - 3\beta^2 + 2\gamma^2 + 10\gamma + 8 \\ &= -3\alpha^2 - 3\beta^2 - 3\gamma^2 + 5\gamma^2 + 10\gamma + 8 \geq 5(\gamma+1)^2 \geq 0. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 2. Неравенство (41) означает, что $(G_4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ подчиняется условию времениподобного схождения [10]. При этом условии по теореме 1 (с. 292 в [10]) пространство-время не может быть изотропно геодезически полным, а по теореме 4 (с. 302 в [10]) и времениподобно геодезически полным. В [4] доказано, что в DU все времениподобные геодезические неполны, а изотропные и пространственноподобные геодезические могут быть и полными, и неполными.

Предложение 2. *Для изотропного вектора X в* DU, $T(X,X) \geq 0$, *есть времениподобные векторы X в* DU *такие, что $T(X,X) < 0$.*

Доказательство. Каждый причинный вектор в DU коллинеарен вектору вида $X = X_4 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, если X — изотропный вектор, и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 1$, если X — времениподобный вектор. Вследствие (40) для изотропного вектора X

$$T(X,X) = 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 8\gamma^2 + 10\gamma + 2 = 5\gamma^2 + 10\gamma + 5 \geq 5(\gamma+1)^2 \geq 0.$$

Пусть $X = X_4 + \gamma X_3$, $0 < |\gamma| < 1$. Тогда $T(X,X) = 2(4\gamma^2 + 5\gamma + 1)$ достигает минимального значения при $\gamma = -\frac{5}{8}$ и оно равно $-9/8$. $\square$

Замечание 3. Для рассматриваемых в доказательстве предложения 1 (соответственно 2) причинных векторов минимум 0 (соответственно $-9/8$) квадратичной формы достигается на изотропном векторе $X_4 - X_3 = -\frac{\partial}{\partial u}$ (соответственно времениподобном векторе $X_4 - (5/8)X_3$).

На основании предложений 1, 2 и [10] справедлива

Теорема 2. *Во Вселенной* DU *выполняется условие времениподоного схождения и не выполняется слабое энергетическое условие.*

Для выяснения смысла слабого энергетического условия Хокинг и Эллис на с. 102, 103 в [10] используют тот факт, что в точке p компоненты контравариантного тензора энергии-импульса $\overline{T}$ в базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) (не обязательно ортонормированном, но с времениподобным E_4 и пространственноподобными E_1, E_2, E_3) можно представить в одной из четырех канонических форм (типов).

Процитируем важные для этой статьи утверждения из [10] о физически реализуемых типах I и II. К типу I относятся тензоры энергии-импульса $\overline{T}$ с диагональными матрицами $(\overline{T})$, имеющими диагональные элементы p_1, p_2, p_3, μ. «Это тот общий случай, когда тензор энергии-импульса обладает времениподобным собственным вектором E_4, и притом единственным, за исключением случая, когда $\mu = p_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$. Собственное значение μ представляет собой плотность энергии по измерениям наблюдателя, мировая линия которого в точке p имеет касательным вектором E_4. Собственные значения p_α $(\alpha = 1,2,3)$ являются главными значениями давления в трех пространственноподобных направлениях E_α. Таков вид энергии-импульса для всех наблюдаемых полей с ненулевой массой покоя, а также и для всех наблюдаемых полей с нулевой массой покоя, за исключением одного особого случая, когда имеем каноническую форму типа II

$$(\overline{T}) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu - \varkappa & \nu \\ 0 & 0 & \nu & \nu + \varkappa \end{pmatrix}, \quad \nu = \pm 1.$$

Здесь тензор энергии-импульса имеет двукратный собственный вектор $E_3 + E_4$. Единственный наблюдаемый случай такой формы, когда безмассовое поле представляет собой излучение, целиком распространяющееся в направлении $E_3 + E_4$. В этом случае $p_1 = p_2 = \varkappa = 0$.»

В [10] указаны еще матрицы тензора $\overline{T}$ типов III и IV. «Наблюдаемых полей с тензорами энергии-импульса типов III и IV не существует. Слабому энергетическому условию удовлетворяют все экспериментально обнаруженные поля. Для физически нереализуемых типов III и IV слабое энергетическое условие не выполняется.»

Добавим еще цитаты из [10] о том, когда выполнено слабое энергетическое условие для типов I и II. «Для типа I слабое энергетическое условие будет выполняться при $\mu \geq 0$, $\mu + p_\alpha \geq 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Для типа II оно будет выполнено, если $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $\varkappa > 0$, $\nu = 1$.»

Теорема 3. *Контравариантный тензор энергии-импульса в базисе* $(X_1, X_2, -\sqrt{5}X_3, \sqrt{5}X_4)$ *имеет тип* II *при* $p_1 = p_2 = 3$, $\nu = 1$, $\varkappa = -\frac{3}{5}$.

Доказательство. Вычислим матрицу $(\overline{T})$ при этих данных. Пусть g — матрица метрического тензора в данном базисе. Тогда

$$(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad (g)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Матрица тензора T в заданном базисе базисе равна

$$\begin{aligned} (T_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \end{pmatrix}; \quad (\overline{T}) = (g)^{-1}(T_1)(g)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varkappa & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1+\varkappa \end{pmatrix}, \quad \varkappa = -\frac{3}{5}. \quad \square \end{aligned} \tag{43}$$

Замечание 4. Видимо, в цитатах из [10] о типе II имеется в виду как раз Вселенная Дефриза. Это согласуется с тем, что у нас $E_3 = -\sqrt{5}X_3$, $E_4 = \sqrt{5}X_4$ и вследствие замечания 3 $E_3 + E_4 = \sqrt{5}\frac{\partial}{\partial u}$ — изотропное геодезическое киллингово векторное поле на DU, являющееся центральным элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ группы Ли G_4.

§ 5. Тензор Вейля

Многообразие $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ является конформно плоским тогда и только тогда, когда его *тензор конформной кривизны Вейля* W тождественно равен нулю [11]. В [10] доказано, что тензор Вейля W конформно-инвариантен. Точнее, если $\phi : M \to N$ — конформное отображение псевдоримановых многообразий с множителем k^2, $k(x) > 0$, $x \in M$, то для любых векторных полей X, Y, Z, V на M

$$W(d\phi(X), d\phi(Y), d\phi(Z), d\phi(V)) = k^2 W(X, Y, Z, V). \tag{44}$$

Как было отмечено, при данном здесь и в [10–12] определениях тензоры кривизны, а следовательно, и тензоры Вейля, противоположны друг другу, в то время как тензоры Риччи совпадают. Поэтому из формулы в начале с. 53 из [10], определения 1.110 и формулы (1.116) в [11], а также (35.11) из [12] легко вывести, что

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z,V) = R(X,Y,Z,V) &- (1/(n-2))[\langle X,V\rangle \operatorname{Ric}(Z,Y) \\ &- \langle X,Z\rangle \operatorname{Ric}(V,Y) + \langle Y,Z\rangle \operatorname{Ric}(V,X) - \langle Y,V\rangle \operatorname{Ric}(Z,X)] \\ &- (R/((n-1)(n-2)))[\langle X,Z\rangle\langle V,Y\rangle - \langle X,V\rangle\langle Z,Y\rangle]. \end{aligned} \tag{45}$$

В случае $n = 4$ формула (45) приобретает вид

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z,V) = R(X,Y,Z,V) - (1/2)[\langle X,V\rangle \operatorname{Ric}(Z,Y) \\ - \langle X,Z\rangle \operatorname{Ric}(V,Y) + \langle Y,Z\rangle \operatorname{Ric}(V,X) - \langle Y,V\rangle \operatorname{Ric}(Z,X)] \\ - (R/6)[\langle X,Z\rangle\langle V,Y\rangle - \langle X,V\rangle\langle Z,Y\rangle]. \end{aligned} \tag{46}$$

Вычислим ненулевые компоненты W на основе (30)–(35), (46) для

$$X = X_1, \quad Y = X_2, \quad Z = X_3, \quad V = X_4. \tag{47}$$

Отметив равенства $W(X,Y,X,Y) = W(Z,V,Z,V) = 0$, выпишем компоненты W:

$$W(X,Z,X,V) = -\frac{3}{2}, \tag{48}$$

$$W(X,V,X,V) = -\frac{3}{2}, \quad W(Y,Z,Y,Z) = \frac{3}{2}, \tag{49}$$

$$W(Y,Z,V,Y) = -\frac{3}{2}, \quad W(V,Y,V,Y) = \frac{3}{2}, \tag{50}$$

$$W(X,Z,X,Z) = -\frac{3}{2}. \tag{51}$$

Из (16), (46) и (48)–(51) нетрудно вывести

Предложение 3. *W имеет свойства симметрии и структуру ковариантного тензора кривизны Риччи-плоского многообразия.*

Замечание 5. Это согласуется с утверждениями в [10–12].

§ 6. Тип Петрова Вселенной DU

Вследствие симметрий ковариантного тензора кривизны R на любом псевдоримановом многообразии R можно рассматривать как линейный симметрический оператор $\widetilde{R}$ на бивекторных полях при определении псевдоскалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на простых бивекторах как определителя матрицы Грама задающих их векторов. Действие оператора $\widetilde{R}$ на простых бивекторах определяется формулой

$$(\widetilde{R}(U \wedge V), E \wedge F) := R(U,V,E,F). \tag{52}$$

(У разных авторов правая часть определена с точностью до знака.)

Пользуясь этим, А. З. Петров получает *алгебраическую классификацию* таких линейных отображений, доказывая в параграфах 18, 19 из [12], что матрицы $(\widetilde{R}\cdot,\cdot)$ для всех эйнштейновых ($\operatorname{Ric}(\cdot,\cdot) \equiv \varkappa\langle\cdot,\cdot\rangle$, [11]) лоренцевых 4-многообразий $(M^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ в специально выбранном ортонормированном базисе *шестимерного вещественного пространства бивекторов* $(\Lambda^2, (\cdot,\cdot))$, составленном из простых бивекторов, могут иметь только три (основных) типа — *типа Петрова.*

В параграфе 20 из [12] А. З. Петров разбивает поля тяготения общего вида на три (основных) типа в теоремах 1–3, подключая для этого и тензор энергии-импульса T. Для этого он вводит в (20.3) четырехвалентный тензор S, который получается заменой во втором члене формулы (46) из четырех слагаемых тензора Ric на тензор T. После этого в (20.7) определяется новый тензор P той же валентности, называемый *тензором пространства-времени.* Он является суммой двух слагаемых: $\tau(R - S)$ и выражения, получаемого из последнего члена в (46) заменой $-\mathrm{R}/6$ на σ, где $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$.

Замечание 6. Параметры τ, σ не фиксированы.

Мы рассматриваем $\widetilde{P} := -P$. Тензор $\widetilde{P}$ имеет все свойства симметрии ковариантного тензора кривизны, причем применение аналога формулы (16) к $\widetilde{P}$ дает вследствие (20.10), что это структура эйнштейнова лоренцева многообразия с константой $\varkappa := \tau\,\mathrm{R} + 3\sigma$ (которую можно классифицировать, как в параграфах 18, 19 из [12]). Отсюда следует, что при $\tau = 1$, $\sigma = -\frac{\mathrm{R}}{3}$ это будет структура Риччи-плоского лоренцева многообразия. Более того, вследствие изложенного на с. 132 в [12] при этих параметрах $\widetilde{P} = W$, что можно проверить непосредственно. Сказанное позволяет найти тип Петрова Вселенной DU, определив этот тип для вычисленного тензора Вейля W.

Интересная интерпретация классификации Петрова и некоторое ее упрощение предложены в статье Торпа [13] (см. также [11]). Идея его подхода: оператор $*$ Ходжа превращает 6-мерное вещественное пространство бивекторов в 3-мерное комплексное пространство.

Торп вводит в [13] упорядоченный базис простых бивекторов

$$X \wedge Y,\ X \wedge Z,\ Y \wedge Z,\ Z \wedge V,\ V \wedge Y,\ X \wedge V. \tag{53}$$

При этом (53) — ортонормированный базис в вещественном пространстве $(\Lambda^2, (\cdot,\cdot))$ с сигнатурой $(+++---)$ [13]. Эта сигнатура не меняется при смене сигнатуры лоренцева многообразия (Торп использует сигнатуру $(+,+,+,-)$) на противоположную, поскольку скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ двух бивекторов вычисляется как определитель (4×4)-матрицы Грама упорядоченной четверки векторов.

Самосопряженный оператор $*$ на $(\Lambda^2, (\cdot,\cdot))$ определяется формулой

$$\xi \wedge \eta = (\xi, *\eta)(X \wedge Y \wedge Z \wedge V), \quad \xi, \eta \in \Lambda^2. \tag{54}$$

При этом $(*)^2 = -\operatorname{identity}$. Тогда соотношение $i\eta := *\eta$ задает структуру 3-мерного комплексного векторного пространства на Λ^2:

$$X \wedge Y = i(Z \wedge V),\ X \wedge Z = i(V \wedge Y),\ Y \wedge Z = i(X \wedge V), \tag{55}$$

$$Z \wedge V = -i(X \wedge Y),\ V \wedge Y = -i(X \wedge Z),\ X \wedge V = -i(Y \wedge Z), \tag{56}$$

$$X \wedge Y, \quad X \wedge Z, \quad Y \wedge Z \tag{57}$$

— базис в комплексном пространстве Λ^2.

Замечание 7. Равенства (30)–(33) и (55), (56) согласованы.

В [13] доказано, что оператор $\widetilde{R}$, определенный формулой (52), является комплексным линейным оператором на Λ^2 относительно введенной комплексной структуры тогда и только тогда, когда $(M^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — эйнштейново лоренцево многообразие. При этом матрица $(\widetilde{R})$ оператора $\widetilde{R}$ в базисе (53) вследствие его сигнатуры и (52) имеет вид

$$(\widetilde{R}) = \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix}, \tag{58}$$

где матрицы M и N те же, что и в теореме 3 параграфа 20 из [12], но расположены в разных блоках (6×6)-матриц.

Используя формулу (52), сигнатуру (53) и (30)–(33), получаем

$$\widetilde{W}(X \wedge Y) = 0, \quad \widetilde{W}(X \wedge Z) = \frac{3}{2}(X \wedge V - X \wedge Z),$$

$$\widetilde{W}(Y \wedge Z) = \frac{3}{2}(Y \wedge Z + V \wedge Y), \quad \widetilde{W}(Z \wedge V) = 0,$$
$$\widetilde{W}(X \wedge V) = \frac{3}{2}(X \wedge V - X \wedge Z), \quad \widetilde{W}(V \wedge Y) = -\frac{3}{2}(Y \wedge Z + V \wedge Y).$$

Тогда матрица оператора $-\frac{2}{3} \cdot \widetilde{W}$ в базисе (53) имеет вид (58), где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Теорема 4. *Вселенная* DU *имеет* (*вырожденный*) *тип* II *Петрова* [13]. *В принятых терминах Вселенная* DU *имеет тип* N *Петрова.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Defrise L.* Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les espaces lorentziens. Bruxelles: Thése, Université Libre de Bruxelles, 1969.
2. *Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt Ed.* Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.
3. *Podolský J.* Exact non-singular waves in the anti-de Sitter Universe // General Relativity and Gravitation. 2001. V. 33, N 6. P. 1093–1113.
4. *Berestovskii V. N., Zubareva I. A.* Geodesics and isometry group of Defrise Universe as a Lie group with left-invariant Lorentz metric // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 3. P. 1001–1014.
5. *Griffits J. B., Podolský J.* Exact space-times in Einstein's general relativity. Cambridge; New York: Camb. Univ. Press, 2009.
6. *Sachs R. K., Wu H.* General relativity for mathematicians. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1977.
7. *Берестовский В. Н.* Лоренцевы многообразия, близкие к евклидову пространству // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 306–322.
8. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
9. *Berestovskii V., Nikonorov Yu.* Riemannian manifolds and homogeneous geodesics. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020.
10. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
11. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. Т. 1. М.: Мир, 1990.
12. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
13. *Thorpe J.A.* Curvature and the Petrov canonical forms // J. Math. Physics. 1969. V. 10, N 1. P. 1–7.

Поступила в редакцию 12 марта 2025 г.
После доработки 12 марта 2025 г.
Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru