

ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ

С. В. Асташкин, Е. М. Семенов, А. С. Усачев

Аннотация. Рассматриваются инвариантные подмножества некоторого семейства нелинейных операторов, действующих в множестве банаховых пределов. Приводятся условия совпадения оператора из этого семейства с тождественным. Получены новые свойства крайних точек множества банаховых пределов, свидетельствующие об их определенной взаимной независимости.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.503

Ключевые слова: банаховы пределы, крайние точки, функциональная характеристика, инвариантные подмножества.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

§ 1. Введение и предварительные сведения

Через ℓ_∞ обозначается пространство вещественных ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с обычной полуупорядоченностью и нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Линейный функционал B на ℓ_∞ называется *банаховым пределом*, если

- 1) $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для всех $x \geq 0$,
- 2) $B\mathbf{1} = 1$, где $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$,
- 3) $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига влево, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано Мазуром [1], а доказательство было опубликовано в книге Банаха [2, гл. II, § 2]. Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Легко видеть, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое (в слабой* топологии) выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^* . Множество крайних точек банаховых пределов обозначим через $\text{ext } \mathfrak{B}$.

Как следует из определения, все банаховы пределы совпадают со значением классического предела на пространстве сходящихся последовательностей.

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1791. Работа второго и третьего авторов поддержана Российским научным фондом, грант № 24-21-00220.

Лоренц показал, что таким свойством обладают не только сходящиеся последовательности. В работе [3] он доказал, что для заданных $x \in \ell_\infty$, $a \in \mathbb{N}$ равенство $Bx = a$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что последовательность x почти сходится к a , пространство таких последовательностей обозначается через ac . Подпространство всех последовательностей, почти сходящихся к нулю, обозначается через ac_0 .

Сачестон [4] доказал, что для заданного $x \in \ell_\infty$

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}\} = [q(x), p(x)],$$

где

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Функционалы p и q называются *верхним* и *нижним функционалами Сачестона*.

Хорошо известно, что ℓ_∞^* — AL -пространство. Ядро $N(T^* - I)$ оператора $T^* - I$ является пространством Рисса в ℓ_∞^* , а значит, само является AL -пространством и изометрически порядково изоморфно пространству $L_1(\Omega)$ для некоторого множества Ω с мерой μ [5, теорема 12.26]. Пусть $\Omega = \Omega_d \cup \Omega_c$ — такое разбиение множества Ω на измеримые подмножества, что мера μ в сужении на Ω_d дискретна, а на Ω_c — непрерывна. Тогда пространство $N(T^* - I)$ изометрически порядково изоморфно пространству $L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c)$.

Пространство $N(T^* - I)$ состоит из всех линейных функционалов на ℓ_∞ , которые инвариантны относительно оператора T , а значит, положительная часть его единичной сферы $S_{N(T^* - I)}^+$ в точности совпадает с множеством $\mathfrak{B}$. Таким образом, множество $\mathfrak{B}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_d \oplus \mathfrak{B}_c$. Множества $\mathfrak{B}_d$ и $\mathfrak{B}_c$ называются *дискретным* и *непрерывным* подмножествами $\mathfrak{B}$. Известно, что $\text{ext } \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_d$. Более того, множество $\mathfrak{B}_d$ совпадает с замыканием (в топологии нормы) выпуклой оболочки множества $\text{ext } \mathfrak{B}$ [6, с. 8, 9]. Множество $\mathfrak{B}_c$, в свою очередь, содержит множество банаховых пределов, инвариантных относительно оператора среднего арифметического [7, предложение 1.2]. За дополнительной информацией о банаховых пределах отсылаем к [8, 9].

Обозначим через $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ множество всех последовательностей из нулей и единиц. Всякая монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ порождает элемент $x = (x_1, x_2, \dots)$ из $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, где

$$x_i = \begin{cases} 1, & n_{2k-1} \leq i < n_{2k}, \\ 0, & n_{2k} \leq i < n_{2k+1}, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Обозначим через W множество всех последовательностей $\{x_i\}$ вида (1), для которых соответствующая последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = \infty$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Это множество было введено в [10]. Легко видеть, что условия $x \in W$ и $1 - x \in W$ эквивалентны.

§ 2. Основные результаты

Для фиксированного $z \in \ell_\infty$ рассмотрим множество $\{B \in \mathfrak{B} : Bz \neq 0\}$ и оператор

$$R_z : \{B \in \mathfrak{B} : Bz \neq 0\} \rightarrow \ell_\infty^*,$$

определенный по формуле

$$(R_z B)(x) = \frac{B(xz)}{B(z)}, \quad x \in \ell_\infty.$$

Отметим, что оператор R_z не является ни аддитивным, ни однородным.

Как показано в [10, теорема 25], для любых $z \in W$ и $B \in \mathfrak{B}$ таких, что $Bz \neq 0$, функционал $R_z B$ является банаховым пределом (см. также [11, с. 623, 624]). Покажем, что аналогичные результаты справедливы для множеств $\mathfrak{B}_d$ и $\mathfrak{B}_c$.

Теорема 1. Пусть $z \in W$. Для любого $B \in \mathfrak{B}_d$, $Bz \neq 0$, имеем $R_z B \in \mathfrak{B}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный функционал $B \in \mathfrak{B}_d$ можно записать в виде $B = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i$, где $B_i \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$. Из [12, теорема 5] следует, что $B(xz) = Bx \cdot Bz$ для любых $x \in \ell_\infty$, $z \in W$ и $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$. Получаем

$$(R_z B)(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i(xz)}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i(x) B_i(z)}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i B_i(x),$$

где $\mu_i = \frac{\lambda_i B_i(z)}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i(z)}$. Так как $z \geq 0$, то $B_i(z) \geq 0$ и $\mu_i \geq 0$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = 1. \text{ Следовательно, } R_z B \in \mathfrak{B}_d.$$

Для подмножества $\text{ext } \mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{B}_d$ справедлива более точная

Теорема 2. Пусть $z \in W$. Если $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $Bz \neq 0$, то $R_z B = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [12, теорема 5] следует, что $B(xz) = Bx \cdot Bz$ для любых $x \in \ell_\infty$, $z \in W$ и $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$. Следовательно,

$$(R_z B)(x) = \frac{B(xz)}{Bz} = \frac{Bx \cdot Bz}{Bz} = Bx$$

для любого $x \in \ell_\infty$. Таким образом, $R_z B = B$.

Каждый функционал $B \in \mathfrak{B}$ порождает функцию

$$\gamma(B, t) = B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^n, 2^{n+t})} \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где χ_E — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{N}$, в частности,

$$(\chi_{[2^n, 2^{n+t})})_k = \begin{cases} 1, & 2^n \leq k < 2^{n+t}, \\ 0, & 2^{n+t} \leq k < 2^{n+1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта функциональная характеристика была введена в [13]. Функциональные характеристики являются удобным инструментом для исследования подмножеств пространства ℓ_∞^* (см., например, [14, разд. 5.2]). Очевидно, что для любого $B \in \mathfrak{B}$ функция $\gamma(B, \cdot)$ не убывает на $[0, 1]$, $\gamma(B, 0) = 0$ и $\gamma(B, 1) = 1$.

Теорема 3. Пусть $z \in W$ и $B \in \mathfrak{B}$. Если функциональная характеристика $\gamma(B, \cdot)$ непрерывна, то непрерывна и функциональная характеристика $\gamma(R_z B, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\gamma(R_z B, t) = (R_z B) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^n, 2^{n+t})} \right) = \frac{B(z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^n, 2^{n+t})})}{B(z)}.$$

Для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ получаем

$$|\gamma(R_z B, t_2) - \gamma(R_z B, t_1)| = \frac{|B(z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^{n+t_1}, 2^{n+t_2})})|}{|B(z)|}.$$

Так как $0 \leq z \leq 1$ и B — положительный функционал, то

$$|\gamma(R_z B, t_2) - \gamma(R_z B, t_1)| \leq \frac{1}{|B(z)|} \cdot B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^{n+t_1}, 2^{n+t_2})} \right)$$

и, следовательно,

$$|\gamma(R_z B, t_2) - \gamma(R_z B, t_1)| \leq \frac{|\gamma(B, t_2) - \gamma(B, t_1)|}{|B(z)|}.$$

Утверждение следует теперь в силу непрерывности функции $\gamma(B, \cdot)$.

Так как $B \in \mathfrak{B}_c$ тогда и только тогда, когда функция $\gamma(B, \cdot)$ непрерывна [7, теорема 2.1], то справедливо

Следствие 4. Пусть $z \in W$. Для любого $B \in \mathfrak{B}_c$, $Bz \neq 0$, имеем $R_z B \in \mathfrak{B}_c$.

Предложение 5. Если $z \in W$ и $0 < \alpha < 1$, то оператор $\alpha R_z + (1 - \alpha)R_{1-z}$ совпадает с тождественным на множестве $\{B \in \mathfrak{B} : Bz = \alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $0 < \alpha < 1$, то числа Bz и $B(1 - z)$ отличны от нуля. Тогда

$$((\alpha R_z + (1 - \alpha)R_{1-z})B)(x) = \alpha \frac{B(xz)}{B(z)} + (1 - \alpha) \frac{B(x(1 - z))}{B(1 - z)}.$$

Так как $Bz = \alpha$, то

$$((\alpha R_z + (1 - \alpha)R_{1-z})B)(x) = B(xz) + B(x(1 - z)) = Bx$$

для любого $x \in \ell_{\infty}$.

Одно из полезных свойств множества W описывает

Предложение 6. Для любых $B \in \mathfrak{B}$ и $x_0 \in W \setminus a_{c_0}$ таких, что $Bx_0 > 0$, существует последовательность последовательностей $x_i \in W \setminus a_{c_0}$ таких, что $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} Bx_i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как x_0 принадлежит W , то он имеет вид

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[n_{2k-1}, n_{2k})}$$

для некоторой монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел n_k , удовлетворяющей условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = \infty$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Определим последовательности m_k и l_k , полагая $m_{2k-1} = n_{2k-1}$, $m_{2k} = \left\lfloor \frac{n_{2k} + n_{2k-1}}{2} \right\rfloor$, $l_{2k-1} = \left\lfloor \frac{n_{2k} + n_{2k-1}}{2} \right\rfloor$, $l_{2k} = n_{2k}$. Так как

$$m_{2k} - m_{2k-1} = \left\lfloor \frac{n_{2k} + n_{2k-1}}{2} \right\rfloor - n_{2k-1} \geq \frac{n_{2k} - n_{2k-1}}{2}$$

и

$$\begin{aligned} m_{2k+1} - m_{2k} &= n_{2k+1} - \left\lfloor \frac{n_{2k} + n_{2k-1}}{2} \right\rfloor \\ &\geq n_{2k+1} - n_{2k} + \frac{n_{2k} - n_{2k-1}}{2} + 1 \geq \frac{n_{2k+1} - n_{2k}}{2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m_{k+j} - m_k}{j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{i=k}^{k+j-1} (m_{i+1} - m_i) \\ &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \sum_{i=k}^{k+j-1} (n_{i+1} - n_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{2j} = \infty. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется и условие для последовательности l_k . Таким образом, последовательности

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[m_{2k-1}, m_{2k})} \text{ и } v = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[l_{2k-1}, l_{2k})}$$

принадлежат множеству W . Отметим, что $x_0 = u + v$. Обозначим через x_1 ту последовательность u или v , для которой $Bx_1 = \min\{Bu, Bv\}$. Тогда $Bx_1 \leq \frac{1}{2}(Bu + Bv) = \frac{1}{2}Bx_0$. По построению $p(x_1) \geq \frac{1}{2}p(x_0) > 0$, так как $x_0 \notin ac_0$. Таким образом, $x_1 \notin ac_0$.

Аналогичным образом по последовательности x_1 можно построить последовательность $x_2 \in W \setminus ac_0$ и т. д. Тогда $Bx_n \leq 2^{-n}Bx_0 \leq 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$, то последовательности x_i можно выбрать совпадающими и такими, что $Bx_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Действительно, в разложении $x_0 = u + v$ все три последовательности принадлежат множеству W . С другой стороны, Bu равно 0 или 1 для любых $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $y \in W$. Следовательно, либо $Bu = 0$, либо $Bv = 0$.

В [13, предложение 3] доказано, что для любого $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ существует такое $\delta(B) \in [0, 1]$, что

$$\gamma(B, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \delta(B), \\ 1, & \delta(B) < t \leq 1, \end{cases}$$

и $\gamma(B, \delta(B))$ равно 0 или 1. Следующие теоремы 7 и 8 описывают одно свойство независимости крайних точек.

Теорема 7. Пусть $m \in \mathbb{N}$, a_i равно 0 или 1, $B_i \in \text{ext } \mathfrak{B}$ для всех $1 \leq i \leq m$ и выполнено условие:

$$\text{если } a_i \neq a_j, \text{ то } \delta(B_i) \neq \delta(B_j) \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq m. \quad (2)$$

Существует такая последовательность $x \in W$, что $B_i x = a_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Случай $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ доказан в [10, следствие 14]. Случай $a_i = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ следует из предыдущего для последовательности $\mathbf{1} - x$.

Пусть набор $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ содержит ровно k единиц и $1 \leq k \leq m-1$. Перенумеровывая числа a_i и банаховы пределы B_i , без ограничения общности можем предполагать, что $a_i = 1$ для $1 \leq i \leq k$ и $a_i = 0$ для $k+1 \leq i \leq m$.

В силу предположения (2) существует $\delta > 0$ такое, что множества

$$\{\delta(B_1), \dots, \delta(B_k)\} \text{ и } \bigcup_{i=k+1}^m (\delta(B_i) - \delta, \delta(B_i) + \delta)$$

не пересекаются. Рассмотрим последовательность

$$x = \sum_{i=k+1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^{n+\delta(B_i)-\delta}, 2^{n+\delta(B_i)+\delta})}.$$

По построению $x \in W$ и $B_i x = a_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Очевидно, условие (2) выполнено, если все числа $\delta(B_i)$ различны. Условие (2) можно ослабить, если отбросить предположение $x \in W$.

Теорема 8. Пусть $m \in \mathbb{N}$, a_i равно 0 или 1 для всех $1 \leq i \leq m$. Для любых функционалов $B_i \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $1 \leq i \leq m$, удовлетворяющих условию $B_i|_W \neq B_j|_W$ для всех $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, существует такой $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, что $q(x) = 0$, $p(x) = 1$ и $B_i x = a_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ доказан в [10, следствие 14]. Случай $a_i = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ следует из предыдущего для последовательности $\mathbf{1} - x$.

Пусть набор $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ содержит ровно k единиц и $1 \leq k \leq m-1$. Перенумеровывая числа a_i и банаховы пределы B_i , без ограничения общности можем предполагать, что $a_i = 1$ для $1 \leq i \leq k$ и $a_i = 0$ для $k+1 \leq i \leq m$.

Если $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$, то Bu равно 0 или 1 для любого $u \in W$ [10, следствие 29]. Так как $B_i|_W \neq B_j|_W$ для всех $i \neq j$, то для любых $B_i, B_j \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $i \neq j$, найдется $x \in W$ такой, что $B_i x = 1$ и $B_j x = 0$. Тогда существуют $x_{ij} \in W$, $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$ такие, что $B_i x_{ij} = 1$ и $B_j x_{ij} = 0$ для любых $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$.

Так как $B_i x_{ij} = 0$, то $B_i(1 - x_{ij}) = 1$, $k+1 \leq j \leq m$. Следовательно,

$$0 \leq B_i \max\{1 - x_{ij} : k+1 \leq j \leq m\} \leq \sum_{j=k+1}^m B_i(1 - x_{ij}) = 0.$$

Полагая

$$x_i = \min\{x_{ij} : k+1 \leq j \leq m\} = 1 - \max\{1 - x_{ij} : k+1 \leq j \leq m\},$$

получаем $B_i x_i = 1$. С другой стороны, $0 \leq x_i \leq x_{ij}$ и $0 \leq B_j x_i \leq B_j x_{ij}$, $k+1 \leq j \leq m$. Следовательно, $B_j x_i = 0$, $k+1 \leq j \leq m$.

Положим теперь $x = \max\{x_i : 1 \leq i \leq k\}$. Так как $x \geq x_i$ для всех $1 \leq i \leq k$, то $1 \geq B_i x \geq B_i x_i$ и $B_i x = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$. С другой стороны, $x \leq \sum_{i=1}^m x_i$ и $0 \leq B_j x \leq \sum_{i=1}^m B_j x_i$, $k+1 \leq j \leq m$. Следовательно, $B_j x = 0$, $k+1 \leq j \leq m$. Так как существуют B_i и B_j такие, что $B_i x = 1$ и $B_j x = 0$, то $q(x) = \min_{B \in \mathfrak{B}} Bx = 0$, $p(x) = \max_{B \in \mathfrak{B}} Bx = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mazur S. O metodach sumowalności // Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement). 1929. P. 102–107.
2. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск: РХД, 2001.
3. Lorentz G. G. A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80. P. 167–190.
4. Sucheston L. Banach limits // Am. Math. Monthly. 1967. V. 74. P. 308–311.
5. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators. Orlando, FL: Acad. Press, 1985.
6. Алехно Е. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–35.
7. Avdeev N., Semenov E., Usachev A., Zvolinskii R. Decomposition of the set of Banach limits into discrete and continuous subsets // Ann. Funct. Anal. 2024. V. 15, N 81.
8. Das G., Nanda S. Banach limit and applications. Boca Raton, FL: CRC Press, 2022.
9. Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75, № 4. С. 153–194.
10. Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Геометрические свойства множества банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 177–204.
11. Alekhno E. Superposition operator on the space of sequences almost converging to zero // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10. P. 619–645.
12. Авдеев Н. Н., Семенов Е. М., Усачев А. С. Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 4. С. 32–48.
13. Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. мат. 2019. Т. 83, № 1. С. 140–167.
14. Alekhno E. On Banach–Mazur limits // Indag. Math. 2015. V. 26. P. 581–614.

Поступила в редакцию 21 июня 2025 г.

После доработки 21 июня 2025 г.

Принята к публикации 10 июля 2025 г.

Асташкин Сергей Владимирович (ORCID 0000-0002-8239-5661)
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва,
Московское шоссе, 34, Самара 443086;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey.
astash56@mail.ru

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394018
nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

Усачев Александр Сергеевич (ORCID 0000-0002-6645-676X)
Центральный южный университет, Чанша, Китай.
dr.alex.usachev@gmail.com