

УДК 519.83+517.988.38

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский,
С. Е. Жуковский

Аннотация. Исследуется вопрос о существовании равновесия по Нэшу в игре двух или более участников. Стратегиями каждого игрока являются элементы некомпактного метрического пространства. Рассматриваются неразделенные ограничения на стратегии, т. е. множество допустимых стратегий каждого участника может зависеть от набора стратегий остальных участников. Получены достаточные условия существования решения обобщенной задачи равновесия по Нэшу. Введены слабые решения этой задачи и исследованы их свойства.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.502

Ключевые слова: обобщенная задача равновесия по Нэшу, функция Никайдо — Исоды, минимизация с ограничениями, условия типа Каристи.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

Введение

Рассмотрим игру $N \geq 2$ игроков. Каждый игрок выбирает *стратегию* — элемент x_i из некоторого множества X_i , $i \in \overline{1, N}$, которая обеспечивает минимальное значение *целевой функции* этого игрока. Наряду с моделями игр, в которых X_i — это пространство $\mathbb{R}^{n_i}$ (см., например, обзор [1]), важное прикладное значение имеют модели, в которых пространства X_i бесконечномерны, в частности, различные дифференциальные игры (см., например, [2, 3]). При исследовании существования и свойств решений игр часто не используется специфика конечномерных евклидовых пространств, а достаточно, чтобы пространства X_i были метрическими или даже обобщенно метрическими, в которых функция расстояния может быть несимметричной и удовлетворять менее ограничительным условиям, чем «классическое» неравенство треугольника (см. [4, 5]). В известной авторам литературе не рассматривались игры в обобщенно метрических пространствах, а имеющиеся сведения об играх в некомпактных метрических пространствах фрагментарны. Перспективы исследования игр в пространствах с обобщенными метриками открывают недавние работы о топологических свойствах таких пространств, о включениях с отображениями таких пространств (см. [4, 5]) и о минимизации функций, определенных на этих пространствах (см. [6–8]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>.

© 2025 Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.

В данной работе рассматриваются метрические пространства X_i , $i \in \overline{1, N}$, причем их компактность априори не предполагается. Для исследования вопросов существования решения игр используются результаты об отображениях метрических пространств, в частности, условия [9] существования решений систем включений и условия [10–12] типа Каристи достижения функцией ее инфимума на некомпактном метрическом пространстве.

1. Обозначения

Пусть заданы метрические пространства (X_i, ρ_i) , $i \in \overline{1, N}$. Определим их произведение $X := \prod_{i \in \overline{1, N}} X_i$. Метрику ρ на X определим по формуле $\rho := \sum_{i \in \overline{1, N}} \rho_i$.

Для каждого номера i зададим произведение $X_{-i} := \prod_{j \in \overline{1, N}, j \neq i} X_j$. На X_{-i} определим метрику ρ_{-i} по формуле $\rho_{-i} := \sum_{j \in \overline{1, N}, j \neq i} \rho_j$. Элементы пространства

X_{-i} будем обозначать через $x_{-i} := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X_{-i}$.

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_N) \in X$ будем также использовать обозначение $x = (x_i, x_{-i}) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$. Важно отметить, что обозначение (x_i, x_{-i}) не означает, что компонента x_i переместилась на первое место, она так и осталась на исходном i -м месте. В такой записи эта координата x_i просто выделена.

Для каждого i -го игрока полагаем, что задана непрерывная целевая функция $\theta_i : X_i \times X_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$. Эта непрерывная функция θ_i зависит как от переменной x_i этого игрока, так и набора переменных x_{-i} его «противников».

Наличие ограничений на стратегии игроков может быть описано либо геометрическим заданием множества $\mathcal{X} \subset X$ допустимых наборов $x = (x_1, \dots, x_N)$ стратегий игроков, либо заданием множества $\mathcal{X}$ как множества решений систем ограничений (знак $\subset$ допускает равенство множеств). Множество $\mathcal{X}$ обычно определяется наличием неразделенных относительно переменных $(x_1, \dots, x_N)$ ограничений. Это отличает ограничение $\mathcal{X} \subset X$ от метрических пространств X_i , задающих разделенные ограничения на переменную x_i .

В разд. 2 рассмотрим игру, в которой множество $\mathcal{X}$ задано геометрически. В разд. 3 будет изучен случай задания множества $\mathcal{X}$ с помощью ограничений.

2. Обобщенная задача равновесия по Нэшу с геометрическими ограничениями

2.1. Определение и свойства решений обобщенной задачи равновесия по Нэшу. Пусть задано произвольное непустое замкнутое множество $\mathcal{X} \subset X$ наборов допустимых стратегий. При этом при отсутствии ограничений, естественно, принимаем $\mathcal{X} = X$.

Зафиксируем произвольный номер $i \in \overline{1, N}$. Поскольку множество $\mathcal{X}$ непусто, то непусто и подмножество

$$\text{Pr}_{-i} \mathcal{X} := \{x_{-i} \in X_{-i} \mid \exists x_i \in X_i : x = (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}\}$$

метрического пространства X_{-i} . Это подмножество само является метрическим пространством с метрикой, индуцированной метрикой ρ_{-i} .

На метрическом пространстве $\text{Pr}_{-i} \mathcal{X}$ определим многозначное отображение $\mathcal{X}_i$ следующим образом. Каждому $x_{-i} \in \text{Pr}_{-i} \mathcal{X}$ многозначное отображение $\mathcal{X}_i$ ставит в соответствие непустое замкнутое подмножество пространства

X_i , определяемое формулой

$$\mathcal{X}_i(x_{-i}) := \{x_i \in X_i : (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}\}. \quad (1)$$

Таким образом, при наличии геометрических ограничений i -й игрок стеснен в выборе стратегии x_i и имеет право выбирать ее только из множества $\mathcal{X}_i(x_{-i})$. При этом если множество $\mathcal{X}$ не является параллелепипедом, то множество допустимых стратегий i -го игрока x_i зависит от стратегий x_{-i} остальных игроков.

При заданных значениях x_{-i} переменных других игроков наибольший «выигрыш» i -й игрок получит, если его стратегия будет решением следующей задачи минимизации по переменной x_i :

$$\theta_i(x_i, x_{-i}) \rightarrow \min \text{ при ограничении } x_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}).$$

Для объяснения наилучшей стратегии i -го игрока для простоты будем считать, что геометрические ограничения $\mathcal{X}$ отсутствуют, т. е. $\mathcal{X} = X$, а метрические пространства X_i компактны. Тогда при каждом фиксированном x_{-i} минимум по $x_i \in X_i$ функции $\theta_i(\cdot, x_{-i})$ достигается в некоторой точке $q_i(x_{-i})$. Эта функция q_i называется *функцией наилучших ответов* i -го игрока.

Как известно, функция $\Theta_i(x_{-i}) := \min_{x_i \in X_i} \theta_i(x_i, x_{-i})$ непрерывна (см. лемму 4 ниже или [13, § 1.1.2; 14, § 17]). Для любой функции наилучших ответов q_i и при любом фиксированном x_{-i} справедливо тождество $\Theta_i(x_{-i}) \equiv \theta_i(q_i(x_{-i}), x_{-i})$. Из него получаем неравенство

$$\theta_i(q_i(x_{-i}), x_{-i}) \leq \underline{f}_i,$$

где

$$\underline{f}_i := \max_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{x_i \in X_i} \theta_i(x_i, x_{-i})$$

— *нижнее значение функции* θ_i . Оно существует в силу компактности множеств X_{-i} . Иными словами, при каждом i любая функция наилучших ответов i -го игрока q_i удовлетворяет неравенству для $\underline{f}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \in \mathcal{X}$, удовлетворяющий системе

$$\theta_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \min_{x_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^*)} \theta_i(x_i, x_{-i}^*), \quad i \in \overline{1, N}, \quad (2)$$

называют *решением обобщенной задачи равновесия по Нэшу* или кратко — *решением GNEP* (от общепринятого в литературе *Generalized Nash Equilibrium Problem*).

Для исследования вопроса существования решений GNEP построим вспомогательную задачу условной минимизации. Определим функцию $\Psi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ соотношением

$$\Psi(x, y) := \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i, x_{-i}) - \theta_i(y_i, x_{-i})), \quad x, y \in X, \quad (3)$$

где $y = (y_1, \dots, y_N)$.

В случае, когда $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \overline{1, N}$, функцию (3) называют *функцией Никайдо* — *Исоды* (см. [1, определение 3.1]). Она была определена в [15].

Определим функцию $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ соотношением

$$V(x) := \sup_{y \in X : y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}), i \in \overline{1, N}} \Psi(x, y), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (4)$$

Для нее очевидно тождество

$$V(x) \equiv \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i, x_{-i}) - \inf_{y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})} \theta_i(y_i, x_{-i})), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (5)$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *при любом $x \in \mathcal{X}$ имеют место неравенства*

$$\theta_i(x_i, x_{-i}) - \inf_{y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})} \theta_i(y_i, x_{-i}) \geq 0, \quad i \in \overline{1, N}, \quad (6)$$

и $V(x) \geq 0$;

(б) $x^* \in \mathcal{X}$ является решением системы (2) тогда и только тогда, когда $V(x^*) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (а). Зафиксируем вектор $x \in \mathcal{X}$ и номер $i \in \overline{1, N}$. Тогда $x = (x_i, x_{-i})$, где $x_i \in X_i$. Поэтому в силу (1) $x_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})$. Положим $y_i = x_i$. Тогда $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})$ и $\theta_i(x_i, x_{-i}) - \theta_i(y_i, x_{-i}) = 0$. В силу произвольности номера i справедливы неравенства (6). Складывая N неотрицательных слагаемых, получаем неравенство $V(x) \geq 0$.

Докажем утверждение (б). Пусть для $x^* \in \mathcal{X}$ выполнено $V(x^*) = 0$. Тогда согласно (4) для любого $y = (y_1, \dots, y_N) \in X$, которое удовлетворяет соотношениям $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^*)$ для всех i , имеем $\Psi(x^*, y) \leq 0$, т. е. имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i^*, x_{-i}^*) - \theta_i(y_i, x_{-i}^*)) \leq 0. \quad (7)$$

Зафиксируем произвольный номер $j \in \overline{1, N}$. Для него определим вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ следующим образом. При $i = j$ в качестве y_i возьмем произвольное $y_j \in \mathcal{X}_j(x_{-j}^*)$. При $i \neq j$ в качестве y_i возьмем $y_i = x_i^*$. Это возможно, поскольку $x_i^* \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^*)$ при всех i .

Для так определенного вектора y из неравенства (7) следует, что

$$\theta_j(x_j^*, x_{-j}^*) \leq \theta_j(y_j, x_{-j}^*) \quad \forall y_j \in \mathcal{X}_j(x_{-j}^*) \iff \theta_j(x_j^*, x_{-j}^*) = \min_{y_j \in \mathcal{X}_j(x_{-j}^*)} \theta_j(y_j, x_{-j}^*),$$

так как в (7) все слагаемые, кроме j -го, равны нулю. Отсюда в силу произвольности номера j вытекает, что x^* является решением задачи (2).

Докажем обратное утверждение. Пусть x^* — решение системы (2). Тогда согласно (2) при каждом $i \in \overline{1, N}$ для любого $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^*)$ выполнено $\theta_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq \theta_i(y_i, x_{-i}^*)$. Поэтому для любого $y \in X$ такого, что $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^*)$, $i \in \overline{1, N}$, имеем

$$\Psi(x^*, y) = \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i^*, x_{-i}^*) - \theta_i(y_i, x_{-i}^*)) \leq 0.$$

Следовательно, в силу (4) $V(x^*) \leq 0$. Отсюда и из (а) получаем $V(x^*) = 0$.

Лемма 1 позволяет свести обобщенную задачу равновесия по Нэшу к задаче определения точки минимума неотрицательной функции V .

Приведенное необходимое и достаточное условие для решения GNEP было сформулировано в [1, теорема 3.8]. Но там рассматривался случай конечномерных пространств $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \overline{1, N}$, и выпуклого множества $\mathcal{X}$. В отличие от этого в лемме 1 предполагается, что пространства X_i метрические, поэтому о выпуклости множества $\mathcal{X}$ здесь, конечно, речи нет.

2.2. Определение и свойства слабых решений обобщенной задачи равновесия по Нэшу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при некотором $\bar{x} \in \mathcal{X}$ наименьшее значение функции V на множестве $\mathcal{X}$ достигается, то $\bar{x}$ называют *слабым решением обобщенной задачи равновесия по Нэшу* (*слабым решением GNEP*).

В силу тождества (5) точка $\bar{x} = (\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \in \mathcal{X}$ является слабым решением GNEP тогда и только тогда, когда имеет место

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i, x_{-i}) - \inf_{y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})} \theta_i(y_i, x_{-i})) = \sum_{i=1}^N (\theta_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) - \inf_{y_i \in \mathcal{X}_i(\bar{x}_{-i})} \theta_i(y_i, \bar{x}_{-i})).$$

В силу леммы 1 всякое решение GNEP является и слабым решением GNEP. Обратное, естественно, неверно (см., например, [16, примеры 1.1, 3.7]).

Тем не менее слабое решение GNEP востребовано. Например, пусть для удобства все метрические пространства X_i компактны и $\mathcal{X} = X$. Тогда по теореме Вейерштрасса о достижении минимума непрерывной функции на компакте слабое решение GNEP существует всегда, хотя решение GNEP существует лишь при дополнительных предположениях.

Приведем еще один довод востребованности слабого решения GNEP. Пусть численно решается задача равновесия по Нэшу. Тогда в силу соображений корректности естественно предполагать, что все функции θ_i непрерывно зависят от параметра σ , который, например, определяет погрешности. Пусть при заданном значении параметра $\sigma = \sigma_0$ решение обобщенной задачи равновесия по Нэшу существует, а при σ , близких к σ_0 и не равных ему, у рассматриваемой задачи уже нет решений, а есть лишь слабое решение GNEP. Такая задача без неразделенных ограничений приведена, например, в [16]. Это вновь приводит к слабым решениям GNEP. И это является не единственной причиной интереса к слабым решениям GNEP (см. [16, пример 3.7]).

Пусть выполнены следующие условия вложения и гладкости: все компакты X_i вложены в конечномерные пространства $\mathbb{R}^{n_i}$, $\mathcal{X} = X$, а все функции θ_i определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^m$, где $m := n_1 + \dots + n_N$. Но тогда и функция V , определенная формулой

$$V(x) = \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i, x_{-i}) - \min_{y_i \in X_i} \theta_i(y_i, x_{-i})), \quad x = (x_i, x_{-i}), \quad (8)$$

задана на всем $\mathbb{R}^m$.

Пусть вначале $\bar{x} \in \text{int } X$ и точка $\bar{x}$ является решением (2) GNEP. Тогда в силу (2) имеет место

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0, \quad i \in \overline{1, N}. \quad (9)$$

При этом количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.

Пусть теперь точка $\bar{x} \in X$ является слабым решением GNEP, но не является решением (2) GNEP. Тогда равенства (9) могут нарушаться. Действительно,

пусть $N = 2$, $X_1 = X_2 = [-1, 1]$ и $\theta_1 = x_1x_2 + a(x_1) + b(x_2)$, $\theta_2 = -(x_1x_2 + a(x_1) + b(x_2))$. Здесь a и b — заданные на $\mathbb{R}$ гладкие функции, причем a вогнута, b выпукла и они удовлетворяют следующим условиям:

$$a(-1) = a(1), \quad a'(0) \neq 0, \quad |a'(x_1)| < 1 \quad \forall x_1 \in X_1,$$

$$b(-1) = b(1), \quad b'(0) \neq 0, \quad |b'(x_2)| < 1 \quad \forall x_2 \in X_2.$$

Тогда можно показать, что единственным слабым решением GNEP является точка $\bar{x} = 0$, хотя обе частные производные $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(0)$ и $\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}(0)$ в ней отличны от нуля. Значит, эта точка $\bar{x}$ не является решением GNEP.

Хотя в слабых решениях GNEP условия (9) могут нарушаться, тем не менее и при поиске слабых решений можно применять производную по направлению. Для формулировки соответствующих условий введем необходимые обозначения.

Зафиксируем номер $i \in \overline{1, N}$. Для каждого $x_{-i} \in X_{-i}$ через $Q_i(x_{-i})$ обозначим множество точек $x_i \in X_i$, в которых функция $\theta_i(y_i, x_{-i})$ достигает минимума по переменной $y_i \in X_i$. Иными словами, положим

$$Q_i(x_{-i}) := \{x_i \in X_i : \min_{y_i \in X_i} \theta_i(y_i, x_{-i}) = \theta_i(x_i, x_{-i})\}.$$

При любом фиксированном x_{-i} все множества $Q_i(x_{-i})$ компактны. Кроме того, в силу условия гладкости функции θ_i все функции минимума $\min_{y_i \in X_i} \theta_i(y_i, x_{-i})$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x_{-i} (см., например, [17, теорема 10.22]).

Лемма 2. Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^m$, а $\bar{x}$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^m$. Тогда производная по направлению ν функции V , определенной по формуле (8), в точке $\bar{x}$ существует и определяется формулой

$$\sum_{i=1}^N \left(\left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}), \nu \right\rangle - \min_{y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i})} \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle \right). \quad (10)$$

Поясним, что здесь

$$\left\langle \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{-1}}(y_1, \bar{x}_{-1}), \nu_{-1} \right\rangle = \sum_{j=2}^N \left\langle \frac{\partial \theta_1}{\partial x_j}(y_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N), \nu_j \right\rangle.$$

Аналогичное обозначение используется и для других номеров i . Кроме того, вектор ν_{-i} определяется из условия $\nu = (\nu_i, \nu_{-i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем номер i . В точке $\bar{x}$ производная по направлению ν_{-i} функции $\min_{y_i \in X_i} \theta_i(y_i, x_{-i})$ существует и по формуле Данскина она равна

$$\min_{y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i})} \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle$$

(см. [17, теорема 10.22]). Но производная по направлению суммы функций равна сумме производных по направлению. Кроме того, производная по направлению ν функции $\theta_i(x_i, x_{-i})$ в точке $\bar{x}$ равна $\left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}), \nu \right\rangle$. Суммируя по i , из полученных формул заключаем, что производная по направлению ν функции V в точке $\bar{x}$ существует и совпадает с (10). Лемма доказана.

Пусть заданы номер i и вектор $\nu_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Напомним, что вектор ν_i является касательным к множеству X_i в точке $\bar{x}_i \in X_i$ и пишут $\nu_i \in T_{\bar{x}_i}(X_i)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\bar{x}_i + t\nu_i + o(t) \in X_i$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$. Здесь $o(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$.

Множество всех векторов, касательных к множеству X в точке $\bar{x} \in X$, является замкнутым конусом. Если $\bar{x}_i \in \text{int } X_i$, то $T_{\bar{x}_i}(X_i) = \mathbb{R}^{n_i}$, т. е. в этом случае касательный конус совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^{n_i}$. В частности, если $\bar{x} \in \text{int } X$, то конус $T_{\bar{x}}(X)$ есть пространство $\mathbb{R}^m$. Эти свойства касательных векторов хорошо известны.

Лемма 3. Пусть для каждого номера $i \in \overline{1, N}$ имеет место $\nu_i \in T_{\bar{x}_i}(X_i)$. Тогда для $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ выполняется $\nu \in T_{\bar{x}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения вытекает из определений множеств $T_{\bar{x}_i}(X_i)$ и $T_{\bar{x}}(X)$.

Теорема 1. Пусть $\bar{x} \in X$ является слабым решением GNEP и выполнены все наложенные выше условия вложения и гладкости. Тогда для любого вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$, для которого $\nu_i \in T_{\bar{x}_i}(X_i) \forall i \in \overline{1, N}$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^N \left(\left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}), \nu \right\rangle - \min_{y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i})} \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle \right) \geq 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем ν из формулировки теоремы. По определению 2 функция V достигает минимума на множестве X в точке $\bar{x}$. Но, как известно, в точке, в которой функция V достигает своего минимума на множестве X , ее производная по любому направлению, являющемуся касательным к множеству X в этой точке, неотрицательна, а по лемме 3 вектор ν является касательным к множеству X в точке $\bar{x} \in X$. Отсюда по лемме 2 получаем требуемое.

Неравенства (11) являются необходимыми для того, чтобы при выполнении наложенных выше условий точка $\bar{x}$ была бы слабым решением GNEP.

Приведем важное следствие теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\bar{x} \in X$ является слабым решением GNEP и выполнены все наложенные выше условия вложения и гладкости. Пусть дополнительно $\bar{x} \in \text{int } X$. Тогда

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \in \text{conv} \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(Q_i(\bar{x}_{-i}), \bar{x}_{-i}) \right), \quad (12)$$

где, как обычно, conv — выпуклая оболочка множества.

Здесь $\pi_i : \mathbb{R}^{m-n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ при каждом $i \in \overline{1, N}$ — это линейный оператор, который каждому вектору $h_{-i} \in \mathbb{R}^{m-n_i}$ ставит в соответствие вектор $\pi_i h_{-i} = (0, h_{-i}) \in \mathbb{R}^m$. Иными словами,

$$\begin{aligned} & \pi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{-1}}(Q_1(\bar{x}_{-1}), \bar{x}_{-1}) \\ &= \left\{ \left(0, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}(y_1, \bar{x}_{-1}), \frac{\partial \theta_1}{\partial x_3}(y_1, \bar{x}_{-1}), \dots, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_N}(y_1, \bar{x}_{-1}) \right) : y_1 \in Q_1(\bar{x}_{-1}) \right\}. \end{aligned}$$

В этом равенстве нуль соответствует переменной x_1 . Аналогичное обозначение использовано и для других номеров i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательные обозначения. Положим

$$z := \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}), \quad W := \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(Q_i(\bar{x}_{-i}), \bar{x}_{-i}).$$

Из непрерывной дифференцируемости функций θ_i и компактности множеств $Q_i(\bar{x}_{-i})$ следует, что множество W компактно.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Предположим противное, т. е. что $z \notin \text{conv } W$. В конечномерном пространстве выпуклая оболочка компакта является компактом, значит, множество $\text{conv } W$ компактно. Поэтому по теореме о строгой отделимости точки от выпуклого компакта существует такой вектор $\nu \in \mathbb{R}^m$, что $\langle z, \nu \rangle < \langle w, \nu \rangle$ для любого $w \in \text{conv } W$.

Поскольку $W \subset \text{conv } W$, то также $\langle z, \nu \rangle < \langle w, \nu \rangle$ для любого $w \in W$. Последнее равносильно тому, что

$$\langle z, \nu \rangle < \left\langle \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu \right\rangle \quad \forall y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i}), \quad \forall i \in \overline{1, N}.$$

По определению линейного оператора π_i при всех $y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i})$ и $i \in \overline{1, N}$ имеет место равенство

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle.$$

Поэтому из доказанного выше неравенства вытекает, что

$$\langle z, \nu \rangle < \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle \quad \forall y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i}), \quad \forall i \in \overline{1, N}.$$

Следовательно,

$$\langle z, \nu \rangle < \sum_{i=1}^N \min_{y_i \in Q_i(\bar{x}_{-i})} \left\langle \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{-i}}(y_i, \bar{x}_{-i}), \nu_{-i} \right\rangle.$$

В силу определения вектора z последнее неравенство противоречит соотношению (11) теоремы 1. Полученное противоречие завершает доказательство.

Формула (12) дает соотношения на неизвестное $\bar{x}$. При этом количество соотношений совпадает с размерностью вектора $\bar{x}$. Если же каждое множество $Q_i(\bar{x}_{-i})$ состоит из единственной точки $\bar{y}_i(\bar{x}_{-i})$, то в (12) символ conv можно опустить.

Из теоремы 2 при $N = 2$ получаем

Следствие 1. Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и $N = 2$. Тогда

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\bar{x}) + \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(\bar{x}) \in \text{conv} \left\{ \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, Q_2(\bar{x}_1)), \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}(Q_1(\bar{x}_2), \bar{x}_2) \right\}.$$

Здесь левая часть включения — это $(n_1 + n_2)$ -мерный вектор, а правая часть включения — выпуклая оболочка множества, состоящего из $(n_1 + n_2)$ -мерных векторов. При этой записи операторы π_1 и π_2 уже не нужны.

Приведенное следствие вытекает непосредственно из (12) при $\bar{x}_1 = \bar{x}_{-2}$ и $\bar{x}_2 = \bar{x}_{-1}$.

Исследуем вопрос об устойчивости слабого решения GNEP к возмущениям функций θ_i и множества $\mathcal{X}$, которое уже не обязано совпадать с X . Пусть все X_i являются компактными пространствами, а Σ — метрическое пространство, элементы которого $\sigma \in \Sigma$ играют роль параметра. Пусть все функции θ_i зависят также от переменного σ , т. е. $\theta_i : X \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, причем они непрерывны.

Относительно множества $\mathcal{X}$ будем предполагать, что оно зависит от переменного σ , т. е. $\mathcal{X} : \Sigma \rightrightarrows X$ — многозначное отображение.

Дополнительно предположим, что справедливо представление

$$\mathcal{X}(\sigma) = Y_1(\sigma) \times \dots \times Y_N(\sigma), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Здесь $Y_i : \Sigma \rightrightarrows X_i$ — заданные непрерывные многозначные отображения. В частности, при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ множество $Y_i(\sigma)$ является непустым компактом в X_i и, значит, множество $\mathcal{X}(\sigma)$ компактно.

Возьмем произвольные $\sigma \in \Sigma$ и $i \in \overline{1, N}$. Из введенных предположений следует, что

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{-i} \mathcal{X}(\sigma) &:= \{x_{-i} \in X_{-i} \mid \exists x_i \in X_i \\ &\quad : x = (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}(\sigma) = Y_1(\sigma) \times \dots \times Y_N(\sigma)\} = \prod_{j \neq i} Y_j(\sigma). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathcal{X}_i(x_{-i}, \sigma) := \{x_i \in X_i : (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}(\sigma)\} = Y_i(\sigma). \quad (13)$$

Отметим, что $\mathcal{X}_i$ не зависят от x_{-i} явно, а зависят лишь от σ .

Определим функцию V по формуле

$$V(x, \sigma) := \sum_{i=1}^N (\theta_i(x_i, x_{-i}, \sigma) - \min_{y_i \in Y_i(\sigma)} \theta_i(y_i, x_{-i}, \sigma)), \quad \sigma \in \Sigma, x \in \mathcal{X}(\sigma).$$

Лемма 4. Функция V непрерывна по совокупности переменных $\sigma \in \Sigma$, $x \in \mathcal{X}(\sigma)$.

Для полноты изложения докажем эту лемму. Если пространство Σ банахово, то это утверждение известно (см., например, [13, § 1.1.2]).

Доказательство. Зафиксируем произвольный номер i и для удобства положим $Y_i = Y$, $\theta_i = \theta$, $x_{-i} = z$. Докажем непрерывность функции $(z, \sigma) \mapsto \min_{y \in Y(\sigma)} \theta(y, z, \sigma)$ в произвольной точке (z_0, σ_0) . Действительно, пусть $(z_j, \sigma_j) \rightarrow (z_0, \sigma_0)$ при $j \rightarrow \infty$. Надо доказать, что тогда

$$\min_{y \in Y(\sigma_j)} \theta(y, z_j, \sigma_j) \rightarrow \min_{y \in Y(\sigma_0)} \theta(y, z_0, \sigma_0) \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Положим $\theta_0 := \min_{y \in Y(\sigma_0)} \theta(y, z_0, \sigma_0)$. Пусть $y_j \in Y(\sigma_j)$ — какое-то решение задачи минимизации по переменной y на множестве $Y(\sigma_j)$, т. е. $\min_{y \in Y(\sigma_j)} \theta(y, z_j, \sigma_j) = \theta(y_j, z_j, \sigma_j)$. Требуется доказать, что θ_0 является единственной предельной точкой ограниченной числовой последовательности $\theta(y_j, z_j, \sigma_j)$.

Возьмем произвольную подпоследовательность y_{j_k} последовательности y_j , сходящуюся к некоторой точке $y_0 \in X_i$. В силу компактности множества X_i

такая подпоследовательность существует. Покажем, что $\theta(y_{j_k}, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) \rightarrow \theta_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Сначала докажем, что y_0 является минимумом в исходной задаче, т. е. $\theta_0 = \theta(y_0, z_0, \sigma_0)$. Во-первых, $y_0 \in Y(\sigma_0)$ в силу полунепрерывности сверху многозначного отображения $Y(\cdot)$. Во-вторых, возьмем произвольное $\tilde{y} \in Y(\sigma_0)$. Тогда в силу полунепрерывности снизу многозначного отображения $Y(\cdot)$ существует такая последовательность $\tilde{y}_k \rightarrow \tilde{y}$, что $\tilde{y}_k \in Y(\sigma_{j_k}) \forall k$. Поэтому $\theta(\tilde{y}_k, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) \geq \theta(y_{j_k}, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) \forall k$. Отсюда, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $\theta(\tilde{y}, z_0, \sigma_0) \geq \theta(y_0, z_0, \sigma_0)$. В силу произвольности выбора $\tilde{y}$ получаем, что $\theta_0 = \theta(y_0, z_0, \sigma_0)$.

Имеем

$$\min_{y \in Y(\sigma_{j_k})} \theta(y, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) = \theta(y_{j_k}, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) \rightarrow \theta(y_0, z_0, \sigma_0) = \theta_0$$

при $k \rightarrow \infty$. Здесь первое равенство вытекает из определения y_j , сходимость вытекает из того, что $y_j \rightarrow y_0$ при $j \rightarrow \infty$, а последнее равенство доказано выше.

Итак, доказано, что θ_0 — предельная точка последовательности $\theta(y_j, z_j, \sigma_j)$ и для произвольной сходящейся подпоследовательности y_{j_k} последовательности y_j имеет место $\theta(y_{j_k}, z_{j_k}, \sigma_{j_k}) \rightarrow \theta_0$ при $k \rightarrow \infty$. Докажем теперь, что θ_0 — это единственная предельная точка ограниченной последовательности $\theta(y_j, z_j, \sigma_j)$.

Предположим противное, т. е. существует предельная точка $\theta_1 \neq \theta_0$ ограниченной последовательности $\theta(y_j, z_j, \sigma_j)$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\theta(y_j, z_j, \sigma_j) \rightarrow \theta_1$ при $j \rightarrow \infty$. Еще раз переходя к подпоследовательности, будем считать, что y_{j_k} сходится к некоторой точке y при $k \rightarrow \infty$. Поэтому $\theta(y, z_0, \sigma_0) = \theta_1$. Но выше было доказано, что $\theta(y, z_0, \sigma_0) = \theta_0$. Полученное противоречие доказывает, что θ_0 — единственная предельная точка ограниченной последовательности $\theta(y_j, x_j, \sigma_j)$. Поэтому, как известно, эта последовательность сходится к θ_0 . Следовательно,

$$\min_{y \in Y(\sigma_j)} \theta(y, z_j, \sigma_j) \rightarrow \min_{y \in Y(\sigma_0)} \theta(y, z_0, \sigma_0) \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

В силу леммы 4 функция V непрерывна на множестве $\{(x, \sigma) : \sigma \in \Sigma, x \in \mathcal{X}(\sigma)\}$. Поэтому при любом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ минимум функции $V(x, \sigma)$ по переменной x по теореме Вейерштрасса существует.

При каждом фиксированном значении параметра σ рассмотрим игру с функциями $\theta_i(\cdot, \sigma)$, $i \in \overline{1, N}$, на множестве $\mathcal{X}(\sigma)$. Множество слабых решений GNEP для этой игры обозначим через $\overline{X}(\sigma)$. В силу равенства (13) и тождества (5) это множество совпадает с множеством минимумов функции $V(x, \sigma)$ по переменной $x \in \mathcal{X}(\sigma)$. А по лемме 4 и в силу компактности множества $\mathcal{X}(\sigma)$ множество минимумов функции $V(\cdot, \sigma)$ непусто.

Пусть задано начальное значение параметра $\bar{\sigma} \in \Sigma$. Покажем, что слабые решения GNEP при $\sigma = \bar{\sigma}$ устойчивы, т. е. что при σ , близких к $\bar{\sigma}$, множество $\overline{X}(\sigma)$ близко в некотором смысле к $\overline{X}(\bar{\sigma})$.

Теорема 3. При $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ и $x(\sigma) \in \overline{X}(\sigma)$ имеет место $x(\sigma) \rightarrow \overline{X}(\bar{\sigma})$. Иными словами, множество $\overline{X}(\bar{\sigma})$ устойчиво к возмущениям, т. е. для любого $r > 0$ существует такая окрестность $O = O(r)$ точки $\bar{\sigma}$, что

$$\text{dist}(x(\sigma), \overline{X}(\bar{\sigma})) < r \quad \forall \sigma \in O, \quad \forall x(\sigma) \in \overline{X}(\sigma),$$

где dist — расстояние от точки до множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $\sigma \in \Sigma$ по определению множество $\overline{X}(\sigma)$ совпадает с множеством точек минимума по $x \in \mathcal{X}(\sigma)$ непрерывной функции $V(x, \sigma)$. В частности, множество $\overline{X}(\overline{\sigma})$ совпадает с множеством точек минимума по $x \in \mathcal{X}(\sigma)$ функции $V(x, \overline{\sigma})$.

Предположим, что утверждение теоремы нарушается. Тогда, используя соображения компактности и непрерывность многозначного отображения $\mathcal{X}(\sigma)$, получаем, что существует последовательность $\{\sigma_i\} \subset \Sigma$ такая, что

$$\sigma_i \rightarrow \overline{\sigma}, \quad x(\sigma_i) \rightarrow \overline{x} \in \mathcal{X}(\overline{\sigma}), \quad x(\sigma_i) \in \overline{X}(\sigma_i) \text{ при } i \rightarrow \infty \text{ и } \overline{x} \notin \overline{X}(\overline{\sigma}).$$

Возьмем произвольную точку $x \in \mathcal{X}(\overline{\sigma})$. Поскольку многозначное отображение $\mathcal{X}$ непрерывно, существует последовательность $x_i \in \mathcal{X}(\sigma_i)$ такая, что $x_i \rightarrow x$ при $i \rightarrow \infty$. Имеем $V(x(\sigma_i), \sigma_i) \leq V(x_i, \sigma_i)$. Поэтому при $i \rightarrow \infty$ будет $V(\overline{x}, \overline{\sigma}) \leq V(x, \overline{\sigma})$. В силу произвольности x получаем $\overline{x} \in \overline{X}(\overline{\sigma})$; противоречие.

Далее везде снова считаем, что функции θ_i и множество $\mathcal{X}$ от переменной σ не зависят.

2.3. Условия существования решения обобщенной задачи равновесия по Нэшу. Займемся исследованием существования решения GNEP (не обязательно слабого). Для этого используем аналоги неравенства Каристи, предложенные в [10, 11]. Такой подход позволяет также исследовать существование и слабого решения GNEP. Вначале напомним некоторые необходимые определения (подробнее см. [11]).

Функция $U : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *полуниепрерывной снизу в точке* $\overline{x} \in X$, если имеет место

$$\liminf_{x^j \rightarrow \overline{x}} U(x^j) \geq U(\overline{x}) \quad \forall \{x^j\} : x^j \rightarrow \overline{x}.$$

Для точки $\overline{x}$ такой, что $U(\overline{x}) < +\infty$, это определение означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x , принадлежащих δ -окрестности точки $\overline{x} \in X$, выполнено неравенство $U(x) + \varepsilon \geq U(\overline{x})$. Если функция полуниепрерывна снизу во всех точках пространства, то ее называют *полуниепрерывной снизу*. Если функция $(-U)$ полуниепрерывна снизу, то функция U называется *полуниепрерывной сверху*.

Введем класс $\mathcal{K}$ возрастающих функций $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (т. е. если $\tau_2 > \tau_1 \geq 0$, то $k(\tau_2) \geq k(\tau_1)$) таких, что $k(\tau) > 0$ при всех $\tau > 0$, а функция $\tau \rightarrow 1/k(\tau)$ суммируема в некоторой окрестности нуля.

Пусть задана функция $U : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $U(x) \not\equiv +\infty$, которая ограничена снизу числом γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть существуют функция $k \in \mathcal{K}$ и число $M > \gamma$, для которых выполняется следующее условие: для любого $x \in X$ такого, что $\gamma < U(x) \leq M$, существует $x' \in X$, $x' \neq x$, удовлетворяющий неравенству

$$U(x') + k(U(x) - \gamma)\rho(x', x) \leq U(x). \quad (14)$$

Тогда говорят, что функция U удовлетворяет на X *обобщенному условию типа Каристи с константами* $\gamma < M \in \mathbb{R}$ и функцией $k \in \mathcal{K}$.

Ниже предполагается, что для каждого i отображение $\mathcal{X}_i$ секвенциально полуниепрерывно снизу. Последнее означает, что для любых $x_{-i} \in \text{Pr}_{-i} \mathcal{X}$, $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})$ и последовательности $\{x_{-i}^n\}_{n=1}^\infty \subset \text{Pr}_{-i} \mathcal{X}$, сходящейся к x_{-i} , существует последовательность $\{y_i^n\}_{n=1}^\infty$, для которой $y_i^n \in \mathcal{X}_i(x_{-i}^n) \forall n$ и $y_i^n \rightarrow y_i$, $n \rightarrow \infty$. Покажем, что тогда функция V полуниепрерывна снизу на множестве $\{x \in \mathcal{X} : V(x) < +\infty\}$.

Лемма 5. Пусть при каждом $i \in \overline{1, N}$ многозначное отображение $\mathcal{X}_i : \text{Pr}_{-i} \mathcal{X} \rightrightarrows X_i$ секвенциально полунепрерывно снизу. Тогда функция V полунепрерывна снизу в точках множества $\{x \in \mathcal{X} : V(x) < +\infty\}$.

Доказательство. Определим многозначное отображение $\Xi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ формулой

$$\Xi(x) := \prod_{i \in \overline{1, N}} \mathcal{X}_i(x_{-i}) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Из секвенциальной полунепрерывности снизу отображений $\mathcal{X}_i : \text{Pr}_{-i} \mathcal{X} \rightrightarrows X_i$ следует, что отображение Ξ также секвенциально полунепрерывно снизу.

Выберем произвольный элемент $\bar{x} \in \mathcal{X}$ такой, что значение $V(\bar{x})$ конечно, и покажем, что в этой точке функция V полунепрерывна снизу. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу того, что $V(\bar{x}) < +\infty$, и формулы (4) существует такое $\bar{y} \in \Xi(\bar{x})$, что

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}) \geq \sup_{z \in \Xi(\bar{x})} \Psi(\bar{x}, z) - \frac{\varepsilon}{2} = V(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вследствие непрерывности функции Ψ существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых $x, z \in X$, удовлетворяющих неравенствам $\rho(x, \bar{x}) < \delta_1$ и $\rho(z, \bar{y}) < \delta_1$, выполнено

$$|\Psi(x, z) - \Psi(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу секвенциальной полунепрерывности снизу многозначного отображения $\Xi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ в точке $\bar{x}$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при любом $x \in \mathcal{X}$, для которого $\rho(x, \bar{x}) < \delta_2$, найдется $y \in \Xi(x)$, для которого $\rho(y, \bar{y}) < \delta_1$.

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда, как показано выше, для любого $x \in \mathcal{X}$ такого, что $\rho(x, \bar{x}) < \delta$, существует $y \in \Xi(x)$, для которого $\rho(y, \bar{y}) < \delta_1$, и поэтому $|\Psi(x, y) - \Psi(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{4}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} V(x) &= \sup_{z \in \Xi(x)} \Psi(x, z) \geq \Psi(x, y) \geq \Psi(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{4} \\ &\geq \sup_{z \in \Xi(\bar{x})} \Psi(\bar{x}, z) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = V(\bar{x}) - \frac{3}{4}\varepsilon > V(\bar{x}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказано, что функция V полунепрерывна снизу в любой точке $\bar{x} \in X$, в которой $V(\bar{x}) < +\infty$. Лемма доказана.

В связи с леммой 5 зададимся вопросом: когда многозначные отображения $\mathcal{X}_i$, определенные формулой (1), будут секвенциально полунепрерывны снизу? Приведем для этого некоторые условия. Первое условие состоит в том, что геометрические ограничения отсутствуют, т. е. $\mathcal{X} = X$. Тогда каждое многозначное отображение $\mathcal{X}_i$ постоянно и $\mathcal{X}_i(x_{-i}) \equiv X_i$. В этом случае многозначное отображение $\mathcal{X}_i$ непрерывно и, значит, оно полунепрерывно снизу.

Пусть теперь для определенности $N = 2$, т. е. рассматривается игра двух игроков. При этом для удобства $X_1 = \mathbb{R}^{n_1}$ и $X_2 = \mathbb{R}^{n_2}$ — вещественные конечномерные пространства размерностей n_1, n_2 . При этом $x = (x_1, x_2)$. Множество $\mathcal{X}$ имеет вид $\mathcal{X} = \{x : f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\}$, где заданные функции f и g удовлетворяют следующим свойствам.

Обе функции f, g непрерывны, и $f(\bar{x}) \leq 0, g(\bar{x}) \geq 0$ хотя бы для одного $\bar{x}$. Кроме того, в точках $x \in \mathcal{X}$, в которых $f(x) = 0$, функция f непрерывно дифференцируема, а также $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \neq 0$. Аналогично в точках $x \in \mathcal{X}$,

в которых $g(x) = 0$, функция g непрерывно дифференцируема и $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \neq 0$. Наконец, для всех $x \in \mathcal{X}$ имеет место $g(x) > f(x)$.

Из предположения о существовании вектора $\bar{x}$ вытекает, что множество $\mathcal{X}$ непусто. Покажем, что в этом случае многозначные отображения $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ секвенциально полунепрерывны снизу. Начнем с $\mathcal{X}_1$. Исследуем его в любой заданной точке x_2 . Возьмем произвольную последовательность x_2^j , сходящуюся к x_2 . Включение $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется точка x_1 , для которой $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$, где, как обычно, $x = (x_1, x_2)$. Если при этом $f(x) < 0$, $g(x) > 0$, то, как несложно видеть, в силу непрерывности функций f и g при больших j имеет место $(x_1, x_2^j) \in \mathcal{X}$.

Пусть $f(x) = 0$. Тогда по предположению $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Поэтому по теореме о неявной функции при всех больших j существуют точки x_1^j такие, что $f(x_1^j, x_2^j) = 0$. Кроме того, поскольку $f(x) = 0$, то $g(x) > 0$ по предположению и, значит, $g(x_1^j, x_2^j) > 0$ при всех больших j по непрерывности g .

Пусть теперь $g(x) = 0$. Применяя аналогичные рассуждения и используя то, что $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \neq 0$ и $f(x) < 0$, получаем существование сходящейся к x_1 последовательности x_1^j , для которой $f(x_1^j, x_2^j) < 0$ и $g(x_1^j, x_2^j) = 0$ при всех больших j .

Итак, показано существование сходящейся к x_1 последовательности x_1^j такой, что $(x_1^j, x_2^j) \in \mathcal{X}$ для всех больших j . Значит, многозначное отображение $\mathcal{X}_1$ полунепрерывно снизу в точке x_2 . Многозначное отображение $\mathcal{X}_2$ изучается аналогично. При этом используется то, что $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \neq 0$ на нулях функции f и $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \neq 0$ на нулях функции g .

Приведем простой пример, показывающий, что отображения $\mathcal{X}_i$ не обязаны быть секвенциально полунепрерывными снизу, и тем самым предположения леммы 5 нарушаются.

ПРИМЕР 1. Пусть $X_1 = X_2 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, а $\mathcal{X}$ — объединение двух отрезков, т. е. $\mathcal{X} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$ и, значит, множество $\mathcal{X}$ замкнуто, но невыпукло. Легко проверяется, что при $x_1 = x_2$ имеет место

$$\mathcal{X}_2(x_1) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } x_1 < 1, \\ [0, 1], & \text{если } x_1 = 1. \end{cases}$$

Тогда многозначное отображение $\mathcal{X}_2$ не является секвенциально полунепрерывным снизу в точке $x_1 = 1$.

Даже в предположении выпуклости и конечномерности замкнутого множества $\mathcal{X}$ многозначное отображение $\mathcal{X}_i$ может не быть секвенциально полунепрерывным снизу в некоторой точке. Пусть, например, $N = 3$, $X_i = \mathbb{R}$, а множество $\mathcal{X}$ — это выпуклая коническая оболочка окружности $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$, лежащей на плоскости $x_3 = 1$. Точнее, в $\mathbb{R}^3$ множество $\mathcal{X}$ имеет вид $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1 - x_3)^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \geq 0\}$. Тогда, как известно, многозначное отображение $\mathcal{X}_3$ не является секвенциально полунепрерывным снизу в нуле.

Далее, используя результаты [11], получим следующий признак существования положения равновесия по Нэшу.

Будем предполагать, что существует набор стратегий $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}$, который удовлетворяет следующему свойству. Каждый i -й игрок не может сделать значение своего функционала $\theta_i(y_i, x_{-i})$ сколь угодно малым за счет выбора своей стратегии $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})$. Иными словами,

$$\forall i \text{ функция } \theta_i(\cdot, x_{-i}) \text{ ограничена снизу на } \mathcal{X}_i(x_{-i}). \quad (15)$$

Этот же набор $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяет условию $V(x) < +\infty$.

Теорема 4. Пусть метрическое пространство (X, ρ) полно и для всех $i \in \overline{1, N}$ многозначные отображения $\mathcal{X}_i$ секвенциально полунепрерывны снизу при каждом $x \in \mathcal{X}$, при котором выполняется (15). Пусть также определенная на $\mathcal{X}$ по формуле (4) функция V удовлетворяет на $\mathcal{X}$ обобщенному условию типа Каристи с константами $\gamma < M$ и функцией $k \in \mathcal{K}$. Тогда для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ такого, что $V(x_0) \leq M$, существует слабое решение GNEP $x^* \in \mathcal{X}$, для которого имеет место

$$\rho(x_0, x^*) \leq \int_0^{V(x_0)} \frac{dt}{k(t)}, \quad V(x^*) = \gamma. \quad (16)$$

Кроме того, если $\gamma = 0$, то точка $x^* \in \mathcal{X}$ является решением системы (2), т. е. решением GNEP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\mathcal{X}$ является метрическим пространством с индуцированной метрикой ρ . Пространство $(\mathcal{X}, \rho)$ полно. В силу (15) функция V является собственной. Из условия теоремы 4 и по лемме 5 функция V полунепрерывна снизу на множестве $\{x \in \mathcal{X} : V(x) < +\infty\}$. Поэтому в силу условия теоремы 4 для функции V выполнены все предположения теоремы 2 из [11]. В силу этой теоремы для любого $x_0 \in \mathcal{X}$, для которого $V(x_0) \leq M$, существует удовлетворяющая неравенству (16) точка $x^* \in \mathcal{X}$ минимума функции V , причем минимальное значение равно $V(x^*) = \gamma$. Эта точка согласно определению 2 является слабым решением GNEP. В частном случае, когда $\gamma = 0$, по лемме 1 точка x^* является решением GNEP.

Следствие 2. Если в теореме 4 в обобщенном условии типа Каристи функция k постоянна, $k(\tau) \equiv \kappa > 0$, то точка x^* удовлетворяет неравенству

$$\rho(x_0, x^*) \leq \frac{1}{\kappa} V(x_0).$$

В теореме 4 в отличие от [1, теорема 4.1] для существования решения GNEP не предполагается ни конечномерность пространств X_i , ни компактность, ни выпуклость множеств $\mathcal{X}_i(x_{-i})$, ни квазивыпуклость функций $\theta_i(\cdot, x_{-i})$, $i \in \overline{1, N}$.

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 4.

ПРИМЕР 2. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$. На произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ зададим метрику формулой $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, где $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Рассмотрим игру с двумя участниками, целевые функции которых $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определены соотношениями

$$\theta_1(x_1, x_2) := |x_1 - 1|, \quad \theta_2(x_1, x_2) := |x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Множество $\mathcal{X}$ — это полуплоскость, определяемая по формуле

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 + x_2 \leq 0\}.$$

Заметим, что множество $\mathcal{X}$ замкнуто, но не компактно. Поэтому к рассматриваемой здесь GNEP теорема 4.1 из [1] неприменима.

В силу (1) имеем

$$\mathcal{X}_1(x_2) = \{x_1 \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 \leq 0\} = (-\infty, -x_2].$$

Аналогично $\mathcal{X}_2(x_1) = (-\infty, -x_1]$. Таким образом, рассматриваемую здесь игру можно записать в виде задачи

$$\begin{cases} |x_1 - 1| \rightarrow \min & \text{при ограничении } x_1 \in (-\infty, -x_2], \\ |x_2| \rightarrow \min & \text{при ограничении } x_2 \in (-\infty, -x_1]. \end{cases} \quad (17)$$

Решая эту задачу, несложно получаем, что система (2) для рассматриваемой игры принимает вид

$$|x_1^* - 1| = \max\{0, x_2^* + 1\}, \quad |x_2^*| = \max\{0, x_1^*\}.$$

Решая полученную систему относительно неизвестных (x_1^*, x_2^*) , несложно получаем, что решения GNEP — это все точки множества $\{x^* \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1^* + x_2^* = 0, 0 \leq x_1^* \leq 1\}$. Иными словами, это точки, имеющие вид $(\xi, -\xi)$, $\xi \in [0, 1]$. Тогда $\theta_1(\xi, -\xi) \equiv 1 - \xi$, $\theta_2(-\xi, \xi) \equiv \xi$, $\theta_1(\xi, -\xi) + \theta_2(-\xi, \xi) \equiv 1$.

Проверим для задачи (17) условия теоремы 4. Функция Никайдо — Исоды в задаче (17) определяется формулой

$$\Psi(x, y) = |x_1 - 1| + |x_2| - |y_1 - 1| - |y_2|, \quad x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Функция Ψ может быть записана в виде

$$\Psi(x, y) = (\theta_1 + \theta_2)(x_1, x_2) - (\theta_1 + \theta_2)(y_1, y_2),$$

где, как легко видеть, функция $(\theta_1 + \theta_2)$ принимает вид $(\theta_1 + \theta_2)(x) = |x_1 - 1| + |x_2|$.

Для определения функции $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ заметим, что для любых точек $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ и $y = (y_1, y_2) \in X$ включение $y_1 \in \mathcal{X}_1(x_2)$ равносильно неравенству $y_1 \leq -x_2$, а включение $y_2 \in \mathcal{X}_2(x_1)$ равносильно неравенству $y_2 \leq -x_1$. Значит, в формуле (4) для $V(x)$ супремум по y берется по множеству

$$\mathcal{Y}(x) := \{y \in X : y_1 \leq -x_2, y_2 \leq -x_1\}.$$

При этом функция V имеет вид

$$V(x) = |x_1 - 1| + |x_2| - \sup_{y \in \mathcal{Y}(x)} (|y_1 - 1| + |y_2|).$$

Рассмотрим четыре множества

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{x \in \mathcal{X} : x_1 < 0, x_2 \geq -1\}, & \Omega_2 &:= \{x \in \mathcal{X} : x_1 \geq 0, x_2 < -1\}, \\ \Omega_3 &:= \{x \in \mathcal{X} : x_1 < 0, x_2 < -1\}, & \Omega_4 &:= \{x \in \mathcal{X} : x_1 \geq 0, x_2 \geq -1\}. \end{aligned}$$

Пусть вначале $x \in \Omega_1$. Тогда функция $(\theta_1 + \theta_2)(y_1, y_2) = |y_1 - 1| + |y_2|$ достигает на множестве $\mathcal{Y}(x)$ наименьшее значение при $y_1 = -x_2$, $y_2 = 0$. Следовательно, в этом случае имеем $V(x) = |x_1 - 1| + |x_2| - |x_2 + 1| = 1 - x_1 + |x_2| - x_2 - 1 = -x_1 + |x_2| - x_2 \geq -x_1 > 0$.

Пусть теперь $x \in \Omega_2$. Тогда функция $(\theta_1 + \theta_2)(y_1, y_2)$ достигает на множестве $\mathcal{Y}(x)$ наименьшее значение при $y_1 = 1$, $y_2 = -x_1$. Следовательно, в этом случае $V(x) = |x_1 - 1| + |x_2| - |x_1| = |x_1 - 1| - x_2 - x_1 > |x_1 - 1| + 1 - x_1 \geq 0$.

Пусть $x \in \Omega_3$. Тогда эта функция достигает на $\mathcal{Y}(x)$ наименьшее значение при $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Следовательно, в этом случае $V(x) = |x_1 - 1| + |x_2| = 1 - x_1 - x_2 > 2$.

Наконец, при $x \in \Omega_4$ эта функция достигает на $\mathcal{Y}(x)$ наименьшее значение при $y_1 = -x_2$, $y_2 = -x_1$. Следовательно, в этом случае $V(x) = |x_1 - 1| + |x_2| - |x_2 + 1| - |x_1| = -2(x_1 + x_2) \geq 0$. Здесь последнее равенство и неравенство вытекают из того, что $x \in \mathcal{X}$ и, значит, $x_2 \leq -x_1 \leq 0$ и $x_1 \leq -x_2 \leq 1$.

Итак,

$$V(x) = \begin{cases} -x_1 + |x_2| - x_2, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ |x_1 - 1| - x_2 - x_1, & \text{если } x \in \Omega_2, \\ 1 - x_1 - x_2, & \text{если } x \in \Omega_3, \\ -2(x_1 + x_2), & \text{если } x \in \Omega_4. \end{cases}$$

Функция $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и в силу доказанного выше неотрицательна. Покажем, что функция V удовлетворяет обобщенному условию Каристи с $\gamma = 0$, любым $M > 0$ и постоянной функцией $k(\tau) \equiv 1/2$. Иными словами, покажем, что выполнено следующее соотношение:

$$\forall x \in \mathcal{X} : V(x) > 0 \exists x' \in \mathcal{X} : V(x) - V(x') \geq \frac{1}{2}\rho(x, x'), \quad (18)$$

которое равносильно (14) в случае, когда $\gamma = 0$, $M > 0$ и $k(\tau) \equiv 1/2$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$. Приведем способ определения по x такой точки $x' = (x'_1, x'_2) \in \mathcal{X}$, что при некотором $\delta > 0$ выполнены неравенства

$$V(x) - V(x') \geq \delta, \quad \rho(x, x') \leq 2\delta, \quad (19)$$

из которых прямо следует соотношение (18).

Пусть вначале $x \in \Omega_1$. Тогда $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 0$. Если при этом $x_1 + x_2 = 0$, то $x_2 > 0$, $x = (-x_2, x_2)$ и существует такое $\delta > 0$, что $x_2 - \delta > 0$. Положим $x' = (-(x_2 - \delta), x_2 - \delta)$. Тогда $x' \in \Omega_1$, так как $x'_1 + x'_2 = 0$ и $x'_2 > 0$. Имеем также $\rho(x, x') = 2\delta$ и $V(x') = -x'_1 + |x'_2| - x'_2 = -x'_1 = x'_2 = x_2 - \delta$. Аналогично $V(x) = x_2$ и, значит, оба неравенства (19) выполнены.

Пусть $x \in \Omega_1$ и $x_1 + x_2 < 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $x_1 + x_2 + \delta < 0$ и $x_1 + \delta < 0$. Положим $x' = (x_1 + \delta, x_2)$. Значит, $\rho(x, x') = \delta$. В силу полученных на $\delta > 0$ неравенств имеет место $x' \in \Omega_1$. Поэтому $V(x') = -x_1 - \delta + |x_2| - x_2$. А так как $V(x) = -x_1 + |x_2| - x_2$, неравенства (19) снова выполнены.

Пусть теперь $x \in \Omega_2$. Тогда $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 0$. Если при этом $x_1 + x_2 = 0$, то положим $x' = (-(x_2 + \delta), x_2 + \delta)$, где $\delta > 0$ выбрано так, что $x_2 + \delta < -1$. Тогда $x' \in \Omega_2$. Имеем также $\rho(x, x') = 2\delta$ и $V(x') = |x'_1 - 1| - (x'_2 + x'_1) = x'_1 - 1 = -(x_2 + \delta) - 1$. Аналогично $V(x) = -x_2 - 1$. Значит, неравенства (19) выполнены.

Пусть $x \in \Omega_2$ и $x_1 + x_2 < 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $x_1 + x_2 + \delta \leq 0$ и $x_2 + \delta < -1$. Положим $x' = (x_1, x_2 + \delta)$. Тогда $\rho(x, x') = \delta$. В силу выбора $\delta > 0$ имеет место $x' \in \Omega_2$. Поэтому $V(x') = |x_1 - 1| - (x_2 + \delta) - x_1$. А так как $V(x) = |x_1 - 1| - x_2 - x_1$, неравенства (19) выполнены.

Пусть теперь $x \in \Omega_3$. Так как множество $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^2$ открыто, то существует такое $\delta > 0$, что $x' = (x_1 + \delta, x_2 + \delta) \in \Omega_3$. Для таких точек $x' \in \Omega_3$ выполнено $\rho(x, x') = 2\delta$, $V(x') = 1 - (x_1 + \delta) - (x_2 + \delta)$. А поскольку $V(x) = 1 - x_1 - x_2$, неравенства (19) выполнены.

Наконец, пусть $x \in \Omega_4$. Тогда $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 0$. Если при этом $x_1 + x_2 = 0$, то $V(x) = 0$. Если же $x_1 + x_2 < 0$, то существует такое $\delta > 0$, что $x' = (x_1 + \delta, x_2 + \delta) \in \Omega_4$. Следовательно, $\rho(x, x') = 2\delta$ и $V(x') = -2(x_1 + \delta + x_2 + \delta)$. А поскольку $V(x) = -2(x_1 + x_2)$, неравенства (19) выполнены.

Итак, доказано, что функция $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет обобщенному условию Каристи с $\gamma = 0$, любым $M > 0$ и функцией $k(\tau) \equiv 1/2$. Поэтому по теореме 4 и следствию 2 к ней в задаче (17) для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ существует решение GNEP $x^* \in \mathcal{X}$, удовлетворяющее неравенству

$$\rho(x_0, x^*) \leq 2V(x_0).$$

Отметим, что это неравенство нельзя улучшить. Действительно, если выбрать $x_0 = (2, -2) \in \mathcal{X}$, то, поскольку $x_0 \in \Omega_2$, имеем $V(x_0) = |x_{01} - 1| - x_{02} - x_{01} = 1$, а расстояние от этой точки до ближайшего к ней решения GNEP $x^* = (1, -1)$ будет равно $\rho(x_0, x^*) = 2 = 2V(x_0)$. Более того, так же несложно проверяется, что для любой точки x_0 , принадлежащей границе множества $\mathcal{X}$ и

не являющейся решением GNEP, ближайшее решение GNEP x^* удовлетворяет этому же соотношению $\rho(x_0, x^*) = 2V(x_0)$.

2.4. О взаимосвязи решений GNEP и седловых точек. Применим полученные результаты к задаче о седловых точках. Пусть, как и выше, заданы метрические пространства (X_i, ρ_i) , $i \in \{1, 2\}$, и на их произведении $X := X_1 \times X_2$ метрика ρ определена по формуле $\rho := \rho_1 + \rho_2$. Пусть, кроме того, заданы непустое замкнутое множество $\mathcal{X} \subset X$ и ограниченная на $\mathcal{X}$ непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Положим

$$\text{Pr}_1 \mathcal{X} := \{x_1 \in X_1 \mid \exists x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\},$$

$$\text{Pr}_2 \mathcal{X} := \{x_2 \in X_2 \mid \exists x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}.$$

Кроме того, как и выше, зададим многозначные отображения $\mathcal{X}_1 : \text{Pr}_2 \mathcal{X} \rightrightarrows X_1$, $\mathcal{X}_2 : \text{Pr}_1 \mathcal{X} \rightrightarrows X_2$ по формулам

$$\mathcal{X}_1(x_2) := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}, \quad \mathcal{X}_2(x_1) := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}.$$

Далее для $x_1 \in \text{Pr}_1 \mathcal{X}$ и $x_2 \in \text{Pr}_2 \mathcal{X}$ положим

$$\varphi_1(x_1) := \sup_{y_2 \in \mathcal{X}_2(x_1)} f(x_1, y_2), \quad \varphi_2(x_2) := \inf_{y_1 \in \mathcal{X}_1(x_2)} f(y_1, x_2).$$

Определим для функции f ее верхнее значение $\bar{f}$ относительно $\mathcal{X}$ и нижнее значение $\underline{f}$ относительно $\mathcal{X}$ по формулам

$$\bar{f} := \inf_{x_1 \in \text{Pr}_1 \mathcal{X}} \left(\sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1)} f(x_1, x_2) \right), \quad \underline{f} := \sup_{x_2 \in \text{Pr}_2 \mathcal{X}} \left(\inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1(x_2)} f(x_1, x_2) \right).$$

Тогда, очевидно,

$$\bar{f} = \inf_{x_1 \in \text{Pr}_1 \mathcal{X}} \varphi_1(x_1), \quad \underline{f} = \sup_{x_2 \in \text{Pr}_2 \mathcal{X}} \varphi_2(x_2).$$

Хорошо известно (см., например, [18, с. 10] или [16]), что если геометрические ограничения $\mathcal{X}$ отсутствуют, т. е. $\mathcal{X} = X_1 \times X_2$, то верхнее значение функции f больше либо равно ее нижнему значению, т. е. имеет место неравенство $\bar{f} \geq \underline{f}$. Однако если $\mathcal{X}$ является замкнутым собственным подмножеством $X_1 \times X_2$, то это неравенство может нарушаться. Проиллюстрируем сказанное простым примером.

ПРИМЕР 3. Пусть $X_1 := [-1, 1]$, $X_2 := [0, 1]$, $f(x_1, x_2) := x_1^2$. В качестве $\mathcal{X}$ рассмотрим множество, состоящее из трех точек $\mathcal{X} := \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1)\}$. Прямым вычислением проверяется, что $\text{Pr}_1 \mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}$, $\text{Pr}_2 \mathcal{X} = \{0, 1\}$, а многозначные отображения $\mathcal{X}_i$ определяются формулами

$$\mathcal{X}_1(0) = \{-1, 1\}, \quad \mathcal{X}_1(1) = \{0\}, \quad \mathcal{X}_2(-1) = \{0\}, \quad \mathcal{X}_2(0) = \{1\}, \quad \mathcal{X}_2(1) = \{0\}.$$

При этом $\varphi_1(x_1) = x_1^2$, $\varphi_2(0) = 1$ и $\varphi_2(1) = 0$. Но тогда $\bar{f} = 0$ и $\underline{f} = 1$ и, значит, $\bar{f} < \underline{f}$. Здесь дело в том, что $\mathcal{X}$ не является декартовым произведением пространств X_1 и X_2 .

Напомним, что точка $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{X}$ называется *седловой точкой функции f* (относительно множества $\mathcal{X}$), если

$$\inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1(x_2^*)} f(x_1, x_2^*) = f(x_1^*, x_2^*) = \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1^*)} f(x_1^*, x_2).$$

В примере 3 все точки множества $\mathcal{X} = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ являются седловыми.

В [16, лемма 3.5] получены следующие условия единственности. Пусть x^* является седловой точкой функции f , причем минимум функции $f(\cdot, x_2^*)$ достигается в единственной точке x_1^* , а максимум функции $f(x_1^*, \cdot)$ достигается в единственной точке x_2^* . Тогда x^* является единственной седловой точкой функции f .

Для решения GNEP аналогичное утверждение уже неверно. Это видно из следующего простого примера. Действительно, пусть $N = 2$, $X_1 = X_2 = [-1, 1]$, $\theta_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$, $\theta_2(x_1, x_2) = (2x_1^2 - x_2)^2$. Непосредственно проверяется, что у этой игры есть два решения GNEP $(0, 0)$ и $(1/2, 1/2)$. При этом функции $\theta_1(\cdot, 0)$ и $\theta_2(0, \cdot)$ достигают минимумов по переменным x_1 и x_2 соответственно только в нуле. Отметим, что аналогично функции $\theta_1(\cdot, 1/2)$ и $\theta_2(1/2, \cdot)$ достигают минимумов по переменным x_1 и x_2 соответственно только в точке $1/2$.

Этот пример можно модифицировать так, чтобы в нем было n различных решений GNEP. Для этого в качестве функции θ_2 достаточно взять функцию $\theta_2(x_1, x_2) = (g(x_1) - x_2)^2$, где g — несложно специально подобранная гладкая функция. При этом количество решений GNEP будет совпадать с количеством решений уравнения $g(x_2) = x_2$ относительно неизвестного $x_2 \in X_2$.

Задача о нахождении седловой точки относительно $\mathcal{X}$ является частным случаем решения системы (2), т. е. задачи GNEP. Для того чтобы это показать, достаточно взять $N = 2$, $\theta_1 = f$ и $\theta_2 = -f$. Поскольку $\theta_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2) \equiv 0$, то для этой задачи функция Никайдо — Исода (4) принимает вид $V(x) \equiv \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$. Тогда из п. (а) леммы 1 вытекает, что $\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \geq 0$ для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$. Из п. (б) леммы 1 вытекает, что точка x^* является седловой тогда и только тогда, когда $\varphi_1(x_1^*) - \varphi_2(x_2^*) = 0$.

3. Обобщенная задача равновесия по Нэшу с ограничениями типа включения

Рассмотрим решения системы (2), в которой множество $\mathcal{X} \subset X$, определяющее ограничения на допустимые стратегии, задано следующим образом. Будем предполагать, что для каждого номера $i \in \overline{1, N}$ и каждого вектора $x_{-i} \in X_{-i}$ задано непустое замкнутое множество $F_i(x_{-i}) \subset X_i$ допустимых стратегий i -го игрока x_i . Тогда на множестве X_{-i} задано многозначное отображение F_i со значениями в X_i . Определим многозначное отображение $F : X \rightrightarrows X$, сопоставляющее каждому вектору $x = (x_1, \dots, x_N) \in X$ множество

$$F(x) := \prod_{i \in \overline{1, N}} F_i(x_{-i}) \subset X.$$

Определим $\mathcal{X}$ как множество неподвижных точек многозначного отображения F , т. е. $x \in \mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда

$$x \in F(x). \quad (20)$$

Приведем условия существования решений включения (20), прямо следующие из [9, теорема 1].

Пусть для любых $i, j \in \overline{1, N}$ заданы числа $\beta_{ij} \geq 0$, $j \neq i$, $\beta_{ii} = 0$.

Теорема 5. Пусть при любом $i \in \overline{1, N}$ многозначное отображение $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$ является β_{ij} -липшицевым по каждому своему аргументу $x_j \in X_j$,

$j \in \overline{1, N}$, $j \neq i$, т. е.

$$\forall i \in \overline{1, N} \quad \forall x_{-i}, x'_{-i} \in X_{-i} \quad \forall y_i \in F_i(x_{-i}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y'_i \in F_i(x'_{-i})$$

$$: \rho_i(y_i, y'_i) \leq \sum_{j \in \overline{1, N}, j \neq i} \beta_{ij} \rho_j(x_j, x'_j) + \varepsilon.$$

Тогда если спектральный радиус матрицы $(\beta_{ij})_{N \times N}$ меньше 1, то существует решение включения (20) и, таким образом, множество $\mathcal{X}$ непусто.

Исследуем вопрос о существовании решения GNEP. Как и в предыдущем пункте, функцию $\Psi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ определим формулой (3). Определим функцию $\hat{V} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ формулой

$$\hat{V}(x) := \sup_{y \in F(x)} \Psi(x, y), \quad x \in X. \quad (21)$$

В отличие от определенной в предыдущем пункте формулой (4) функции V , заданной на множестве $\mathcal{X}$, функция $\hat{V}$ задана на всем пространстве X . Кроме того, при любом $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство

$$\hat{V}(x) \geq V(x). \quad (22)$$

Для доказательства этого вначале покажем, что для любого $x \in \mathcal{X}$ имеет место включение

$$\mathcal{X}_i(x_{-i}) \subset F_i(x_{-i}), \quad i \in \overline{1, N}. \quad (23)$$

Действительно, зафиксируем произвольный номер i , и пусть $x = (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}$. Возьмем произвольное $y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i})$. Тогда согласно (1) $y = (y_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}$ и, значит, $y \in F(y)$. Поэтому $y_i \in F_i(x_{-i})$, что доказывает включение (23).

В силу включения (23) имеем

$$V(x) = \sup_{y \in X: y_i \in \mathcal{X}_i(x_{-i}), i \in \overline{1, N}} \Psi(x, y) \leq \sup_{y \in X: y_i \in F_i(x_{-i}), i \in \overline{1, N}} \Psi(x, y) = \hat{V}(x),$$

что доказывает неравенство (22).

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения:*

- (а) при любом $x \in \mathcal{X}$ выполнено $\hat{V}(x) \geq 0$;
- (б) если для некоторого $x^* \in X$ выполнены соотношения

$$\hat{V}(x^*) = 0, \quad (24)$$

$$x^* \in F(x^*), \quad (25)$$

то $x^* \in X$ является решением системы (2).

Доказательство. Для любого $x \in \mathcal{X}$ согласно лемме 1 выполнено $V(x) \geq 0$. Поэтому из неравенства (22) следует утверждение (а).

Докажем утверждение (б). Условие (25) означает, что $x^* \in \mathcal{X}$. Учитывая неравенство (22), из условия (24) получаем $V(x^*) \leq \hat{V}(x^*) = 0$. Поэтому по лемме 1 $V(x^*) = 0$, и по этой же лемме точка x^* является решением системы (2).

В отличие от леммы 1 и других известных аналогичных утверждений (см., например, [1, теорема 3.2]), приведенная лемма дает лишь достаточное условие для существования решения системы (2) (решения GNEP). Утверждение, обратное к (б), нарушается, что иллюстрирует следующий пример. В нем приведена

игра, для которой существует решение GNEP, не удовлетворяющее условию (24) леммы 6.

ПРИМЕР 4. Пусть $X_1 = X_2 = [0, 2]$. Рассмотрим игру двух участников, стратегии которых определяют функции $\theta_1, \theta_2 : [0, 2] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\theta_1(x_1, x_2) := x_1, \quad \theta_2(x_2, x_1) := 0, \quad x_1, x_2 \in [0, 2],$$

а множества допустимых значений стратегий x_1, x_2 заданы соотношениями

$$F_1(x_2) := [x_2, 2], \quad F_2(x_1) := \begin{cases} [1 + x_1, 2], & \text{если } x_1 \in [0, 1), \\ [0, x_1 - 1], & \text{если } x_1 \in [1, 2]. \end{cases}$$

Очевидно, множество $\mathcal{X}$ является пересечением графиков этих отображений

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 2] : x_1 \in F_1(x_2)\}, \quad \{(x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 2] : x_2 \in F_2(x_1)\}.$$

Для рассматриваемой игры соответствующее пересечение определяется формулой

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 2] : x_1 \in [1, 2], \quad x_2 \in [0, x_1 - 1]\}.$$

Решения GNEP образуют множество

$$\{x \in [0, 2] \times [0, 2] : x_1 \in [1, 2], \quad x_2 = x_1 - 1\}.$$

Покажем, что любая из этих точек не удовлетворяют условию (24).

Функция Никайдо — Исоды определяется соотношением $\Psi(x, y) = x_1 - y_1$. Следовательно,

$$\widehat{V}(x) = \sup_{y_1 \in F_1(x_2)} (x_1 - y_1) = x_1 - \inf_{y_1 \in [x_2, 2]} y_1 = x_1 - x_2.$$

Но для полученной функции при любом x , являющемся решением GNEP, имеем $\widehat{V}(x) = 1 \neq 0$.

Приведем достаточные условия существования решения GNEP для рассматриваемой игры, аналогичные теореме 4.

Теорема 6. Предположим, что метрическое пространство (X, ρ) полно, а многозначные отображения $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$ секвенциально непрерывны при каждом i . Пусть функция $x \mapsto \max\{\widehat{V}(x), \text{dist}(x, F(x))\}$, $x \in X$, удовлетворяет на всем X обобщенному условию типа Каристи с константами $\gamma = 0$, $M > 0$ и функцией $k \in \mathcal{K}$.

Тогда для любого $x_0 \in X$ такого, что $\max\{\widehat{V}(x_0), \text{dist}(x_0, F(x_0))\} \leq M$, существует решение системы (2) (решение GNEP) $x^* \in \mathcal{X}$, удовлетворяющее неравенству

$$\rho(x_0, x^*) \leq \int_0^M \frac{dt}{k(t)}. \quad (26)$$

Для доказательства этой теоремы приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 7. Пусть при каждом $i \in \overline{1, N}$ многозначное отображение $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$ секвенциально полунепрерывно снизу. Тогда функция $\widehat{V}$ полунепрерывна снизу в точках множества $\{x \in X : \widehat{V}(x) < +\infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x \in X$, для которой $\widehat{V}(x) < +\infty$, и сходящуюся к ней последовательность $\{x^j\} \subset X$ такую, что последовательность $\{\widehat{V}(x^j)\}$ сходится при $j \rightarrow \infty$. В силу (21) последнее равносильно тому, что предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\nu \in F(x^j)} \Psi(x^j, \nu)$ существует.

Возьмем произвольную точку $y \in F(x)$. Поскольку F_i секвенциально полунепрерывны снизу при всех i , существует последовательность точек $y^j \in F(x^j)$ такая, что $y^j \rightarrow y$ при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу непрерывности функций θ_i функция Ψ , определяемая по формуле (3), тоже непрерывна.

Из приведенных рассуждений следует, что

$$\Psi(x, y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(x^j, y^j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\nu \in F(x^j)} \Psi(x^j, \nu) = \lim_{j \rightarrow \infty} \widehat{V}(x^j).$$

В силу произвольности выбора $y \in F(x)$ из доказанного неравенства следует, что

$$\widehat{V}(x) = \sup_{y \in F(x)} \Psi(x, y) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \widehat{V}(x^j).$$

Значит, функция $\widehat{V}$ полунепрерывна снизу в точке x . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Положим $U(x) := \max\{\widehat{V}(x), \text{dist}(x, F(x))\}$, $x \in X$. Функция U принимает неотрицательные значения. Покажем, что она полунепрерывна снизу в точках $\bar{x} \in X$, в которых $U(\bar{x}) < +\infty$.

Зафиксируем произвольный $\bar{x} \in X$, для которого $U(\bar{x}) < +\infty$. Для этой точки очевидно неравенство $\widehat{V}(\bar{x}) < +\infty$. Поэтому по лемме 7 функция $\widehat{V}$ полунепрерывна снизу в этой точке. Поскольку по предположению доказываемой теоремы многозначное отображение $F : X \rightrightarrows X$ секвенциально непрерывно, то и функция $x \mapsto \text{dist}(x, F(x))$, $x \in X$, непрерывна, а значит, и полунепрерывна снизу в точке $\bar{x}$. Поэтому функция максимума U полунепрерывна снизу в точке $\bar{x}$.

Для функции U выполнены все предположения теоремы 2 из [11]. По этой теореме для любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) \leq M$, существует точка $x^* \in X$ такая, что имеет место

$$U(x^*) = 0, \quad \rho(x_0, x^*) \leq \int_0^{U(x_0)} \frac{dt}{k(t)}. \quad (27)$$

Из равенства $U(x^*) = 0$ и определения функции U следует, что $\text{dist}(x^*, F(x^*)) = 0$ и, значит, x^* лежит в множестве $\mathcal{X}$ всех неподвижных точек многозначного отображения F . Из п. (а) леммы 6 следует, что $\widehat{V}(x^*) \geq 0$. Отсюда, поскольку $U(x^*) = 0$, то $\widehat{V}(x^*) = 0$. Итак, $x^* \in \mathcal{X}$ и $\widehat{V}(x^*) = 0$. Поэтому из п. (б) леммы 6 следует, что точка x^* является решением GNEP. Оценка (26) вытекает из неравенства в (27) и соотношения $U(x_0) = \max\{\widehat{V}(x_0), \text{dist}(x_0, F(x_0))\} \leq M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Facchinei F., Kanzow C. Generalized Nash equilibrium problems // Ann. Operat. Res. 2010. V. 175. P. 177–211.
2. Ким А. В., Бочаров Г. А. Минимаксные дифференциальные игры с последствием // Вестн. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 132. С. 359–369.
3. Ченцов А. Г. Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вестн. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 130. С. 196–244.
4. Arutyunov A. V., Greshnov A. V. (q_1, q_2) -Quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // Fixed Point Theory. 2022. V. 23, N 2. P. 473–486.
5. Грешнов А. В. Функции расстояния между множествами (q_1, q_2) -квазиметрических пространств // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 528–538.

6. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Сторожук К. В. Структура множества точек локального минимума функций в различных пространствах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 3. С. 518–526.
7. Storozhuk K. V. Strong extrema of functions on quasi-metric and compact spaces // Topology Appl. 2018. V. 250, N 1. P. 37–47.
8. Сенгупта Р. Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах // Вестн. российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 143. С. 268–276.
9. Жуковский Е. С. О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 3. С. 344–362.
10. Арутюнов А. В. Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 30–44.
11. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 948–954.
12. Zhukovskiy E., Burlakov E., Malkov I. Caristi-type conditions in constraint minimisation of mappings in metric and partially ordered spaces // Set-valued and Variational Analysis. 2023. V. 31, N 35. P. 1–23.
13. Mordukhovich B. S. Variational analysis and generalized differentiation I: Basic theory. Berlin: Springer, 2006.
14. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
15. Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games // Pacific J. Math. 1955. V. 5, N 5. P. 807–815.
16. Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E. On stability of the generalized saddle points // Optimization. 2024. V. 73, N 12. P. 3519–3536.
17. Clarke F. Functional analysis, calculus of variations and optimal control. New York: Springer, 2013.
18. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

Поступила в редакцию 9 апреля 2025 г.

После доработки 9 апреля 2025 г.

Принята к публикации 19 июня 2025 г.

Арутюнов Арам Владимирович (ORCID 0000-0001-7326-7492)
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65, Москва 117997
arutyunov@cs.msu.ru

Жуковский Евгений Семенович (ORCID 0000-0003-4460-7608)
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
ул. Интернациональная, 33, Тамбов 392000
zukovskys@mail.ru

Жуковский Сергей Евгеньевич (ORCID 0000-0002-2686-4654)
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65, Москва 117997
s-e-zhuk@yandex.ru