Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 512.543

О π–МОЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть π — множество простых чисел. Группа G называется π-мощной, если для любого элемента $a \in G$ и для любого целого π-числа $n > 0$, делящего порядок элемента a, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент a в элемент порядка n. Доказано, что если G — конечно порожденная метабелева группа (или финитно аппроксимируемая абелева группа, или финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга, или финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа), то для группы G следующие утверждения равносильны: (1) группа G является π-мощной; (2) в группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π; (3) группа G является почти π-мощной. Доказано также, что если G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR- группа (или конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью полициклической), то для группы G равносильны условия (2) и (3).

DOI 10.33048/smzh.2025.66.501

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, разрешимая группа, метабелева группа, нильпотентная группа, минимаксная группа.

1. Введение

Напомним, что элемент x группы G называется *мощным*, если для любого целого положительного числа n, делящего порядок элемента x, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Здесь и всюду далее делителем бесконечности считается любое целое число $n \neq 0$. Группа G называется *мощной*, если все ее элементы являются мощными.

Изучение свойства мощности групп было начато несколько десятилетий тому назад [1–3]. В последнее время в этом направлении появилось несколько работ, в которых данное свойство и его модификации изучаются для свободных и теоретико-групповых конструкций, а также для некоторых классов групп [4–8].

Понятие мощного элемента может быть модифицировано следующим образом. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Элемент x группы G называется *π-мощным*, если для каждого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n. Группа G называется *π-мощной*, если все ее элементы являются π-мощными.

Исследование выполнено за счет гранта по приоритетным направлениям деятельности РНФ «Аппроксимационные свойства групп» (2025–2026).

Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятия π-мощного элемента и π-мощной группы совпадают с классическими понятиями мощного элемента и мощной группы.

Свойство группы G «быть мощной» является существенным усилением свойства финитной аппроксимируемости. Исследования свойства группы «быть мощной» велись по аналогии с исследованиями финитной аппроксимируемости, но изучение свойства мощности сталкивалось с целым рядом проблем и сложностей. Исследования финитной аппроксимируемости разрешимых групп были начаты в классических работах Грюнберга, Гирша и А. И. Мальцева [9–11]. Грюнберг [9] доказал, что конечно порожденные нильпотентные группы без кручения аппроксимируемы конечными p-группами для каждого простого числа p (и поэтому они являются мощными). Свойство мощности имеет место также и для конечно-порожденных нильпотентных групп, имеющих кручение (см., например, следствие 1.2 ниже). Гирш [10] доказал финитную аппроксимируемость полициклических групп. Как выяснилось в дальнейшем, среди полициклических групп имеется достаточно много мощных групп, в том числе поли-Z-группы [2, предложение 2]; сверхразрешимые группы, являющиеся расширениями абелевых с помощью нильпотентных [2, теорема E]; а также полициклические метабелевы группы (см. следствие 1.1 ниже). Еще одним свидетельством в пользу того, что среди полициклических групп имеется достаточно много мощных групп, является тот факт, что любая полициклическая группа является почти мощной, т. е. содержит мощную подгруппу конечного индекса (см., например, следствие 2.1 ниже). Вместе с тем полициклические группы не обязаны быть мощными даже при отсутствии кручения [2, пример 2]. Конечные полициклические группы (и даже конечные сверхразрешимые группы) также не обязаны быть мощными [2]. С другой стороны, конечные метабелевы группы являются мощными [3].

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. Разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой (см., например, [12, п. 5.1.6]).

Более общим требованием является существование в данной группе субнормального ряда, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Следуя Ленноксу и Робинсону (см., например, [12, п. 5.1.6]), будем называть такие группы *разрешимыми группами с конечными абелевыми тотальными рангами* (сокращенно FATR-*группами*).

Следующим обобщением понятия разрешимой FATR-группы является понятие разрешимой группы конечного специального ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это понятие и термин «специальный ранг» введены А. И. Мальцевым в работе [13]. Далее (следуя сложившейся и общепринятой традиции) мы используем термин «конечный ранг» вместо терминов «конечный специальный ранг» и «конечный ранг Прюфера».

Робинсон [12, п. 5.3.2] доказал, что разрешимая группа конечного ранга является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она редуцирована (т. е. не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел). Для разрешимых минимаксных групп и разрешимых FATR-групп исследовались также и более тонкие аппроксимационные свойства (такие как аппроксимируемость конечными π-группами и почти аппроксимируемость конечными π-группами) [14, 15]. Для разрешимых FATR-групп в настоящей работе получен критерий почти π-мощности (теорема 2).

Некоторые полученные здесь результаты посвящены абелевым и нильпотентным группам. Хорошо известно и (с помощью структурной теоремы Прюфера) легко проверяется (см., например, [11]), что абелева группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет неединичных полных элементов, т. е. таких элементов $a \neq 1$, что уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G для любого целого положительного числа n. Точно так же может быть сформулирован и критерий финитной аппроксимируемости для разрешимой группы конечного ранга и, в частности, для нильпотентной группы конечного ранга. В самом деле, очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа является редуцированной и для произвольной группы G отсутствие в ней неединичных полных элементов является условием, промежуточным по силе между финитной аппроксимируемостью и редуцированностью. Поэтому сформулированный выше результат Робинсона может быть дополнен следующим образом. Для разрешимой группы G конечного ранга следующие три условия равносильны: группа G финитно аппроксимируема; группа G не содержит неединичных полных элементов; группа G редуцирована.

Доказанная ниже теорема 1 содержит критерии π-мощности для финитно аппроксимируемых абелевых групп, для финитно аппроксимируемых нильпотентных групп конечного ранга, а также для финитно аппроксимируемых метабелевых FATR-групп.

Рассмотрим конечно порожденные метабелевы группы. Их финитная аппроксимируемость была доказана Ф. Холлом (см., например, [12, п. 4.3.1]). В дальнейшем этот результат получил ряд глубоких и нетривиальных обобщений на другие классы конечно порожденных разрешимых групп, в том числе была доказана финитная аппроксимируемость конечно порожденных групп, являющихся расширениями абелевых групп с помощью полициклических [12, п. 7.2.1]. В отличие от конечных метабелевых групп конечно порожденные метабелевы группы уже не обязаны быть мощными. Критерий π-мощности для конечно порожденных метабелевых групп содержится в доказанной ниже теореме 1 и формулируется единообразно с упомянутыми выше критериями π-мощности для абелевых групп, для нильпотентных групп конечного ранга и для метабелевых FATR-групп.

В основе этой единообразной формулировки лежит понятие p-полного элемента, где p — простое число. Элемент a группы G называется *p-полным*, если для любого целого положительного числа k уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо в группе G.

Теорема 1. *Пусть G — конечно порожденная метабелева группа (или финитно аппроксимируемая абелева группа, или финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга, или финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа). И пусть π — множество простых чисел.*

Если порядок элемента a группы G конечен, то a — мощный элемент группы G.

Если порядок элемента a группы G бесконечен, то элемент a является π-мощным тогда и только тогда, когда для любого $p \in \pi$ и для любого целого числа $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным.

Для группы G следующие три условия равносильны.

1. Группа G является π-мощной.

2. В группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.

3. Группа G является почти π-мощной.

Напомним в связи с этим утверждением, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Так как в полициклических (и, в частности, в конечно порожденных нильпотентных) группах нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого p, то непосредственными следствиями теоремы 1 являются следующие два утверждения, первое из которых обобщает результат Поланда [3] о мощности конечных метабелевых групп.

Следствие 1.1. *Любая полициклическая метабелева группа является мощной.*

Следствие 1.2. *Любая конечно порожденная нильпотентная группа является мощной.*

Рассмотрим теперь разрешимую группу Баумслага — Солитэра

$$G(m) = (a, b; b^{-1}ab = a^m),$$

где $|m| > 1$. Эта группа является метабелевой, и ее элемент a бесконечного порядка является p-полным для каждого простого делителя p числа m. Поэтому в силу теоремы 1 группа $G(m)$ не является мощной. Так как нормальное замыкание N элемента a группы $G(m)$ изоморфно группе m-ичных дробей, а фактор-группа группы $G(m)$ по подгруппе N является бесконечной циклической, то группа $G(m)$ не содержит p-полных элементов ни для какого простого числа p, взаимно простого с m. Поэтому непосредственным следствием теоремы 1 является следующее утверждение [6, теорема 1, п. 2].

Следствие 1.3. *Группа $G(m)$ является π–мощной, где π — множество всех простых чисел, взаимно простых с m.*

Важными классами разрешимых групп, содержащими все полициклические группы, являются класс разрешимых минимаксных групп и более широкий класс разрешимых FATR-групп. Как уже отмечалось, финитная аппроксимируемость групп из этих классов равносильна их редуцированности. В отличие от финитно аппроксимируемых метабелевых FATR-групп, для финитно аппроксимируемых разрешимых FATR-групп условия 1, 2 и 3 из формулировки теоремы 1 не равносильны между собой. Тем не менее сформулированная ниже теорема 2 утверждает, что для таких групп равносильными будут условия 2 и 3. Она также утверждает, что условия 2 и 3 равносильны и для конечно порожденных групп, являющихся расширениями абелевых групп с помощью полициклических.

Теорема 2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая* FATR-*группа (или конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью полициклической), и пусть π — множество простых чисел.*

Тогда следующие три условия равносильны.

1. *Группа G является почти π-мощной.*

2. *В группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.*

3. *В группе G существует подгруппа H конечного индекса такая, что все элементы из H являются π-мощными элементами группы G.*

Так как полициклическая группа не содержит p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого числа p, то из теоремы 2 вытекает следующее хорошо известное утверждение (см., например, [6]).

Следствие 2.1. *Любая полициклическая группа является почти мощной.*

Возвращаясь к теоремам 1 и 2, для произвольной группы G обозначим через π_G множество всех простых чисел p таких, что в группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка.

Для группы G из теоремы 1 (из теоремы 2) множество π_G является наибольшим среди всех множеств π таких, что группа G является π-мощной (почти π-мощной).

Для некоторых групп G из теорем 1 и 2 множество π_G может оказаться конечным (и даже пустым). Соответствующие примеры можно легко найти среди финитно аппроксимируемых абелевых FATR-групп. С другой стороны, в следующей теореме рассмотрены разрешимые группы, для которых множество π_G оказывается достаточно большим.

Теорема 3. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа (или конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной), и пусть π_G — множество всех простых чисел p таких, что в группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка.*

Тогда множество π_G имеет конечное дополнение в множестве всех простых чисел.

Непосредственным следствием теорем 1 и 3 является следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Любая конечно порожденная метабелева группа является π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Из теорем 2 и 3 вытекают следующие два утверждения.

Следствие 3.2. *Любая финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа является почти π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Следствие 3.3. *Пусть G — конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной. Тогда группа G является почти π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Важная теорема Луботского — Манна [16] утверждает, что любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга содержит разрешимую минимаксную подгруппу конечного индекса. Поэтому из следствия 3.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.4. *Любая финитно аппроксимируемая конечно порожденная группа конечного ранга является почти π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Исследования свойств мощности и π-мощности для различных классов разрешимых групп ведутся в последнее время рядом авторов. Так, например, в недавней работе Е. В. Соколова [17] получены результаты о π-мощности для некоторых нильпотентных групп.

Далее приведены доказательства основных результатов настоящей работы — теорем 1–3.

2. Используемые результаты

Поланд [3] доказал следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая конечная метабелева группа является мощной.*

Следующий классический результат принадлежит Ф. Холлу [12, п. 4.3.1].

Предложение 2. *Любая конечно порожденная метабелева группа финитно аппроксимируема.*

Более того, пусть конечно порожденная группа G является расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы. Тогда группа G финитно аппроксимируема.

Этот результат был получен Ф. Холлом в 1959 г., а спустя 15 лет он был обобщен следующим образом [12, п. 7.2.1].

Предложение 3. *Пусть конечно порожденная группа G является расширением абелевой группы с помощью полициклической группы. Тогда группа G финитно аппроксимируема.*

Нам потребуется также следующая детализация теоремы Холла, принадлежащая Сегалу [12, п. 4.3.9].

Предложение 4. *Пусть конечно порожденная группа G почти вся без кручения и является расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы. Тогда группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.*

Следующий результат хорошо известен как теорема Грюнберга — Мальцева [12, п. 5.2.2].

Предложение 5. *Пусть G — разрешимая* FATR*-группа, F — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда группа F нильпотентна, а фактор-группа G/F почти абелева.*

Напомним, что *подгруппой Фиттинга* данной группы называется произведение всех ее нормальных нильпотентных подгрупп.

Говорят, что группа G *имеет конечный ранг Гирша*, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является либо бесконечной циклической группой, либо периодической группой. Хорошо известно и легко проверяется, что любая абелева группа конечного ранга Прюфера является расширением конечно порожденной абелевой группы без кручения с помощью периодической группы, и поэтому она имеет конечный ранг Гирша. Следовательно, любая разрешимая группа конечного ранга Прюфера (и, в частности, любая разрешимая FATR-группа) имеет конечный ранг Гирша.

Следующий результат принадлежит Робинсону [12, п. 5.2.3].

Предложение 6. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга Гирша, F — подгруппа Фиттинга группы G, T — наибольшая нормальная периодическая подгруппа группы G.*

Если подгруппа T конечна, то фактор-группа G/F является полициклической и почти абелевой.

Предложение 7. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа, F — подгруппа Фиттинга группы G.*

Тогда фактор-группа G/F является полициклической и почти абелевой.

Доказательство. Пусть T — наибольшая нормальная периодическая подгруппа группы G. Так как по условию G — поли-(циклическая, квазициклическая, рациональная) группа, то T — поли-(циклическая, квазициклическая) периодическая группа. Поэтому T — разрешимая группа с условием минимальности для подгрупп (или, в другой терминологии, разрешимая черниковская группа). Хорошо известно, что такие группы являются конечными расширениями прямых произведений квазициклических подгрупп. С другой стороны, T не может содержать квазициклических подгрупп, так как группа G финитно аппроксимируема. Следовательно, группа T конечна. Поэтому в силу предложения 6 фактор-группа G/F является полициклической и почти абелевой. Предложение доказано.

Предложение 8. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Этот результат (даже в более общем виде) доказан Робинсоном [12, п. 5.3.1].

Как отмечалось выше, любая разрешимая минимаксная группа G обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой (см., например, [12, п. 5.1.6)]). *Спектром* разрешимой минимаксной группы G называется множество всех простых p, для которых соответствующая квазициклическая группа присутствует среди факторов упомянутого выше ряда. Спектр разрешимой минимаксной группы G конечен и не зависит от выбора ряда.

Нам потребуется следующая детализация предложения 8 [12, п. 5.3.9].

Предложение 9. *Пусть G — редуцированная разрешимая минимаксная группа. Тогда группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для любого простого p, не лежащего в спектре группы G. В частности, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.*

Следующее утверждение принадлежит А. И. Мальцеву [11, лемма 2].

Предложение 10. *Пусть G — нильпотентная группа, c — ступень нильпотентности группы G, и пусть n — целое положительное число, G^{n^c} — степенная подгруппа группы G, т. е. подгруппа, порожденная элементами a^{n^c}, где a — произвольный элемент из G. Тогда из любого элемента подгруппы G^{n^c} в группе G извлекается корень степени n.*

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Если G — финитно аппроксимируемая метабелева группа, то все элементы конечного порядка группы G являются мощными.*

В частности, в конечно порожденной метабелевой группе все элементы конечного порядка являются мощными.

Доказательство. Пусть G — финитно аппроксимируемая метабелева группа и a — элемент конечного порядка группы G. Обозначим порядок элемента a (как и обычно) через $|a|$. Так как группа G финитно аппроксимируема, то в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $|a| = |aN|$. Конечная метабелева группа G/N по предложению 1 является мощной. Поэтому для любого натурального делителя n числа $|a| = |aN|$ в группе G/N существует нормальная подгруппа H/N такая, что порядок элемента aN по модулю подгруппы H/N равен n. Тогда H — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $|aH| = n$. Таким образом, элемент a группы G является мощным.

Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение леммы является частным случаем первого утверждения в силу предложения 2.

Лемма 2. *Пусть G — конечная нильпотентная группа. Тогда для каждого элемента a группы G и для каждого натурального делителя n порядка элемента a в группе G существует характеристическая подгруппа H такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы H равен n. В частности, группа G является мощной.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть G — конечная нильпотентная группа порядка m и для всех конечных нильпотентных групп меньшего порядка доказываемое утверждение верно. Обозначим порядок элемента a группы G через $|a|$. Пусть n — натуральный делитель числа $|a|$. Если $n = |a|$, то в качестве искомой характеристической подгруппы H можно взять единичную подгруппу. Пусть теперь $n < |a|$. Тогда $|a| = npq$, где p — простое число, q — целое. Обозначим через Z центр группы G, а через P — множество всех элементов x группы Z, удовлетворяющих равенству $x^p = 1$. Тогда P — характеристическая подгруппа группы G и порядок фактор-группы G/P меньше, чем порядок группы G. Очевидно, что либо $(a) \cap P = 1$, либо $|(a) \cap P| = p$. Отсюда и из того, что $|a| = npq$, следует, что либо $|aP| = npq$, либо $|aP| = nq$. В любом случае n делит $|aP|$. Поэтому в силу индуктивного предположения в группе G/P существует характеристическая подгруппа H/P такая, что порядок элемента aP по модулю подгруппы H/P равен n. Тогда H — характеристическая подгруппа группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы H равен n. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть N — нормальная нильпотентная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G. Тогда любой элемент a конечного порядка из N является мощным элементом группы G.*

Доказательство. Так как a — элемент конечного порядка финитно аппроксимируемой группы G, то существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу такой, что $|a\varphi| = |a|$. Введем обозначения: $G\varphi = G_1$, $N\varphi = N_1$, $a\varphi = a_1$. Тогда N_1 — нормальная нильпотентная подгруппа конечной группы G_1, a_1 — элемент подгруппы N_1 и $|a_1| = |a|$. По лемме 2 для каждого натурального делителя n числа $|a_1| = |a|$ в группе N_1 существует характеристическая подгруппа H такая, что $|a_1H| = n$. Так как H характеристична в N_1 и N_1 нормальна в G_1, то H нормальна в G_1. Пусть τ — естественный гомоморфизм группы G_1 на фактор-группу G_1/H. Тогда $\varphi\tau$ — гомоморфизм группы G на конечную группу G_1/H и $|a\varphi\tau| = |a_1H| = n$. Таким образом, элемент a группы G является мощным. Лемма доказана.

Лемма 4. *В финитно аппроксимируемой нильпотентной группе все элементы конечного порядка являются мощными.*

Это утверждение является частным случаем леммы 3.

Лемма 5. *Пусть конечно порожденная группа G содержит нормальную абелеву подгруппу A такую, что фактор-группа G/A является полициклической. Тогда любой элемент a конечного порядка из A является мощным элементом группы G.*

Это утверждение является частным случаем леммы 3, так как группа G из леммы 5 финитно аппроксимируема по предложению 3.

Лемма 6. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая* FATR*-группа, F — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда любой элемент a конечного порядка из F является мощным элементом группы G.*

Это утверждение является частным случаем леммы 3, так как по предложению 5 подгруппа F нильпотентна.

Доказанные выше леммы 1–6 относятся к элементам конечного порядка. Перейдем теперь к элементам бесконечного порядка.

Лемма 7. *Пусть G — произвольная группа, π — множество простых чисел, и пусть a — π-мощный элемент бесконечного порядка группы G. Тогда для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в G ни для какого числа p из π.*

Доказательство. Пусть k — ненулевое целое число и $p \in \pi$. Запишем число k в виде $k = p^s q$, где q взаимно просто с p. Так как a — π-мощный элемент бесконечного порядка группы G и $p \in \pi$, то в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $|aN| = p^{s+1}$. Отсюда и из того, что $k = p^s q$, где q взаимно просто с p, следует, что $|a^kN| = p$. Очевидно, что элемент простого порядка p конечной группы не может быть p-полным. Поэтому элемент a^kN не является p-полным в группе G/N. Отсюда и из того, что свойство p-полноты наследуется при факторизации, следует, что элемент a^k не является p-полным в группе G. Лемма доказана.

Дальнейшие наши усилия направлены (в том числе) на обращение леммы 7 при дополнительных ограничениях на группу G. Но сначала отметим следующее утверждение, вытекающее из леммы 7.

Лемма 8. *Пусть π — множество простых чисел. Если группа G является почти π-мощной, то в ней нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.*

В частности, если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для некоторого простого числа p, то в ней нет p-полных элементов бесконечного порядка.

Доказательство. По условию в группе G существует нормальная π-мощная подгруппа H конечного индекса m. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы G. Тогда g^m принадлежит подгруппе H и поэтому g^m — π-мощный элемент группы H, причем порядок элемента g^m бесконечен. Поэтому в силу леммы 7 элемент g^m не является p-полным в группе H ни для какого числа p

из π. Отсюда легко следует, что элемент g не является p-полным в группе G ни для какого числа p из π.

Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение леммы является частным случаем первого утверждения, так как любая группа, почти аппроксимируемая конечными p-группами, является (как легко видеть) почти π-мощной, где множество π состоит из одного числа p.

Если множество π состоит из одного простого числа p, то вместо термина «π-мощный элемент» будем употреблять термин «p-мощный элемент». Для произвольного множества π простых чисел вопрос о π-мощности элемента группы сводится к вопросу о его p-мощности следующим образом.

Лемма 9. *Пусть π — множество простых чисел. Элемент a группы G является π-мощным тогда и только тогда, когда он является p-мощным для каждого p из π.*

Доказательство. Необходимость в этой лемме очевидна. Для проверки достаточности предположим, что элемент a группы G является p-мощным для каждого p из π. Пусть n — целое положительное π-число, делящее порядок элемента a, и $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\dots{p_r}^{k_r}$ — разложение числа n на простые множители. Так как для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ элемент a является p_i-мощным, то для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ в группе G существует нормальная подгруппа N_i конечного индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок $p_i^{k_i}$. Тогда подгруппа $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_r$ нормальна в G, имеет конечный индекс и порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Таким образом, элемент a группы G является π-мощным. Лемма доказана.

Если G — произвольная группа, и n — целое положительное число, то через G^n будем обозначать степенную подгруппу группы G, т. е. подгруппу, порожденную n-ми степенями всевозможных элементов группы G. Если G — абелева группа, то G^n совпадает с множеством n-х степеней всех элементов группы G.

Лемма 10. *Пусть a — элемент бесконечного порядка абелевой группы G, p — простое число, и пусть для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в G.*

Тогда имеют место следующие два утверждения.

1. *Для любого целого положительного числа s в группе G существует степенная подгруппа G^{p^m}, по модулю которой элемент a имеет порядок p^s.*

2. *Элемент a является p-мощным G.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть s — целое положительное число. По условию элемент $b = a^{p^{s-1}}$ не является p-полным, т. е. существует целое положительное число m такое, что уравнение $x^{p^m} = b$ не разрешимо в группе G, причем будем считать, что m — наименьшее число с этим свойством. Тогда $b \notin G^{p^m}$ и $b \in G^{p^{m-1}}$. Так как $b \in G^{p^{m-1}}$, то $b^p \in G^{p^m}$. Таким образом, $b \notin G^{p^m}$ и $b^p \in G^{p^m}$. Поэтому порядок элемента b по модулю подгруппы G^{p^m} равен p. Отсюда и из того, что $b = a^{p^{s-1}}$, следует, что порядок элемента a по модулю подгруппы G^{p^m} равен p^s.

Докажем второе утверждение леммы. В силу первого утверждения леммы для любого целого положительного числа s в группе G существует степенная подгруппа G^{p^m} такая, что $|aG^{p^m}| = p^s$. Фактор-группа G/G^{p^m} является абелевой p-группой с ограниченными порядками элементов. Поэтому в силу хорошо известной теоремы Прюфера группа G/G^{p^m} раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и тем самым она финитно аппроксимируема.

Отсюда и из того, что $|aG^{p^m}| = p^s$, следует, что в группе G/G^{p^m} существует подгруппа H/G^{p^m} конечного индекса, по модулю которой порядок элемента aG^{p^m} равен p^s. Тогда H — подгруппа конечного индекса группы G и $|aH| = p^s$. Таким образом, элемент a является p-мощным. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть конечно порожденная группа G содержит нормальную абелеву подгруппу A такую, что фактор-группа G/A является полициклической. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы A, p — простое число, и пусть для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в группе A.*

Тогда элемент a является p-мощным в группе G.

Доказательство. По лемме 10 для любого целого положительного числа s в группе A существует степенная подгруппа A^{p^m} такая, что $|aA^{p^m}| = p^s$. Очевидно, что подгруппа A^{p^m} нормальна в G. Так как фактор-группа G/A^{p^m} конечно порождена и является расширением абелевой группы A/A^{p^m} с помощью полициклической группы, то по предложению 3 группа G/A^{p^m} финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что $|aA^{p^m}| = p^s$, следует, что в группе G/A^{p^m} существует нормальная подгруппа H/A^{p^m} конечного индекса, по модулю которой порядок элемента aA^{p^m} равен p^s. Тогда H — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|aH| = p^s$. Таким образом, элемент a является p-мощным в группе G. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть G — конечно порожденная метабелева группа, A — какая-нибудь нормальная абелева подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/A абелева. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы G, p — простое число и для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в группе G. Тогда имеют место следующие два утверждения.*

1. *Если порядок элемента a по модулю подгруппы A конечен, то элемент a является p-мощным в группе G.*

2. *Если порядок элемента a по модулю подгруппы A бесконечен, то элемент a является мощным (и, в частности, p-мощным) в группе G.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть порядок элемента a по модулю подгруппы A конечен и равен j. Тогда $(a) \cap A = (a^j)$. Здесь через (a) и (a^j) обозначены циклические подгруппы, порожденные элементами a и a^j соответственно. Заметим, что $a^j \in A$, и по условию леммы степени элемента a^j с ненулевыми показателями не являются p-полными в G (а значит, и в A). Поэтому в силу леммы 10 для любого целого положительного числа s в группе A существует степенная подгруппа A^{p^m} такая, что $|a^j A^{p^m}| = p^s$, т. е. такая, что $(a^j) \cap A^{p^m} = (a^{jp^s})$. Тогда

$$(a) \cap A^{p^m} = (a) \cap A \cap A^{p^m} = (a^j) \cap A^{p^m} = (a^{jp^s}),$$

т. е. $|aA^{p^m}| = jp^s$. Фактор-группа G/A^{p^m} наследует от группы G свойства конечной порожденности и метабелевости. Поэтому в силу леммы 1 все элементы конечного порядка группы G/A^{p^m} являются мощными. Отсюда и из того, что $|aA^{p^m}| = jp^s$, следует, что в группе G/A^{p^m} существует нормальная подгруппа H/A^{p^m} конечного индекса такая, что порядок элемента aA^{p^m} по модулю подгруппы H/A^{p^m} равен p^s. Тогда H — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $|aH| = p^s$. Таким образом, элемент a является p-мощным в группе G.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть порядок элемента a по модулю подгруппы A бесконечен. Фактор-группа G/A является конечно порожденной абелевой группой, так что G/A — мощная группа. Тогда aA — мощный элемент бесконечного порядка группы G/A. Поэтому для любого целого положительного числа n в группе G/A существует нормальная подгруппа K/A конечного индекса такая, что элемент aA имеет по модулю подгруппы K/A порядок n. Тогда K — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $|aK| = n$. Таким образом, элемент a является мощным в группе G. Лемма доказана.

Лемма 13. *В разрешимой группе G конечного ранга любая степенная подгруппа G^n имеет конечный индекс.*

Доказательство. Рассмотрим в фактор-группе G/G^n нормальный ряд с абелевыми факторами. Эти факторы являются периодическими абелевыми группами конечного ранга с ограниченными порядками элементов. По теореме Прюфера они раскладываются в прямые произведения циклических групп, причем за счет конечности ранга число прямых множителей в этих разложениях конечно. Таким образом, все факторы рассмотренного выше ряда конечны и поэтому группа G/G^n конечна. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть a — элемент бесконечного порядка нильпотентной группы G конечного ранга, p — простое число, и пусть для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в G.*

Тогда имеют место следующие два утверждения.

1. *Для любого целого положительного числа s в группе G существует характеристическая подгруппа H конечного индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок p^s.*

2. *В частности, элемент a является p-мощным.*

Доказательство. Пусть s — целое положительное число. По условию леммы элемент $b = a^{p^{s-1}}$ не является p-полным, т. е. существует целое положительное число m такое, что уравнение $x^{p^m} = b$ не разрешимо в группе G. Рассмотрим степенную подгруппу $V = G^{p^{mc}}$, где c — ступень нильпотентности группы G. По предложению 10 из любого элемента v подгруппы V в группе G извлекается корень степени p^m. Отсюда и из того, что уравнение $x^{p^m} = b$ не разрешимо в группе G, следует, что $b \notin V$, т. е. элемент $(aV)^{p^{s-1}}$ группы G/V отличен от 1. По лемме 13 G/V — конечная p-группа. Поэтому $|aV|$ — степень числа p. Отсюда и из того, что элемент $(aV)^{p^{s-1}}$ отличен от 1, следует, что p^s делит $|aV|$. Тогда по лемме 2 в группе G/V существует характеристическая подгруппа H/V, по модулю которой элемент $|aV|$ имеет порядок p^s. Таким образом, $|aH| = p^s$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что H — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G (так как V — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G и H/V характеристична в G/V). Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая* FATR-*группа, F — подгруппа Фиттинга группы G, p — простое число. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы F и для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в группе F.*

Тогда элемент a является p-мощным в группе G.

Доказательство. Так как G — разрешимая FATR-группа, по предложению 5 подгруппа F нильпотентна. Хорошо известно и легко проверяется, что любая разрешимая FATR-группа имеет конечный ранг. Поэтому группа G (а значит, и ее подгруппа F) имеет конечный ранг. По условию леммы a — элемент бесконечного порядка группы F и для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в группе F. Таким образом, для группы F и ее элемента a выполняются все условия леммы 14. По лемме 14 для любого целого положительного числа s в группе F существует характеристическая подгруппа H конечного индекса такая, что $|aH| = p^s$. Так как H характеристична в F и F нормальна в G, то H нормальна в G. По условию леммы G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа. Поэтому в силу предложения 7 фактор-группа G/F является полициклической. Отсюда и из того, что F/H — конечная нильпотентная группа, следует, что группа G/H является полициклической, поэтому она финитно аппроксимируема [10]. Отсюда и из того, что $|aH| = p^s$, следует, что в группе G/H существует нормальная подгруппа K/H конечного индекса, по модулю которой элемент aH имеет порядок p^s. Тогда K — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|aK| = p^s$. Тем самым доказана p-мощность элемента a в группе G. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть G — полициклическая группа, F — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Все элементы из F являются мощными в группе G.*
2. *В группе G существует подгруппа H без кручения, имеющая конечный индекс и такая, что все элементы из H являются мощными в G.*

Доказательство. По предложению 5 группа F нильпотентна, а фактор-группа G/F почти абелева.

Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть $a \in F$. Если порядок элемента a конечен, то он является мощным в G по лемме 6. Пусть теперь порядок элемента a бесконечен. Так как в полициклической группе нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого p, то по лемме 15 элемент a будет p-мощным в G для любого p и тогда по лемме 9 a — мощный элемент группы G.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Очевидно, что если полициклическая группа является почти абелевой, то она содержит нормальную свободную абелеву подгруппу конечного индекса. Обозначим через K/F какую-нибудь нормальную свободную абелеву подгруппу конечного индекса группы G/F. Тогда K имеет конечный индекс в G. Так как K/F содержится в подгруппе Фиттинга группы G/F, то в силу первого утверждения леммы 16 все элементы подгруппы K/F являются мощными в G/F.

Покажем, что любой элемент $a \in K$ является мощным в G. Если $a \in F$, то по первой части леммы 16 a — мощный элемент группы G. Рассмотрим теперь случай, когда $a \notin F$. В этом случае aF — неединичный элемент свободной абелевой группы K/F. Поэтому aF — элемент бесконечного порядка, причем элемент aF (как и все элементы из K/F) является мощным в G/F. Отсюда следует, что a — мощный элемент группы G.

Таким образом, все элементы из K являются мощными в G. Хорошо известно, что любая полициклическая группа почти вся без кручения. Поэтому в группе G существует подгруппа L без кручения конечного индекса. Тогда подгруппа $H = K \cap L$ не имеет кручения, имеет конечный индекс в G и все элементы из H являются мощными в G. Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть G — финитно аппроксимируемая метабелева* FATR*-группа, F — подгруппа Фиттинга группы G. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы G, p — простое число и для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не* *является p-полным в группе G. Тогда имеют место следующие два утверждения.*

1. *Если порядок элемента a по модулю подгруппы F конечен, то элемент a является p-мощным в группе G.*

2. *Если порядок элемента a по модулю подгруппы F бесконечен, то элемент a является мощным (и, в частности, p-мощным) в группе G.*

Доказательство. Так как G — метабелева группа, то G/F — абелева группа. Так как G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа, то в силу предложений 5 и 7 группа F нильпотентна, а фактор-группа G/F является полициклической. Так как к тому же G/F абелева, то G/F — конечно порожденная абелева группа.

Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть порядок элемента a по модулю подгруппы F конечен и равен j. Тогда $(a) \cap F = (a^j)$. Заметим, что $a^j \in F$ и по условию леммы степени элемента a^j с ненулевыми показателями не являются p-полными в G (а значит, и в F). Отсюда и из того, что F — нильпотентная группа конечного ранга, в силу леммы 14 для любого целого положительного числа s в группе F существует характеристическая подгруппа H конечного индекса такая, что $|a^j H| = p^s$, т. е. такая, что $(a^j) \cap H = (a^{jp^s})$. Тогда H нормальна в G и

$$(a) \cap H = (a) \cap F \cap H = (a^j) \cap H = (a^{jp^s}),$$

т. е. $|aH| = jp^s$. Фактор-группа G/H является расширением конечной нильпотентной группы F/H с помощью конечно порожденной абелевой группы G/F. Поэтому фактор-группа G/H полициклическая, причем она наследует от группы G свойство метабелевости. Поэтому в силу леммы 1 все элементы конечного порядка группы G/H являются мощными. Отсюда и из того, что $|aH| = jp^s$, следует, что в группе G/H существует нормальная подгруппа K/H конечного индекса такая, что порядок элемента aH по модулю подгруппы K/H равен p^s. Тогда K — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|aK| = p^s$. Таким образом, элемент a является p-мощным в группе G.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть порядок элемента a по модулю подгруппы F бесконечен. Фактор-группа G/F является конечно порожденной абелевой группой, поэтому в ней все элементы бесконечного порядка (в том числе и элемент aF) мощные. Поэтому для любого целого положительного числа n в группе G/F существует нормальная подгруппа K/F конечного индекса такая, что элемент aF имеет по модулю подгруппы K/F порядок n. Тогда K — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|aK| = n$. Таким образом, элемент a является мощным в группе G. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 распадается на следующие две леммы.

Лемма 18. *Пусть G — конечно порожденная метабелева группа (или финитно аппроксимируемая абелева группа, или финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга, или финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа), и пусть π — множество простых чисел. Тогда имеют место следующие два утверждения.*

1. *Если порядок элемента a группы G конечен, то a — мощный элемент группы G.*

2. *Если порядок элемента a группы G бесконечен, то для элемента a следующие три условия равносильны:*

$(*)$ *элемент a является π-мощным;*

$(**)$ *для каждого $p \in \pi$ элемент a является p-мощным;*

$(***)$ *для каждого $p \in \pi$ и для любого целого числа $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть a — элемент конечного порядка группы G. Если G — конечно порожденная метабелева группа или финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа, то элемент a является мощным в силу леммы 1. Если G — финитно аппроксимируемая абелева группа или финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга, то элемент a является мощным в силу леммы 4.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы G. Условия $(*)$ и $(**)$ равносильны по лемме 9. Из условия $(*)$ следует условие $(***)$ в силу леммы 7. Из условия $(***)$ следует условие $(**)$ по следующим леммам: по лемме 10, если G — финитно аппроксимируемая абелева группа; по лемме 12, если G — конечно порожденная метабелева группа; по лемме 14, если G — финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга; по лемме 17, если G — финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть G — конечно порожденная метабелева группа (или финитно аппроксимируемая абелева группа, или финитно аппроксимируемая нильпотентная группа конечного ранга, или финитно аппроксимируемая метабелева FATR-группа), и пусть π — множество простых чисел.*

Тогда для группы G следующие три условия равносильны.

1. *Группа G является π-мощной.*

2. *В группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.*

3. *Группа G является почти π-мощной.*

Доказательство. Очевидно, что из условия 1 следует условие 3. Из условия 3 следует условие 2 по лемме 8. Остается проверить, что из условия 2 следует условие 1.

Пусть выполняется условие 2. Покажем, что выполняется условие 1, т. е. что любой элемент $a \in G$ является π-мощным. Если порядок элемента a конечен, то по лемме 18 a — мощный (а значит, и π-мощный) элемент группы G. Если порядок элемента a бесконечен, то в силу условия 2 для элемента a выполняется условие $(***)$ из леммы 18, а значит, и равносильное ему условие $(*)$, т. е. элемент a является π-мощным. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа (или конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью полициклической), и пусть π — множество простых чисел. Теорема 2 утверждает, что следующие три условия равносильны.

1. Группа G является почти π-мощной.

2. В группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.

3. В группе G существует подгруппа H конечного индекса такая, что все элементы из H являются π-мощными элементами группы G.

Очевидно, что из условия 3 следует условие 1. По лемме 8 из условия 1 следует условие 2. Следующие две леммы показывают, что из условия 2 следует условие 3.

Лемма 20. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа, π — множество простых чисел. Пусть группа G не содержит p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.*

Тогда в группе G существует подгруппа H конечного индекса такая, что все элементы из H являются π-мощными в группе G.

Доказательство. Пусть F — подгруппа Фиттинга группы G. В силу предложений 5 и 7 группа F нильпотентна, а фактор-группа G/F является полициклической. По лемме 16 в полициклической группе G/F существует подгруппа без кручения H/F конечного индекса такая, что все элементы из H/F являются мощными в G/F.

Покажем, что любой элемент $a \in H$ является π-мощным в G.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin F$. В этом случае aF — неединичный элемент группы H/F. Все неединичные элементы группы H/F (в том числе и элемент aF) являются мощными элементами бесконечного порядка группы G/F. Поэтому a — мощный (а значит, π-мощный) элемент группы G.

Если $a \in F$ и порядок элемента a конечен, то по лемме 6 a — мощный (а значит, π-мощный) элемент группы G.

Остается рассмотреть случай, когда $a \in F$ и порядок элемента a бесконечен. По условию леммы в группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π. Поэтому для любого числа p из π и для любого целого $k \neq 0$ элемент a^k не является p-полным в группе G (а значит, и в F). Поэтому в силу леммы 15 элемент a является p-мощным в группе G для любого числа p из π. Но тогда по лемме 9 элемент a является π-мощным в группе G.

В любом из возможных случаев элемент $a \in H$ является π-мощным в G. По построению H имеет конечный индекс в G. Лемма доказана.

Лемма 21. *Пусть конечно порожденная группа G содержит нормальную абелеву подгруппу A такую, что фактор-группа G/A является полициклической. Пусть π — множество простых чисел, и пусть группа G не содержит p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого числа p из π.*

Тогда в группе G существует подгруппа H конечного индекса такая, что все элементы из H являются π-мощными в группе G.

Доказательство. По лемме 16 в полициклической группе G/A существует подгруппа без кручения H/A конечного индекса такая, что все элементы из H/A являются мощными в G/A. Тогда H — искомая подгруппа конечного индекса группы G, т. е. любой элемент $a \in H$ является π-мощным в G. Проверка этого утверждения полностью повторяет соответствующий фрагмент доказательства леммы 20: достаточно лишь заменить в последнем F на A и сослаться на леммы 5 и 11 вместо лемм 6 и 15 соответственно. Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы 3

Здесь (как и выше) через π_G будем обозначать множество всех простых чисел p таких, что в группе G нет p-полных элементов бесконечного порядка. Теорема 3 распадается на следующие две леммы.

Лемма 22. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа. Тогда множество π_G имеет конечное дополнение в множестве всех простых чисел.*

Доказательство. Лемма 22 вытекает из следующих двух утверждений.

1. Если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами, то $p \in \pi_G$. Это утверждение совпадает со второй частью леммы 8.

2. Финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p. Это утверждение вытекает из предложений 8 и 9.

Лемма доказана.

Лемма 23. *Пусть G — конечно порожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной. Тогда множество π_G имеет конечное дополнение в множестве всех простых чисел.*

Доказательство. Обозначим через A какую-нибудь нормальную абелеву подгруппу группы G такую, что фактор-группа G/A нильпотентна. Обозначим через T периодическую часть группы A. Фактор-группа G/T конечно порождена и является расширением абелевой группы A/T, не имеющей кручения, с помощью конечно порожденной нильпотентной группы. Поэтому G/T почти вся без кручения. Тогда по предложению 4 получаем следующее утверждение:

($*$) группа G/T почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.

Далее, в силу второй части леммы 8 имеет место следующее утверждение:

($**$) если группа G/T почти аппроксимируема конечными p-группами, то $p \in \pi_{G/T}$.

Заметим еще, что если x — p-полный элемент бесконечного порядка группы G, то xT — p-полный элемент бесконечного порядка группы G/T. Поэтому имеет место следующее включение:

($***$) множество $\pi_{G/T}$ содержится в множестве π_G.

Из утверждений ($*$), ($**$) и ($***$) следует, что множество π_G имеет конечное дополнение в множестве всех простых чисел. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allenby R.B.J.T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.
2. *Hartley B., Lennox J. C., Rhemtulla A. H.* Cyclically separated groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1982. V. 26. P. 355–384.
3. *Poland J.* Finite potent groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1981. V. 23, N 1. P. 111–120.
4. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
5. *Азаров Д. Н.* О слабой π–мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
6. *Азаров Д. Н.* О почти мощности некоторых групп и свободных конструкций // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1189–1203.
7. *Азаров Д. Н.* О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1130.
8. *Азаров Д. Н.* О π-мощности нисходящих HNN-расширений групп // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 775–784.
9. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.
10. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups (IV) // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
11. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.

12. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.

13. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.

14. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2014. № 8. С. 18–29.

15. *Wehrfritz, B. A. F.* Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank // Boll. Unione Mat. Ital. 2016. V. 9, N 3. P. 319–322.

16. *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 385–388.

17. *Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства ограниченных нильпотентных групп и их древесных произведений // Изв. вузов. Математика. 2025. № 4. С. 60–70.

Поступила в редакцию 22 марта 2025 г.
После доработки 10 июля 2025 г.
Принята к публикации 25 июля 2025 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru