Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 512.542

СИЛЬНАЯ π–ТЕОРЕМА СИЛОВА ДЛЯ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1

В. Д. Шепелев

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа называется *π-группой*, если все простые делители ее порядка принадлежат π. Следуя Виланду, говорят, что для конечной группы G верна *π-теорема Силова*, если в G сопряжены все максимальные π-подгруппы; если же π-теорема Силова верна для каждой подгруппы группы G, то говорят, что для G верна *сильная π-теорема Силова.* Вопрос о том, для каких конечных простых неабелевых групп верна сильная π-теорема Силова, поставлен Виландом в 1979 г. В статье завершено арифметическое описание групп лиева типа ранга 1, удовлетворяющих сильной π-теореме Силова.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.415

Ключевые слова: π-теорема Силова, сильная π-теорема Силова, группы лиева типа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и термин «группа» всюду означает «конечная группа». Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Для натурального числа n символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей n. Для группы G полагаем $\pi(G) = \pi(|G|)$. Группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой.* Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой*, если H является π-группой и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.

Используя терминологию Ф. Холла [1], будем говорить, что конечная группа G *обладает свойством* D_π (пишем $G \in D_\pi$), если все ее максимальные π-подгруппы сопряжены. В терминологии Виланда [2] о группе со свойством D_π говорят также, что для нее *верна π-теорема Силова.*

Учитывая теорему Силова, легко видеть, что свойство D_π для группы G эквивалентно тому, что группа G содержит холлову π-подгруппу, все холловы π-подгруппы группы G сопряжены и всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

В работах Ф. Холла [3, 4] доказано, что группа одновременно для всех множеств π обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда она разрешима.

Известно, что в общем случае свойство D_π не наследуется подгруппами (см. пример в [5]). В 1979 г. Виланд на конференции по конечным группам в г. Санта-Круз поставил следующую проблему.

Работа выполнена за счет РНФ, проект № 24-21-00163, https://rscf.ru/project/24-21-00163/.

Проблема А [6, вопрос (h)]. *В каких простых конечных группах верна сильная π-теорема Силова: все подгруппы обладают свойством D_π?*

Следуя [7], через W_π будем обозначать класс всех конечных групп, для которых справедлива сильная π-теорема Силова. Если конечная группа G обладает свойством W_π, то для краткости будем писать $G \in W_\pi$. Таким образом, проблема А может быть переформулирована эквивалентным образом: *какие простые конечные группы обладают свойством W_π?*

Известно [7, следствие 6.7], что группа обладает свойством W_π тогда и только тогда, когда любой ее композиционный фактор обладает данным свойством. Поэтому полное решение проблемы А позволило бы о любой конечной группе с известным композиционным строением сказать, обладает она свойством W_π или нет.

Проблема А к настоящему моменту решена для спорадических [8] и знакопеременных групп [9, теорема 3], а также для серии групп $\mathrm{PSL}_2(q)$ [5] (см. теорему 1 ниже).

В данной статье будет предложено решение проблемы Виланда для оставшихся серий групп лиева типа ранга 1, т. е. групп ${}^2B_2(q) \simeq \mathrm{Sz}(q)$ (теорема 2), ${}^2G_2(q) \simeq \mathrm{Ree}(q)$ (теорема 3) и ${}^2A_2(q) \simeq \mathrm{PSU}_3(q)$ (теорема 4).

Любая группа L лиева типа содержит секцию, изоморфную одной из групп лиева типа ранга 1 с тем же базовым полем. Поскольку свойство W_π наследуется секциями[1)], выполнение одного из условий одной из указанных теорем является необходимым для того, чтобы L обладала свойством W_π.

Всюду символом $\gcd(a,b)$ будем обозначать наибольший общий делитель целых чисел a и b.

Пусть $m > 1$ и a — целые числа, причем $\gcd(a,m) = 1$. *Мультипликативным порядком числа a по модулю m* будем называть число

$$\mathrm{ord}_m\, a = \min\{d \in \mathbb{N} : a^d \equiv 1 \pmod{m}\}.$$

Также нам понадобится обозначение, введенное в [5]. Пусть r — простое число и a — целое число, взаимно простое с r. По определению полагаем

$$\mathrm{ord}_r^*\, a := \mathrm{ord}_{r\cdot\gcd(2,r)}\, a = \begin{cases} \mathrm{ord}_r\, a, & \text{если } r \text{ нечетно},\\ \mathrm{ord}_4\, a, & \text{если } r = 2.\end{cases}$$

Как упомянуто выше, решение проблемы Виланда для серии групп $\mathrm{PSL}_2(q)$, известно и может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 [5]. *Пусть p — простое число, $q = p^{2^k m}$ для некоторых нечетного числа m и неотрицательного целого числа k. Положим также*

$$\overline{q}_2 := \sqrt[2^k]{q} = p^m \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(L_2(q)).$$

Тогда $L_2(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:

(W_1^L) $\pi(L_2(q)) = \tau$;

(W_2^L) $p = 2$, $\tau = \{2\}$;

(W_3^L) $2 \notin \tau$, $p \in \tau$, $|\tau \cap \{3,5\}| \le 1$ *и* $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(\overline{q}_2 - 1)$;

(W_4^L) $p \notin \tau$, $|\tau \cap \{2,3,5\}| \le 1$ *и* $\mathrm{ord}_r^*\, \overline{q}_2 = \mathrm{ord}_s^*\, \overline{q}_2$ *для любых* $r, s \in \tau$.

Основными результатами работы являются теоремы 2–4.

Необходимые и достаточные условия на множество простых чисел π, при которых группа $\mathrm{Sz}(q)$ обладает свойством D_π, известны (см. [9, теорема 3]). Таким образом, можем на основании этого сформулировать теорему 2.

[1)] Под секциями группы понимаются гомоморфные образы ее подгрупп.

Теорема 2. *Положим $q = 2^n$, где n — натуральное нечетное число. Тогда группа $\mathrm{Sz}(q)$ обладает свойством W_π, если и только если $\mathrm{Sz}(q)$ обладает свойством D_π, т. е. если выполнено одно из следующих утверждений:*
(W_1^S) $\pi(\mathrm{Sz}(q)) = \tau$;
(W_2^S) $\tau = \{2\}$;
(W_3^S) $\tau \subseteq \pi(q-1)$;
(W_4^S) $\tau \subseteq \pi(2^n - \varepsilon 2^{(n+1)/2} + 1)$, *где* $\varepsilon \in \{+,-\}$.

Теорема 3. *Пусть $q = 3^{3^k \cdot m}$ для некоторого неотрицательного k и нечетного m такого, что $\gcd(m,3) = 1$. Положим также*

$$n := 3^k \cdot m, \quad \overline{q}_3 := \sqrt[3^k]{q} = 3^m \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(q)).$$

Тогда $\mathrm{Ree}(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:
(W_1^R) $\pi(\mathrm{Ree}(q)) = \tau$ *или* $|\tau| \leq 1$;
(W_2^R) $2 \notin \tau$ *и* $\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q-1)$;
(W_3^R) $\tau \subseteq \pi(3^n - \varepsilon 3^{(n+1)/2} + 1)$, *где* $\varepsilon \in \{+,-\}$;
(W_4^R) $2 \in \tau$ *и* $\tau \subseteq \pi(\overline{q}_3 + 1)$.

Теорема 4. *Пусть p — простое число, $q = p^{2^a \cdot 3^b \cdot m}$, где $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\gcd(m,6) = 1$ и $a, b \geq 0$. Положим также*

$$\overline{q}_2 := \sqrt[2^a]{q} = p^{3^b \cdot m}, \quad \overline{q}_3 := \sqrt[3^b]{q} = p^{2^a \cdot m} \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(\mathrm{PSU}_3(q)).$$

Тогда $\mathrm{PSU}_3(q) \in W_\pi$, если и только если имеет место одно из следующих утверждений:
(W_1^U) $\pi(\mathrm{PSU}_3(q)) = \tau$ *или* $|\tau| \leq 1$;
(W_2^U) $2 \notin \tau$, $p \in \tau$, $|\tau \cap \{3,5\}| \leq 1$ *и* $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_2 - 1)$;
(W_3^U) $2, p \notin \tau, \tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q^2 - q + 1)$, *причем если* $3 \in \tau$, *то* $q \equiv 4, 7 \pmod 9$;
(W_4^U) $p \notin \tau, |\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$, $\tau \subseteq \pi(q-1)$ *и* $\mathrm{ord}_r^* \overline{q}_2 = \mathrm{ord}_s^* \overline{q}_2$ *для любых* $r, s \in \tau$;
(W_5^U) $p \notin \tau, |\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$, $|\tau \cap \{2,7\}| \leq 1$, $\tau \subseteq \pi(q+1)$ *и* $\mathrm{ord}_r^* \overline{q}_3 = \mathrm{ord}_s^* \overline{q}_3$ *для любых* $r, s \in \tau$.

Легко видеть, что существуют примеры, при которых выполняются условия (W_1^S)–(W_4^S), (W_1^R)–(W_4^R) и (W_1^U). Приведем примеры, показывающие, что условия (W_2^U)–(W_5^U) теоремы 4 могут выполняться для определенных множеств π и бесконечных серий q.

Пример 1. Пусть n — натуральное число, $\mathrm{PSU}_3(7^n)$ и $\pi = \{3,7\}$. Ясно, что в этом случае справедливо утверждение (W_2^U).

Пример 2. Пусть n — натуральное число такое, что $\gcd(n,6) = 1$, $\mathrm{PSU}_3(17^n)$ и $\pi = \{7,13\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_3^U). Заметим, что

$$17^{2n} - 17^n + 1 \equiv 3^n - 4^n + 1 \pmod{13} \quad \text{и} \quad 17^{2n} - 17^n + 1 \equiv 2^n - 3^n + 1 \pmod 7.$$

Представим число n в виде $n = 6k + i$, где $i \in \{1,5\}$. Тогда

$$3^n - 4^n + 1 \equiv 3^i - 4^i + 1 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13},$$

$$2^n - 3^n + 1 \equiv 2^i - 3^i + 1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7.$$

Следовательно, для $\mathrm{PSU}_3(17^n)$ выполнено утверждение (W_3^U).

Пример 3. Пусть n — натуральное число, $\mathrm{PSU}_3(157^n)$ и $\pi = \{3,13\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_4^U). Представим число в виде $n = 2^a \cdot s$, где s нечетно. Тогда $\overline{q}_2 = 157^s$. Поскольку $157 \equiv 1 \pmod{3,13}$, имеем

$$\mathrm{ord}_3\, 157^s = \mathrm{ord}_{13}\, 157^s = 1.$$

Таким образом, для $\mathrm{PSU}_3(157^n)$ имеет место утверждение (W_4^U).

Пример 4. Пусть n — натуральное число такое, что $\gcd(n,6) = 1$, $\mathrm{PSU}_3(101^n)$ и $\pi = \{3,17\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_5^U). Заметим, что в этом случае $101^n = q = \overline{q}_3$. Легко видеть, что

$$\mathrm{ord}_3\, 101 = \mathrm{ord}_{17}\, 101 = 2,$$

откуда

$$\mathrm{ord}_3\, 101^n = \mathrm{ord}_{17}\, 101^n = \frac{2}{\gcd(2,n)} = 2.$$

В [5] были также приведены примеры множеств π и бесконечных серий q, при которых выполняются условия (W_2^L)–(W_4^L).

Обозначения и предварительные результаты. Будут использоваться обозначения из [10, 11]. Известно (см. [11]), что

$$|\,\mathrm{Sz}(q)| = q^2(q-1)(q^2+1),\ |\,\mathrm{Ree}(q)| = q^3(q-1)(q^3+1),\ |\,\mathrm{SU}_3(q)| = q^2(q^2-1)(q^3+1).$$

Проективная специальная линейная группа $\mathrm{PSL}_2(q)$ над полем из q элементов будет также обозначаться символом $L_2(q)$. Утверждения, требующие использования классификации конечных простых групп, будут помечены символом (mod CFSG).

Следующая лемма является следствием теоремы Холла [3].

Лемма 1. *Если G — разрешимая группа, то $G \in W_\pi$ для любого множества π.*

В частности, из леммы 1 следует, что группа обладает свойством W_π, если и только если все ее неразрешимые подгруппы обладают свойством D_π.

Лемма 2 [10, табл. 8.16]. *Любая максимальная подгруппа группы $\mathrm{Sz}(q)$ принадлежит указанному ниже списку и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $\mathrm{Sz}(q)$ в качестве подгруппы:*

(1) $E_q^{1+1} : C_{q-1}$;
(2) $D_{2(q-1)}$;
(3) $(q - \sqrt{2q} + 1) : 4$;
(4) $(q + \sqrt{2q} + 1) : 4$;
(5) $\mathrm{Sz}(q_0)$, *где* $q = q_0^r$, r *простое и* $q_0 \neq 2$.

Лемма 3 [12, лемма 2.1]. *Если a и b — нечетные числа, причем $a \mid b$, то числа $2^a \pm \chi(a) \cdot 2^{(a+1)/2} + 1$ делят соответственно числа $2^b \pm \chi(b) \cdot 2^{(b+1)/2} + 1$, где*

$$\chi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -1, & \lambda \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Лемма 4 [13, лемма 2, (mod CFSG)]. *Класс групп W_π замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений.*

Лемма 5 [10, табл. 8.43]. *Любая максимальная подгруппа группы* $\mathrm{Ree}(q)$ *принадлежит указанному ниже списку и при соблюдении указанных условий присутствует в группе* $\mathrm{Ree}(q)$ *в качестве подгруппы.*

(1) $E_q^{1+1+1} : (q-1)$;
(2) $2 \times L_2(q)$;
(3) $(2^2 \times D_{\frac{q+1}{2}}) : 3$;
(4) $(q - \sqrt{3q} + 1) : 6$;
(5) $(q + \sqrt{3q} + 1) : 6$;
(6) $\mathrm{Ree}(q_0)$, *где* $q = q_0^r$, r *— простое число.*

Лемма 6. *Пусть* $q = 3^n$ *для некоторого нечетного числа* n *и* $\sigma := \pi \cap \pi(L_2(q))$. *Тогда* $L_2(q) \in W_\pi$, *если и только если выполнено одно из следующих условий:*

$(\widetilde{\mathrm{L}_1})$ $\pi(L_2(q)) = \sigma$;
$(\widetilde{\mathrm{L}_2})$ $2 \notin \sigma$, $3 \in \sigma$ *и* $\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q-1)$;
$(\widetilde{\mathrm{L}_3})$ $3 \notin \sigma$ *и* $\mathrm{ord}_r^* q = \mathrm{ord}_s^* q$ *для любых* $r, s \in \sigma$.

Доказательство. Данный факт является следствием теоремы 1 и того, что при нечетных n число $|L_2(3^n)|$ не делится на 5. $\square$

Лемма 7 [9, теорема 3]. *Пусть* $q = 3^n$, *где* n *— натуральное нечетное число. Положим* $\sigma := \pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(q))$. *Тогда группа* $\mathrm{Ree}(q)$ *обладает свойством* D_π, *если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(D_1) $\pi(\mathrm{Ree}(q)) = \sigma$ *или* $|\sigma| \leq 1$;
(D_2) $2 \notin \sigma$, $3 \in \sigma$ *и* $\sigma \subseteq \{3\} \cup \pi(3^n - 1)$;
(D_3) $\sigma \subseteq \pi(3^n - \varepsilon 3^{(n+1)/2} + 1)$, *где* $\varepsilon \in \{+, -\}$;
(D_4) $2 \notin \sigma$ *и* $\sigma \subseteq \pi(3^n - 1)$;
(D_5) $3, 7 \notin \sigma$, $2 \in \sigma$ *и* $\sigma \subseteq \pi(3^n + 1)$.

Лемма 8. *Пусть* a *и* b *— нечетные числа, причем* $a \mid b$ *и* $\frac{b}{a}$ *не делится на* 3. *Тогда числа* $3^a \pm 3^{(a+1)/2} + 1$ *делят соответственно числа* $3^b \pm \psi(\frac{b}{a}) \cdot 3^{(b+1)/2} + 1$, *где*

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & \lambda \equiv \pm 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

Доказательство следует из доказательства леммы 6 в [14]. $\square$

Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 9. *Пусть* r, m *— взаимно простые натуральные числа и* k *— натуральное число. Тогда справедливо следующее равенство:*

$$\mathrm{ord}_r\, m^k = \frac{\mathrm{ord}_r\, m}{\gcd(\mathrm{ord}_r\, m, k)}.$$

В частности, $\mathrm{ord}_r\, m^k \mid \mathrm{ord}_r\, m$.

Лемма 10 [10, табл. 8.5, 8.6]. *Пусть* $q = p^n$ *для некоторого натурального числа* n *и простого числа* p. *Тогда любая максимальная подгруппа группы* $\mathrm{SU}_3(q)$ *принадлежит списку, указанному ниже, и при соблюдении указанных условий присутствует в группе* $\mathrm{SU}_3(q)$ *в качестве подгруппы:*

(1) $E_q^{1+2} : (q^2 - 1)$;
(2) $\mathrm{GU}_2(q)$;
(3) $(q+1)^2 : S_3$, *если* $q \neq 5$;
(4) $(q^2 - q + 1) : 3$, *если* $q \neq 3, 5$;

(5) $\mathrm{SU}_3(q_0)$, *где* $q = q_0^r$, r *простое и нечетное.*
(6) $(q+1,3) \times \mathrm{SO}_3(q)$, *где* q *нечетно и* $q \geq 7$;
(7) $3_+^{1+2} : Q_8.\frac{(q+1,9)}{3}$, *где* $p = q \equiv 2 \pmod 3$, $q \geq 11$;
(8) $(q+1,3) \times L_2(7)$ *при условии* $q = p \equiv 3,5,6 \pmod 7$;
(9) $3^{\cdot}A_6$ *при условии* $q = p \equiv 11,14 \pmod{15}$;
(10) $3^{\cdot}A_6{}^{\cdot}2_3$ *при условии* $q = 5$;
(11) $3^{\cdot}A_7$ *при условии* $q = 5$.

Лемма 11 [9, теорема 3]. *Пусть $n \geq 5$ — натуральное число. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) *группа A_n обладает свойством D_π;*
2) *группа A_n обладает свойством W_π;*
3) *справедливо одно из соотношений: $|\pi \cap \pi(n!)| \leq 1$ или $\pi \subseteq \pi(n!)$.*

Лемма 12 [15, гл. II, теорема 8.27]. *Любая максимальная подгруппа группы $L_2(q)$ принадлежит списку, указанному ниже, и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $L_2(q)$ в качестве подгруппы.*
(1) *элементарная абелева p-группа;*
(2) *циклическая группа порядка z, где $z \mid \frac{p^n \pm 1}{e}$ и $e = (p^n - 1, 2)$;*
(3) *группа диэдра порядка $2z$, где z из (2);*
(4) *знакопеременная группа A_4 при условии $p > 2$ или $p = 2$ и $n \equiv 0 \pmod 2$;*
(5) *симметрическая группа S_4 при условии $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$;*
(6) *знакопеременная группа A_5 при условии $p = 5$ или $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 5$;*
(7) *полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^l и циклической группы порядка t при условии, что $l \leq n$, $t \mid p^l - 1$ и $t \mid p^n - 1$;*
(8) *группа $L_2(p^l)$, если $l \mid n$;*
(9) *группа $\mathrm{PGL}_2(p^l)$, если $2l \mid n$.*

В частности, группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5, если и только если $5 \in \pi\,(L_2(q))$.

Лемма 13. *Группа $L_2(7)$ является секцией группы $\mathrm{SU}_3(q)$ если и только либо $L_2(7) \leq L_2(q)$, либо $7 \in \pi(q^3+1)$ и $q = p^m$, где m — нечетное число.*

Доказательство. Из леммы 10 следует, что группа $L_2(7)$ является секцией группы $\mathrm{SU}_3(q)$, если и только если имеет место один из следующих случаев:
1) $L_2(7) \leq L_2(q)$;
2) $L_2(7) \leq (q+1,3) \times L_2(7) \leq \mathrm{SU}_3(p) \leq \mathrm{SU}_3(q)$.

Рассмотрим случай 2. По лемме 10 условие $\mathrm{SU}_3(p) \leq \mathrm{SU}_3(q)$ эквивалентно тому, что $q = p^m$ для некоторого нечетного числа m. Группа $(q+1,3) \times L_2(7)$ является секцией группы $\mathrm{SU}_3(p)$ согласно лемме 10, если и только если $p \equiv 3,5,6 \pmod 7$. Остается установить эквивалентность условия $p \equiv 3,5,6 \pmod 7$ и соотношения $7 \in \pi(q^3+1)$. Ясно, что если $p \equiv 3,5,6 \pmod 7$, то $7 \in \pi(q^3+1)$. Допустим, обратное неверно. Очевидно, что $p \not\equiv 0 \pmod 7$. Если $p \equiv 1,2 \pmod 7$, то

$$q^3 + 1 = (p^3)^m + 1 \equiv 1^m + 1 = 2 \pmod 7;$$

противоречие. □

Лемма 14. *Группа A_7 является секцией группы $\mathrm{SU}_3(q)$, если и только если $q = 5^m$ для некоторого нечетного числа m.*

Доказательство. Из леммы 12 следует, что группа $L_2(q)$ не содержит секции, изоморфной группе A_7. Следовательно, A_7 является секцией группы

$\mathrm{SU}_3(q)$ согласно лемме 10, если и только если

$$3^{\cdot}A_7 \leq \mathrm{SU}_3(p) \leq \mathrm{SU}_3(q).$$

Условие $\mathrm{SU}_3(p) \leq \mathrm{SU}_3(q)$ эквивалентно тому, что $q = p^m$ для некоторого нечетного числа m. Из леммы 10 следует, что $3^{\cdot}A_7 \leq \mathrm{SU}_3(p)$, если и только если $p = 5$. $\square$

Лемма 15 [9, теорема 3]. *Пусть $q = p^n$ для некоторого простого числа p и натурального числа n. Положим также $\sigma := \pi \cap \pi(\mathrm{PSU}_3(q))$. Тогда $\mathrm{PSU}_3(q) \in D_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(D_1) $\pi(\mathrm{PSU}_3(q)) = \sigma$ *или* $|\sigma| \leq 1$;

(D_2) $2 \notin \sigma$, $p \in \sigma$, $\sigma \subseteq \{p\} \cup \pi(q-1)$;

(D_3) $2, p \notin \sigma$, $3 \in \sigma$, $\mathrm{ord}_3(q) = 1$, $(q^2-1)_3 = 3$ *и* $\mathrm{ord}_s(q) = 6$ *для всех* $s \in \sigma \setminus \{3\}$;

(D_4) $2, p \notin \sigma$, $\mathrm{ord}_s(q) \in \{1, 2, 6\}$ *и значение* $\mathrm{ord}_s(q)$ *одинаково для всех* $s \in \sigma$;

(D_5) $3, p \notin \sigma$, $2 \in \sigma$, $\sigma \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, *где число* $\varepsilon = \pm 1$ *таково, что* $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.

В частности, если $2, 3 \in \pi$, то группа $\mathrm{PSU}_3(q)$ обладает свойством W_π, если и только если $\pi(\mathrm{PSU}_3(q)) = \sigma$.

Лемма 16. *Пусть $q = p^n$ для некоторого простого числа p и натурального числа n. Если группа $\mathrm{SU}_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе A_6, то $5 \in \{p\} \cup \pi(q^2 - 1)$.*

Доказательство. Если $\mathrm{SU}_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе A_6, то

$$5 \in \pi(\mathrm{SU}_3(q)) = \{p\} \cup \pi(q^2 - 1) \cup \pi(q^3 + 1).$$

Лемма будет доказана, если установим, что либо $p = 5$, либо $\mathrm{ord}_5\, q \leq 2$. Таким образом, можно считать, что $q \equiv \pm 2 \pmod 5$. Заметим, что

$$q^3 + 1 \equiv \begin{cases} -1 \pmod 5, & q \equiv 2 \pmod 5, \\ -2 \pmod 5, & q \equiv -2 \pmod 5. \end{cases}$$

Отсюда вытекает следующее: если $q \equiv \pm 2 \pmod 5$, то $5 \notin \pi(\mathrm{SU}_3(q))$; противоречие. $\square$

Лемма 17 [9, теорема 3]. *Пусть π — множество простых чисел такое, что $2 \in \pi$ и $|\pi \cap \pi(L_2(q))| > 1$. Предположим, что $q = p^n$, где p — простое и n — натуральное числа. Тогда $L_2(q) \in D_\pi$, если и только если $3, p \notin \pi$ и $\pi \cap \pi(L_2(q)) \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.*

Доказательство теоремы 2. Дизъюнкция утверждений (W_1^S)–(W_4^S), как было отмечено, — необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось $\mathrm{Sz}(q) \in D_\pi$. В частности, если $\mathrm{Sz}(q) \in W_\pi$, то $\mathrm{Sz}(q) \in D_\pi$ и выполнено одно из (W_1^S)–(W_4^S). Далее доказывается достаточность каждого из этих условий.

Отметим, что если в условии теоремы $n = 1$, то группа $\mathrm{Sz}(q) = \mathrm{Sz}(2)$ является разрешимой и согласно лемме 1 обладает свойством W_π для любого множества простых чисел π. Следовательно, для данной группы свойства D_π и W_π эквивалентны и выполняется одно из утверждений (W_1^S)–(W_4^S). Таким образом, считаем, что $n > 1$.

Из леммы 2 вытекает, что в качестве неразрешимых подгрупп группы $\mathrm{Sz}(2^n)$ выступают только группы $\mathrm{Sz}(2^t)$, где $t > 1$ и $t \mid n$. Таким образом, согласно замечанию после леммы 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что если $\mathrm{Sz}(2^n) \in D_\pi$, то $\mathrm{Sz}(2^t) \in D_\pi$ для любого числа $t \mid n$.

Отметим, что если $|\tau| \leq 1$ или $\pi(\mathrm{Sz}(q)) = \tau$, то $\mathrm{Sz}(q) \in W_\pi$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $|\tau| > 1$ и $\mathrm{Sz}(q)$ не является π-группой. Следовательно, мы докажем теорему 2, установив достаточность утверждений (W_3^S) и (W_4^S) для того, чтобы $\mathrm{Sz}(2^t) \in D_\pi$ для любого числа $t \mid n$.

Случай (W_3^S). Если докажем, что для любого $t \mid n$ справедливо равенство $\pi \cap \pi(2^{2t}+1) = \varnothing$, то $\pi \cap \pi(\mathrm{Sz}(2^t)) \subseteq \pi(p^t - 1)$ и $\mathrm{Sz}(2^t) \in D_\pi$ согласно условию (W_3^S). Предположим, что существует число $r \in \pi \cap \pi(\mathrm{Sz}(2^t))$ такое, что $r \in \pi(2^{2t}+1)$. Тогда в силу нечетности числа n справедливы следующие соотношения:

$$r \mid 2^{2t} + 1 \mid 2^{2n} + 1 = q^2 + 1.$$

Таким образом,

$$r \in \pi(q-1) \quad \text{и} \quad r \in \pi(q^2+1),$$

что невозможно в силу взаимной простоты чисел $q-1$ и q^2+1.

Случай (W_4^S). Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{Sz}(2^t) \notin D_\pi$. В силу справедливости цепочки включений

$$\pi \cap \pi(2^t - 1) \subseteq \pi \cap \pi(2^n - 1) = \pi \cap \pi(q-1)$$

и взаимной простоты чисел $q-1$ и $q^2+1 = (2^n - 2^{(n+1)/2} + 1) \cdot (2^n + 2^{(n+1)/2} + 1)$ имеем $\pi \cap \pi(2^t - 1) = \varnothing$.

Следовательно, существуют различные числа $r, s \in \pi \cap \pi(\mathrm{Sz}(2^t))$ такие, что

$$r \in \pi(2^t + \chi(t) \cdot 2^{(t+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(2^t - \chi(t) \cdot 2^{(t+1)/2} + 1),$$

где функция χ определена в лемме 3. Из этой же леммы вытекают соотношения

$$r \in \pi(2^n + \chi(n) \cdot 2^{(n+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(2^n - \chi(n) \cdot 2^{(n+1)/2} + 1);$$

противоречие с условием (W_4^S).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В качестве максимальных неразрешимых подгрупп группы $\mathrm{Ree}(q)$ согласно лемме 5 выступают группы из пп. (2) и (6), т. е. $2 \times L_2(q)$ и $\mathrm{Ree}(q_0)$, где $q = q_0^r$ и r — простое число. При этом из леммы 4 следует, что группа $2 \times L_2(q)$ обладает свойством W_π, если и только если группа $L_2(q)$ обладает данным свойством. С учетом того, что группа $\mathrm{Ree}(q)$ рассматривается над полем, порядок которого равен $q = 3^n$, где n — нечетное число, необходимые и достаточные условия на множество простых чисел π, при которых $L_2(q) \in W_\pi$, указаны в лемме 6. Таким образом, согласно замечанию после леммы 1 доказательство теоремы сводится к доказательству необходимости и достаточности утверждений (W_1^R)–(W_4^R) для того, чтобы группы $\mathrm{Ree}(3^t)$, где $t \mid n$, обладали свойством D_π и было выполнено одно из условий леммы 6.

Необходимость. Если $|\tau| \leq 1$ или $\pi(\mathrm{Ree}(q)) = \tau$, то для группы $\mathrm{Ree}(q)$ справедливо утверждение (W_1^R). Поэтому будем считать, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\mathrm{Ree}(q)) \not\subseteq \pi$.

Если $2 \notin \tau$, то с необходимостью выполнено одно из утверждений (W_2^R)–(W_3^R) в силу леммы 7. Пусть теперь $2 \in \tau$. Докажем, что выполнено (W_4^R).

Поскольку $2 \in \tau$, для группы $\mathrm{Ree}(q)$ выполнено условие (D_5) леммы 7. В частности, это означает, что $\tau \subseteq \pi(q+1)$. Допустим, существует (нечетное) число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(\overline{q}_3 + 1)$. Тогда по лемме 9 верно равенство $\mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^a$, где $1 \le a \le k$ — целое число. Это означает, что

$$r \in \pi\big(\overline{q}_3^{3^a} + 1\big) \subseteq \pi\big(\mathrm{Ree}\big(\overline{q}_3^{3^{a-1}}\big)\big).$$

Следовательно, поскольку $\mathrm{Ree}(q) \in W_\pi$ и $2 \in \tau$, для группы $\mathrm{Ree}(\overline{q}_3^{3^{a-1}})$ выполняется условие (D_5). Так как $\mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^a$, по лемме 9 имеем

$$r \in \pi \cap \pi\big(\mathrm{Ree}\big(\overline{q}_3^{3^{a-1}}\big)\big) \quad \text{и} \quad \mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3^{3^{a-1}} = 6.$$

Отсюда следует, что $r \notin \pi\big(\overline{q}_3^{3^{a-1}} + 1\big)$. Таким образом, для группы $\mathrm{Ree}\big(\overline{q}_3^{3^{a-1}}\big)$ нарушается условие (D_5) леммы 7; противоречие. Необходимость утверждения (W_4^R) установлена.

Достаточность. Случай (W_2^R). Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{Ree}(3^t) \notin D_\pi$. По лемме 7 это означает, что для данной группы нарушается одно из условий (D_2) или (D_4) в зависимости от принадлежности числа 3 множеству τ. В любом из этих случаев в силу значения порядка группы $\mathrm{Ree}(3^t)$ существует число $r \in \pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(3^t))$ такое, что $r \in \pi(3^{3t} + 1)$. С одной стороны, так как число n нечетно, имеем

$$r \mid 3^{3t} + 1 \mid 3^{3n} + 1 = q^3 + 1.$$

С другой стороны, утверждение (W_2^R) влечет принадлежность $r \in \pi(q-1)$. Следовательно, r делит число $q^3 + 1 - (q^3 - 1) = 2$, откуда $r = 2$; противоречие с условием (W_2^R).

Следовательно, из условий $(\widetilde{\mathrm{L}}_2)$ или $(\widetilde{\mathrm{L}}_3)$ леммы 6 (в зависимости от принадлежности числа 3 множеству π) вытекает, что $L_2(q) \in W_\pi$.

Случай (W_3^R). В силу того, что

$$\begin{aligned}\gcd(3^n - 1, (3^n + 3^{(n+1)/2} + 1) \cdot (3^n - 3^{(n+1)/2} + 1))& \\ = \gcd\left(3^n - 1, \frac{3^{3n}+1}{3^n+1}\right) \mid \gcd(3^n - 1, 3^{3n} + 1) = 2 \notin \tau&\end{aligned}$$

и

$$\gcd(3^n + 1, 3^n \pm 3^{(n+1)/2} + 1) = \gcd(3^n + 1, 3^{(n+1)/2}) = 1,$$

имеет место равенство $\pi \cap \pi(3^{2n} - 1) = \pi \cap \pi(q^2 - 1) = \varnothing$. Таким образом, $\pi \cap \pi(L_2(q)) = \varnothing$, откуда $L_2(q) \in W_\pi$. Поэтому достаточно доказать, что для любого $t \mid n$ группа $\mathrm{Ree}(3^t)$ обладает свойством D_π.

Отметим, что если число $\frac{n}{t}$ делится на 3, то верны следующие соотношения:

$$(3^t + 3^{(t+1)/2} + 1) \cdot (3^t - 3^{(t+1)/2} + 1) = \frac{3^{3t}+1}{3^t+1} \mid \frac{3^{\frac{n}{t}\cdot t}+1}{3^t+1} \mid 3^n + 1.$$

В силу взаимной простоты чисел $3^n + 1$ и $3^n \pm 3^{(n+1)/2} + 1$ заключаем, что $\pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(3^t)) = \varnothing$ и, следовательно, $\mathrm{Ree}(3^t) \in D_\pi$.

Допустим теперь, что $\frac{n}{t}$ не делится на 3. Если $\mathrm{Ree}(3^t) \notin D_\pi$, то для группы $\mathrm{Ree}(3^t)$ нарушается условие (D_3) леммы 7. Таким образом, существуют числа $r, s \in \pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(3^t))$ такие, что

$$r \in \pi(3^t + 3^{(t+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(3^t - 3^{(t+1)/2} + 1).$$

По лемме 8 справедливы соотношения

$$r \in \pi\left(3^n + \psi\left(\frac{n}{t}\right) \cdot 3^{(n+1)/2} + 1\right) \quad \text{и} \quad s \in \pi\left(3^n - \psi\left(\frac{n}{t}\right) \cdot 3^{(n+1)/2} + 1\right);$$

противоречие с условием (W_3^R).

Случай (W_4^R). Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{Ree}(3^t) \notin D_\pi$. Тогда в силу того, что $2 \in \tau$, для данной группы нарушается условие (D_5) леммы 7. Поскольку $\tau \subseteq \pi(\overline{q}_3+1)$, легко установить, что $7 \notin \tau$, так как $7 \mid 3^n+1$ тогда и только тогда, когда $3 \mid n$. Следовательно, существует (нечетное) число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(3^t+1)$. Иными словами, это означает, что $\mathrm{ord}_r\, 3^t = 6$. Действительно, если бы $\mathrm{ord}_r\, 3^t = 1$, то имели бы место следующие соотношения:

$$r \in \pi(3^t-1) \cap \pi(\overline{q}_3+1) \subseteq \pi(3^n-1) \cap \pi(q+1) = \pi(q-1) \cap \pi(q+1) = \{2\};$$

противоречие. Представим число t в виде $t = 3^a \cdot b$, где $a \leq k$ и $b \mid m$. Тогда из леммы 9 вытекают следующие соотношения:

$$\mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^a} = \mathrm{ord}_r(3^{3^a \cdot b})^{\frac{m}{b}} = \frac{\mathrm{ord}_r\, 3^{3^a \cdot b}}{\gcd\bigl(\mathrm{ord}_r\, 3^{3^a \cdot b}, \frac{m}{b}\bigr)} = \frac{6}{\gcd\bigl(6, \frac{m}{b}\bigr)} = 6.$$

Последнее равенство верно, поскольку $\gcd(6, m) = 1$. С другой стороны, из утверждения (W_4^R) следует, что $r \in \tau \subseteq \pi(\overline{q}_3+1)$. Таким образом, по лемме 9 имеем

$$\mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^a} = 6 \mid \mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3 = 2;$$

противоречие.

Остается доказать, что из утверждения (W_4^R) следует, что $L_2(q) \in W_\pi$. Очевидно, что $4 \mid 3^n+1 = q+1$, т. е. $\mathrm{ord}_4\, q = 2$. Кроме того, поскольку $\tau \subseteq \pi(\overline{q}_3+1)$, по лемме 9 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{ord}_r\, q = \mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^k} = \frac{\mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3}{\gcd(3^k, \mathrm{ord}_r\, \overline{q}_3)} = \frac{2}{\gcd(3^k, 2)} = 2$$

для всех $r \in \pi \cap \pi(L_2(q))$.

Таким образом, $L_2(q) \in W_\pi$ согласно условию $(\widetilde{\mathrm{L}}_3)$ леммы 6.

Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 3 и леммы 7 вытекает

Следствие. *Пусть $q = 3^n$, где число n нечетно и не делится на 3. Тогда группа $\mathrm{Ree}(q)$ обладает свойством W_π, если и только если $\mathrm{Ree}(q)$ обладает свойством D_π.*

Доказательство теоремы 4. Отметим, что в силу леммы 4 свойство W_π для групп $\mathrm{PSU}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ эквивалентно, поэтому в дальнейшем будем доказывать справедливость теоремы для $\mathrm{SU}_3(q)$. Кроме того, из леммы 1 вытекает, что группа $\mathrm{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π, если и только если $\mathrm{SU}_3(q) \in D_\pi$ и всякая неразрешимая максимальная подгруппа группы $\mathrm{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π. В качестве таких согласно лемме 10 выступают группы

- $\mathrm{GU}_2(q)$;
- $\mathrm{SU}_3(q_0)$, где $q = q_0^r$, r простое и нечетное.
- $(q+1, 3) \times \mathrm{SO}_3(q)$, где $q \geq 7$ нечетное;
- $(q+1, 3) \times L_2(7)$ при условии $q = p \equiv 3, 5, 6 \pmod 7$ и $q \neq 5$ или $q = 5$;
- $3^{\cdot} A_6$ при условии $q = p \equiv 11, 14 \pmod{15}$;
- $3^{\cdot} A_6^{\cdot} 2_3$ при условии $q = 5$;
- $3^{\cdot} A_7$ при условии $q = 5$.

Покажем, что если A_6 изоморфна секции группы $\mathrm{SU}_3(q)$ при выполнении условия $L_2(q) \in W_\pi$, то $A_6 \in W_\pi$. По лемме 16 из того, что $A_6 \leq \mathrm{SU}_3(q)$, следует, что $5 \in \pi(q^2-1) \cup \{p\} = \pi(L_2(q))$. Таким образом, согласно замечанию после леммы 12 группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную группе A_5. Следовательно, пользуясь леммой 11, заключаем следующее: если $A_6 \leq \mathrm{SU}_3(q)$ и $L_2(q) \in W_\pi$, то $A_6 \in W_\pi$. Положим $n = 2^a \cdot 3^b \cdot m$, где числа a, b и m указаны в условии теоремы. Из вышесказанного и лемм 13 и 14 вытекает, что группа $\mathrm{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия:

$$\begin{gathered} L_2(q) \in W_\pi; \\ \mathrm{SU}_3(p^t) \in D_\pi \quad \text{для всех} \quad t \mid n \quad \text{таких, что} \quad \frac{n}{t} \quad \text{нечетно}; \\ L_2(7) \in W_\pi \quad \text{в случае, когда} \quad 7 \in \pi(q^3+1) \quad \text{и} \quad q = \overline{q}_2; \\ A_7 \in W_\pi \quad \text{в случае, когда} \quad p = 5 \quad \text{и} \quad q = \overline{q}_2. \end{gathered} \tag{1}$$

Докажем необходимость и достаточность дизъюнкции условий теоремы для выполнения данных соотношений и тем самым докажем теорему 4.

Снова можем считать, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\mathrm{SU}_3(q)) \neq \tau$. Следовательно, мы установим требуемое, если покажем, что при данных ограничениях условия (1) эквивалентны одному из утверждений (W_2^U)–(W_5^U).

Необходимость. Для начала рассмотрим случай $q \neq \overline{q}_2$.

Если $\mathrm{SU}_3(q) \in W_\pi$, то $\mathrm{SU}_3(q) \in D_\pi$, т. е. справедливо одно из условий (D_1)–(D_5) леммы 15. В силу того, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\mathrm{SU}_3(q)) \not\subseteq \pi$, достаточно рассматривать только те случаи, когда выполняется одно из условий (D_2)–(D_5).

Случай 1. Допустим, для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ верно условие (D_2), т. е.

$$2 \notin \tau, p \in \tau \quad \text{и} \quad \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q-1) \subseteq \pi(L_2(q)).$$

Кроме того, группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π, откуда вытекает, что для $L_2(q)$ справедливо условие (W_3^L) теоремы 1, т. е.

$$\pi \cap \pi(L_2(q)) = \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(\overline{q}_2 - 1) \quad \text{и} \quad |\tau \cap \{3,5\}| \leq 1.$$

Таким образом, выполнено утверждение (W_2^U).

Случай 2. Допустим, для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_3). Тогда выполняются соотношения $3 \in \tau$, $\mathrm{ord}_3\, q = 1$, $(q^2-1)_3 = 3$ и $\mathrm{ord}_r\, q = 6$ для всех $r \in \tau \setminus \{3\}$. Легко видеть, что если $\mathrm{ord}_r\, q = 6$ для некоторого $r \in \tau$, то $r \in \pi(q^2-q+1)$, и если $r \neq 3$, то верно и обратное. Таким образом, имеет место включение

$$\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q^2-q+1).$$

Так как $3 \in \tau$, должно быть выполнено равенство $\mathrm{ord}_3\, q = 1$, т. е. $3 \in \pi(q-1)$. При этом из условия $(q^2-1)_3 = 3$ следует соотношение $(q-1)_3 = 3$, которое эквивалентно тому, что $q \equiv 4, 7 \pmod 9$. Отсюда вытекает справедливость утверждения (W_3^U).

Случай 3. Допустим, для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_4) и для всех $r \in \tau$ справедливо равенство $\mathrm{ord}_r\, q = 6$. Отсюда, в частности, следует, что $3 \notin \tau$. Таким образом, исходя из рассуждений, проделанных при доказательстве предыдущего случая, можем заключить, что $\tau \subseteq \pi(q^2-q+1)$. Справедливость утверждения (W_3^U) снова установлена.

Случай 4. Допустим, для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_4) и для всех $r \in \tau$ справедливо одно из равенств $\mathrm{ord}_r\, q = 1$ или $\mathrm{ord}_r\, q = 2$. В данном случае имеют место следующие соотношения: $2, p \notin \tau$ и $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$ для некоторого числа $\varepsilon = \pm 1$. Отметим, что из указанных условий следует, что $\tau = \pi \cap \pi(L_2(q))$.

Если $\varepsilon = 1$, то необходимость соотношений $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и $\operatorname{ord}^*_r \overline{q}_2 = \operatorname{ord}^*_s \overline{q}_2$ вытекает из условия (W_4^L) теоремы 1.

Допустим теперь, что $\varepsilon = -1$. Докажем необходимость утверждения (W_5^U). Предположим, что утверждение (W_5^U) не выполнено. Поскольку $2 \notin \tau$, заключаем, что

$$|\tau \cap \{2,7\}| = |\tau \cap \{7\}| \leq 1.$$

Неравенство $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ вытекает из условия (W_4^L) теоремы 1. Следовательно, существуют числа $r, s \in \tau$ такие, что $\operatorname{ord}^*_r \overline{q}_3 < \operatorname{ord}^*_s \overline{q}_3$. Поскольку $2 \notin \tau$, имеем $\operatorname{ord}^*_r \overline{q}_3 = \operatorname{ord}_r \overline{q}_3$ и $\operatorname{ord}^*_s \overline{q}_3 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_3$. Кроме того, из леммы 9 и из того, что $\tau \subseteq \pi(q+1)$, вытекает следующая цепочка равенств:

$$2 = \operatorname{ord}_r q = \frac{\operatorname{ord}_r \overline{q}_3}{\gcd(\operatorname{ord}_r \overline{q}_3, 3^b)} = \frac{\operatorname{ord}_s \overline{q}_3}{\gcd(\operatorname{ord}_s \overline{q}_3, 3^b)} = \operatorname{ord}_s q.$$

Следовательно, $\operatorname{ord}_r \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^u$ и $\operatorname{ord}_r \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^v$ для некоторых неотрицательных целых чисел u и v, причем $u < v$. Отсюда вытекают следующие включения:

$$r \in \pi\big(\overline{q}_3^{3^{v-1}} + 1\big), \quad s \in \pi\big(\overline{q}_3^{3^v} + 1\big);$$

при этом $s \notin \pi\big(\overline{q}_3^{3^{v-1}} + 1\big)$, так как $\operatorname{ord}_s \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^v$. Таким образом, $r, s \in \pi \cap \pi\big(\mathrm{SU}_3\big(\overline{q}_3^{3^{v-1}}\big)\big)$. Ясно, что $\operatorname{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^{v-1}} = 2$, откуда следует, что для группы $\mathrm{SU}_3(\overline{q}_3^{3^{v-1}})$ выполняется условие (D_4) леммы 15. С другой стороны, $\operatorname{ord}_s(\overline{q}_3)^{3^{v-1}} = 6 \neq 2 = \operatorname{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^{v-1}}$. Таким образом, $\mathrm{SU}_3\big(\overline{q}_3^{3^{v-1}}\big) \notin D_\pi$; противоречие. Следовательно, утверждение (W_5^U) выполнено.

Случай 5. Допустим, для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_5), т. е. $2 \in \tau$, $3, p \notin \tau$ и $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. В частности, это означает, что число p нечетно. Если $\varepsilon = 1$, то согласно условию (W_4^L) теоремы 1 справедливо утверждение (W_4^U).

Пусть теперь $\varepsilon = -1$. В силу того, что $q \neq \overline{q}_2$, имеем $q = q_0^2$ для некоторого натурального числа q_0. Заметим, что

$$q+1 = q_0^2 + 1 \equiv \begin{cases} 1 \pmod 7, & q_0 \equiv 0 \pmod 7, \\ 2 \pmod 7, & q_0 \equiv \pm 1 \pmod 7, \\ 5 \pmod 7, & q_0 \equiv \pm 2 \pmod 7, \\ 3 \pmod 7, & q_0 \equiv \pm 3 \pmod 7. \end{cases}$$

Таким образом, $7 \notin \tau$ и, следовательно, имеет место равенство $|\tau \cap \{2,7\}| = |\{2\}| = 1$.

Повторяя рассуждения, проделанные при доказательстве необходимости условия (W_5^U) в предыдущем случае, заключаем, что $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ и для всех чисел $r, s \in \tau \setminus \{2\}$ выполнены равенства

$$\operatorname{ord}_r \overline{q}_3 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_3 = 2 \cdot 3^k,$$

где k — некоторое неотрицательное целое число (иначе найдутся числа $t \mid n$ и $r, s \in \tau$ такие, что $\operatorname{ord}_r p^t = 2$ и $\operatorname{ord}_s p^t = 6$ вопреки условию (D_5)). Если $k \geq 1$, то $\tau \subseteq \pi\big(\overline{q}_3^{3^k} + 1\big)$ и, следовательно, имеет место включение $\tau \subseteq \pi\big(\mathrm{SU}_3\big(\overline{q}_3^{3^{k-1}}\big)\big)$. Отсюда вытекает, что для всех нечетных чисел $r, s \in \pi \cap \pi\big(\mathrm{SU}_3\big(\overline{q}_3^{3^{k-1}}\big)\big)$ справедливы равенства $\operatorname{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^{k-1}} = \operatorname{ord}_s(\overline{q}_3)^{3^{k-1}} = 6$. С другой стороны, в силу того, что $2 \in \pi \cap \pi\big(\mathrm{SU}_3\big(\overline{q}_3^{3^{k-1}}\big)\big)$, для данной группы выполняется условие (D_5), из которого следует, что для всех $r \in \tau$ верно неравенство $\mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^{k-1}} \leq 2$; противоречие. Значит, $k = 0$ и для всех чисел $r, s \in \tau \setminus \{2\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathrm{ord}_r\,\overline{q}_3 = \mathrm{ord}_s\,\overline{q}_3 = 2.$$

Таким образом, $\tau \subseteq \pi(\overline{q}_3 + 1) \subseteq \pi(\mathrm{SU}_3(\overline{q}_3))$. Поскольку $2 \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(\overline{q}_3))$, для данной группы справедливо условие (D_5) леммы 15. Следовательно, необходимо, чтобы число 4 делило $\overline{q}_3 + 1$, откуда $\mathrm{ord}_2^*\,\overline{q}_3 = 2$. Таким образом, $\mathrm{ord}_r^*\,\overline{q}_3 = \mathrm{ord}_s^*\,\overline{q}_3$ для всех $r, s \in \tau$.

Рассмотрим теперь случай $q = \overline{q}_2$. Допустим, $7 \in \pi(q^3 + 1)$.

По лемме 13 группа $\mathrm{SU}_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе $L_2(7)$. Кроме того, условие $7 \in \pi(q^3+1)$ влечет нечетность числа q, так как если $q = 2^n$, то

$$q^3 + 1 = (2^3)^n + 1 = 8^n + 1 \equiv 2 \pmod 7.$$

Из теоремы 1 вытекает, что $L_2(7) \in W_\pi$, если и только если либо $\pi(L_2(7)) = \{2, 3, 7\} \subseteq \pi$ и тогда $\pi(\mathrm{PSU}_3(q)) \subseteq \pi$, либо $|\pi \cap \{2, 7\}| \leq 1$ и $|\pi \cap \{2, 3\}| \leq 1$.

Если $7 \notin \pi(q + 1)$, то $\mathrm{ord}_7\,q = 6$ и, следовательно, из условий (D_2)–(D_5) леммы 15 вытекают указанные неравенства.

Если $7 \in \pi(q + 1)$, то в силу нечетности числа q следует, что $2 \in \pi(q + 1)$. Отсюда вытекает необходимость неравенства $|\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1$, фигурирующего в утверждении (W_5^U).

Допустим теперь, что $7 \notin \pi(q^3 + 1)$. Тогда $7 \notin \pi(q + 1)$ и, следовательно, неравенство $|\tau \cap \{2, 7\}| = |\tau \cap \{2\}| \leq 1$ в утверждении (W_5^U) также верно.

Достаточность. Предположим, что выполнено одно из утверждений (W_2^U)–(W_5^U), и установим справедливость соотношения (1).

Для начала покажем, что $L_2(q) \in W_\pi$ и $\mathrm{SU}_3(p^t) \in W_\pi$, где $t \mid n$ и $\frac{n}{t}$ нечетно.

Случай (W_2^U). Группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π, поскольку из утверждения (W_2^U) следует условие (W_2^L) теоремы 1. Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Следовательно, для данной группы нарушено условие (D_2) леммы 15. Таким образом, существует число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(p^t - 1) \cup \{p\}$, откуда $r \in \pi(p^{3t} + 1)$. В силу нечетности числа $\frac{n}{t}$ заключаем, что $r \in \pi(p^{3n} + 1) = \pi(q^3 + 1)$. С другой стороны, из утверждения (W_2^U) имеем $r \in \pi(q - 1) \cup \{p\}$ и $r \neq p$ в силу выбора r. Таким образом, справедливо следующее:

$$r \in \pi(q - 1) \quad \text{и} \quad r \in \pi(q^3 + 1),$$

откуда $r = 2 \notin \pi$; противоречие.

Случай (W_3^U). Легко видеть, что в этом случае $|\pi \cap \pi(L_2(q))| \leq 1$. Поэтому $L_2(q) \in W_\pi$ по теореме Силова. Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Следовательно, для данной группы нарушено либо условие (D_3), либо условие (D_4) леммы 15 в зависимости от принадлежности числа 3 множеству τ. Предположим, $3 \in \tau$. Тогда $3 \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t))$ и имеют место соотношения $3 \in \pi(p^t - 1)$ и $(p^{2t} - 1)_3 = 3$. Действительно, по лемме 9 верна следующая цепочка равенств:

$$1 = \mathrm{ord}_3\,q = \mathrm{ord}_3\,p^n = \frac{\mathrm{ord}_3\,p^t}{(\mathrm{ord}_3\,p^t, \frac{n}{t})}.$$

Поскольку число $\frac{n}{t}$ нечетно, имеем $\mathrm{ord}_3\,p^t = 1$, т. е. $3 \in \pi(p^t - 1)$.

Следовательно, если нарушено одно из условий (D_3) или (D_4), то существует число $r \in \tau \setminus \{3\}$ такое, что $\mathrm{ord}_r\,p^t \neq 6$. Таким образом, $r \in \pi(p^{2t} - 1) \subseteq$

$\pi(q^2-1)$. С другой стороны, из утверждения (W_3^U) следует, что $r \in \pi(q^2-q+1)$. Значит,

$$r \in \pi(q^2-1-(q^2-q+1)) = \pi(q-2).$$

Таким образом, $r \in \pi(q^2-1)$ и $r \in \pi(q-2)$, откуда $r=3$; противоречие.

Случай (W_4^U). Вначале рассмотрим случай $2 \notin \tau$, т. е. $|\tau \cap \{3,5\}| \leq 1, \tau \subseteq \pi(q-1)$ и $\operatorname{ord}_r \overline{q}_2 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_2$ для любых $r, s \in \tau$. Очевидно, что в этом случае $L_2(q) \in W_\pi$ согласно условию (W_4^L) теоремы 1. Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Заметим, что $r \in \pi(p^t-1)$ для любого $r \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t))$. Действительно, если бы число r принадлежало множеству $\pi(p^{3t}+1)$, то в силу нечетности числа $\frac{n}{t}$ это означало бы, что $r \in \pi(q^3+1)$. Следовательно, число r принадлежало бы множеству $\pi(q-1) \cap \pi(q^3+1)$, откуда $r = 2 \notin \pi$; противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t-1)$ и $\mathrm{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

Рассмотрим теперь случай $2 \in \tau$. Легко видеть, что группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π. Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Поскольку $2 \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t))$, для данной группы нарушается условие (D_5) леммы 15. В частности, это влечет неравенство $|\tau \setminus \{2\}| \geq 1$. Исключим следующие два случая.

1. Существует нечетное число $r \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t))$ такое, что $r \in \pi(p^{3t}+1)$. Поскольку число $\frac{n}{t}$ нечетное, имеем $r \in \pi(q^3+1)$. Следовательно, $r \in \pi(q-1) \cap \pi(q^3+1)$, откуда $r=2$; противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t-1)$.

2. Число 4 делит p^t+1. Отметим, что $\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(q)) = \pi \cap \pi(L_2(q))$, поскольку

$$\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(q)) \subseteq \pi(p^t-1) \subseteq \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(L_2(q)).$$

Следовательно, так как $L_2(p^t) \leq L_2(q) \in W_\pi$ и

$$2 \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) = \pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t-1),$$

по лемме 17 необходимо, чтобы число 4 делило p^t-1; противоречие.

Таким образом,

$$\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t-1) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t-1,$$

откуда $\mathrm{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

Случай (W_5^U). Разберем сначала случай $2 \notin \tau$, т. е. $|\tau \cap \{3,5\}| \leq 1$, $\tau \subseteq \pi(q+1)$ и $\operatorname{ord}_r \overline{q}_3 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_3$ для любых $r, s \in \tau$. Группа $L_2(q)$ принадлежит W_π, поскольку условие $\tau \subseteq \pi(q+1)$ означает, что $\operatorname{ord}_r \overline{q}_2 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_2 = 2^{a+1}$ для всех $r, s \in \tau$. Отсюда следует, что для $L_2(q)$ выполнено условие (W_4^L). Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Очевидно, что для данной группы нарушено условие (D_4) леммы 15 и, следовательно, существуют числа $r, s \in \tau$ такие, что $\operatorname{ord}_r p^t = 2$ и $\operatorname{ord}_s p^t = 6$. Действительно, если бы было верно равенство $\operatorname{ord}_r p^t = 1$ для некоторого $r \in \tau$, то это означало бы, что $r \in \pi(p^t-1)$, откуда $r \in \pi(q-1)$ вопреки условию (W_5^U). Представим число t в виде $t = 2^a \cdot 3^k \cdot l$, где $k \leq b$ и $l \mid m$. Пользуясь леммой 9, заключаем, что

$$\operatorname{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^k} = \frac{\operatorname{ord}_r p^{2^a \cdot 3^k \cdot l}}{\gcd\bigl(\operatorname{ord}_r p^{2^a \cdot 3^k \cdot l}, \frac{m}{l}\bigr)} = \frac{\operatorname{ord}_r p^t}{\gcd\bigl(\operatorname{ord}_r p^t, \frac{m}{l}\bigr)} = \frac{2}{\gcd\bigl(2, \frac{m}{l}\bigr)} = 2.$$

Последнее равенство верно, поскольку число m по определению является нечетным. Аналогично доказывается, что $\operatorname{ord}_s(\overline{q}_3)^{3^k} = 6$. Согласно утверждению (W_5^U) справедливо равенство

$$\operatorname{ord}_r \overline{q}_3 = \operatorname{ord}_s \overline{q}_3,$$

из которого следует, что

$$2 = \mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^k} = \mathrm{ord}_s(\overline{q}_3)^{3^k} = 6;$$

противоречие.

Рассмотрим теперь случай $2 \in \tau$. Из условий

$$\mathrm{ord}^*_r\,\overline{q}_3 = \mathrm{ord}^*_2\,\overline{q}_3 = \mathrm{ord}_4\,\overline{q}_3 \in \{1,2\} \quad \text{для любого } r \in \tau \quad \text{и} \quad \tau \subseteq \pi(q+1)$$

следует, что $\tau \subseteq \pi(\overline{q}_3 + 1)$ и 4 делит $\overline{q}_3 + 1$. В частности, это означает, что 4 делит число $q+1$, откуда $a = 0$, т. е. $q = p^{3^b\cdot m}$, поскольку квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4. Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\mathrm{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Тогда для $\mathrm{SU}_3(p^t)$ нарушается условие (D_5) леммы 15. Исключим следующие два случая.

1. Существует нечетное число $r \in \pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t))$ такое, что $r \notin \pi(p^t+1)$. Число r не может принадлежать множеству $\pi(p^t-1)$, поскольку иначе было бы справедливо соотношение $r \in \pi(q-1)$. Таким образом, $\mathrm{ord}_r\, p^t = 6$. Представим число t в виде $t = 3^k \cdot l$, где $k \le b$ и $l \mid m$. Тогда по лемме 9 верна следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^k} = \frac{\mathrm{ord}_r\, p^{3^k\cdot l}}{\gcd\bigl(\mathrm{ord}_r\, p^{3^k\cdot l}, \frac{m}{l}\bigr)} = \frac{\mathrm{ord}_r\, p^t}{\gcd\bigl(\mathrm{ord}_r\, p^t, \frac{m}{l}\bigr)} = 6.$$

Последнее равенство верно, так как число $\frac{m}{l}$ взаимно просто с числом 6. С другой стороны, из того, что $\mathrm{ord}_r\,\overline{q}_3 = 2$, по лемме 9 имеем

$$\mathrm{ord}_r(\overline{q}_3)^{3^k} = \frac{\mathrm{ord}_r\,\overline{q}_3}{\gcd(\mathrm{ord}_r\,\overline{q}_3, 3^k)} = \frac{2}{\gcd(2,3^k)} = 2;$$

противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t+1)$.

2. Число 4 делит $p^t - 1$. Отсюда вытекает, что 4 делит $q-1$. Следовательно, 4 делит одновременно числа $q-1$ и $q+1$; противоречие.

Таким образом, заключаем, что

$$\pi \cap \pi(\mathrm{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t+1) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t + 1,$$

откуда $\mathrm{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

Докажем теперь, что каждое из утверждений (W_2^U)–(W_5^U) влечет $L_2(7) \in W_\pi$, если $7 \in \pi(q^3+1)$ и $q = \overline{q}_2$, и $A_7 \in W_\pi$, если $p = 5$ и $q = \overline{q}_2$.

Рассмотрим для начала случай $p \ne 5$ и $q = \overline{q}_2$. Из утверждений (W_2^U), (W_3^U) и (W_5^U) легко вытекает, что $L_2(7) \in W_\pi$, поскольку $|\tau \cap \{2,7\}| \le 1$ и $|\tau \cap \{2,3\}| \le 1$. В утверждении (W_4^U) фигурирует включение $\tau \subseteq \pi(q-1)$, из которого вытекает, что если $7 \in \tau$, то либо $L_2(7) \le L_2(q) \in W_\pi$, либо в группе $\mathrm{SU}_3(q)$ отсутствует секция, изоморфная $L_2(7)$. Если $7 \notin \tau$, то группа $L_2(7)$ будет также обладать свойством W_π, поскольку $|\tau \cap \{2,3\}| \le 1$.

Наконец, допустим, что $p = 5$ и $q = \overline{q}_2$. Тогда группа $\mathrm{SU}_3(q)$ обладает секцией, изоморфной A_7. Установим, что группа A_7 обладает свойством W_π.

Случай (W_2^U). Из того, что $p = 5$ и $q = \overline{q}_2$, легко заключить, что $7 \in \pi\bigl(\overline{q}_2^3 + 1\bigr)$. Следовательно, $7 \notin \pi(\overline{q}_2 - 1)$ и $\pi \cap \{2,3,5,7\} = \{5\}$. Таким образом, $A_7 \in W_\pi$ по теореме Силова.

Случай (W_3^U). В этом случае $2, 5 \notin \pi$. Поэтому достаточно показать, что $3 \notin \pi$. Представим число q в виде $q = 5^{2f+1}$. Тогда

$$5^{2f+1} = 25^f \cdot 5 \equiv -1 \pmod 3.$$

Отсюда вытекает, что $3 \in \pi(q + 1)$ и, следовательно, $3 \notin \pi$.

Случай (W_4^U). Поскольку $q = \overline{q}_2$ и $p = 5$, имеем $7 \in \pi(q^3 + 1)$. С другой стороны, $\tau \subseteq \pi(q - 1)$ согласно утверждению (W_4^U). Следовательно, $7 \notin \pi$. Из неравенства $|\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ следует, что $A_7 \in W_\pi$ по теореме Силова.

Случай (W_5^U). Допустим, $2 \in \pi$. С учетом условий $|\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1$ и $|\pi \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ заключаем, что $3, 5, 7 \notin \pi$, откуда $A_7 \in W_\pi$.

Допустим, $3 \in \pi$. Поскольку $|\pi \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$, имеем $2, 5 \notin \pi$. Предположим, что $7 \in \pi$. Тогда из утверждения (W_5^U) вытекает, что $\mathrm{ord}_3 \overline{q}_3 = \mathrm{ord}_7 \overline{q}_3$. Поскольку $q = \overline{q}_2$, справедливо равенство $\overline{q}_3 = 5^m$, где $\gcd(m, 6) = 1$. Отсюда следует, что $\mathrm{ord}_3 \overline{q}_3 = 2$. Представим число m в виде $m = 3f + i$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда

$$\overline{q}_3 = 5^{3f+i} = 125^f \cdot 5^i \equiv (-1)^f \cdot 5^i \pmod 7 \equiv \begin{cases} \pm 5 \pmod 7, & i = 1, \\ \pm 4 \pmod 7, & i = 2. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $\mathrm{ord}_7 \overline{q}_3 \in \{3, 6\}$; противоречие. Следовательно, $7 \notin \pi$ и $A_7 \in W_\pi$.

В силу того, что $L_2(7) \leq A_7$, группа $L_2(7)$ также обладает свойством W_π.

Теорема доказана.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное чтение рукописи и замечания, позволившие улучшить ее первоначальный вариант.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 286–304.
2. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
3. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3, N 2. P. 98–105.
4. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 3. P. 198–200.
5. *Ревин Д. О., Шепелев В. Д.* Сильная π-теорема Силова для групп $\mathrm{PSL}_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 1011–1021.
6. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979. Providence RI: Am. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 37)
7. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
8. *Манзаева Н. Ч.* Решение проблемы Виланда для спорадических групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 294–305.
9. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
10. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. V. 407.
11. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
12. Downs M., Jones G. A. The Mö bius function of the Suzuki groups // arXiv:1404.5470.2014.
13. *Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О.* О наследуемости свойства D_π подгруппами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 44–52.
14. *Pierro E.* The Möbius function of the small Ree groups // arXiv:1410.8702v3 [math.GR] (2015).

15. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

Поступила в редакцию 20 февраля 2025 г.
После доработки 24 мая 2025 г.
Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Шепелев Виталий Денисович (ORCID 0000-0002-8411-2805)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`v.shepelev@g.nsu.ru`