

КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕ σ -СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

О. Л. Шеметкова

Аннотация. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел. Конечная группа G называется σ -сверхразрешимой, если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала циклический. В работе исследуется строение минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не являются σ -разрешимыми.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.414

Ключевые слова: конечная группа, σ -сверхразрешимая группа, минимальная не σ -сверхразрешимая группа, разбиение множества всех простых чисел.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Следуя [1, с. 206], зафиксируем разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся непустые подмножества σ_i , индексированные элементами некоторого множества индексов I . Понятно, что σ — это отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{P}$, при котором простые числа p и q эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $i \in I$ такое, что $p, q \in \sigma_i$. Элементы σ_i ($i \in I$) разбиения σ будем называть его σ -слоями, а σ -слой, содержащий число p , будем обозначать через $\sigma(p)$. В частности, $\sigma(2)$ — это тот σ -слой, который содержит число 2.

В последние годы в теории конечных групп активно развивается направление, связанное с изучением их σ -свойств. Один из важных аспектов этой программы связан с установлением строения групп, расположенных критически по отношению к определенному σ -свойству, т. е. групп G , все собственные подгруппы которых обладают рассматриваемым σ -свойством, а сама группа G не обладает. При этом под σ -свойством понимается такое групповое свойство, которое связано с произвольным разбиением σ . Как показывают многочисленные исследования, наличие в группе критических σ -подгрупп с заданным свойством оказывает существенное влияние на ее строение (см., в частности, [2]).

Группа G называется:

- σ -примарной, если существует $i \in I$ такое, что $\pi(G) \subseteq \sigma_i$;
- σ -нильпотентной (пишем $G \in \mathfrak{N}_\sigma$), если G является прямым произведением σ -примарных подгрупп;
- σ -сверхразрешимой (пишем $G \in \mathfrak{U}_\sigma$), если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала циклический;
- σ -разрешимой (пишем $G \in \mathfrak{S}_\sigma$), если G обладает нормальным рядом с σ -примарными факторами.

Ясно, что в случае *минимального разбиения* $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$, состоящего из одноэлементных подмножеств, справедливы равенства $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ — классы всех нильпотентных, всех сверхразрешимых и всех разрешимых групп соответственно. Кроме того, $\mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{U}_\sigma \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$ для любого разбиения σ .

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой*, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Исследования σ -свойств конечных групп инициировали следующие два вопроса.

Вопрос 1 [3, вопрос 4.9]. Верно ли, что любая минимальная не σ -нильпотентная группа σ -разрешима?

Вопрос 2 [4]. Какова структура минимальной не σ -сверхразрешимой группы?

Как отмечено в [5], из основного результата работы [6], опирающегося на классификацию конечных простых групп, следует, что группа G является минимальной не σ -нильпотентной группой тогда и только тогда, когда G — группа Шмидта и простые делители ее порядка принадлежат различным σ -слоям (*группой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой являются нильпотентными). Отметим, что строение групп Шмидта хорошо изучено (см., например, работы [7–9]).

Общая структура минимальных не σ -сверхразрешимых групп в случае минимального разбиения $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ исследована в работах [10, 11]. Детально такие группы описаны в [12]. При этом выделены 11 типов минимальных несверхразрешимых групп.

В работе [4] рассмотрено произвольное разбиение σ и описано строение σ -разрешимых минимальных не σ -сверхразрешимых групп. При этом дополнительно выделены три класса минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не являются минимальными несверхразрешимыми группами.

Теорема 1 [4]. Пусть G — σ -разрешимая группа, которая не σ -примарна. Если G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, которая не является минимальной несверхразрешимой группой, то $G/\Phi(G)$ — также минимальная не σ -сверхразрешимая группа и выполняется одно из следующих условий.

1. $G = E : K$, где E — σ -примарная минимальная не p -сверхразрешимая группа, подгруппа $K = \langle \alpha \rangle$ циклическая, $|\alpha| = r^s$, где r — простое число, не принадлежащее $\sigma(p)$. Пусть в этом случае $E = PQ$, где P — p -сверхразрешимый корадикал подгруппы E и Q — K -инвариантное дополнение подгруппы P в E . Тогда $[K, Q] = \langle \alpha^r \rangle$, $E = 1$ и α индуцирует нетривиальный степенной автоморфизм на $P/\Phi(P)$.

2. $G = P : (HK)$ — минимальная не p -сверхразрешимая группа (соответствует типу 11 из [12, теорема 9] при $H = M$ и $K = C$) и подгруппа HK σ -примарна.

3. $G = PM$ и $M = HK$, где P — нормальная p -подгруппа в G для некоторого простого p , H и K — силовская q -подгруппа и силовская r -подгруппа из M соответственно, и RH — σ -примарная группа. Группа $P/P \cap \Phi(G)$ NK -неприводима, $K = \langle \alpha \rangle$ и $H = \langle \beta \rangle$ — циклические группы. В этом случае имеются два различных подкласса:

(i) $PK = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, $|\alpha| = q^m$, $|\beta| = r^{n+l}$, $\alpha^q, \beta^{r^n} \in \Phi(G) \cap Z(G)$;

(ii) $PH = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, $|\alpha| = q^{m+n}$, $|\beta| = r^l$, $\alpha^{q^n}, \beta^r \in \Phi(G) \cap Z(G)$.

В данной работе исследуется строение минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не σ -разрешимы.

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы, которая вместе с теоремой 1 дает полный ответ на вопрос 2.

Теорема 2. *Если группа G не σ -разрешима, то G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) $G/\Phi(G)$ — простая минимальная не σ -сверхразрешимая группа;
- 2) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$.

Из [10] следует, что в случае минимального разбиения $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ все минимальные не σ -сверхразрешимые группы (т. е. все минимальные не сверхразрешимые группы) разрешимы. В данной работе показано, что в общем случае существуют минимальные не σ -сверхразрешимые группы, которые не σ -разрешимы. В частности, для разбиения σ с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$ группа $PSL(3, 3)$ является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

2. Обозначения и предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в [13]. Терминологию теории σ -субнормальных подгрупп можно найти в [3].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π .

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$ -корадикалом* группы G .

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;
- 2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G , принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.

Группа G называется *σ -сверхразрешимой*, если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ циклический. Из определения, в частности, следует, что сверхразрешимая группа σ -сверхразрешимая для любого разбиения σ множества всех простых чисел.

Отметим следующие важные свойства σ -сверхразрешимых групп для любого разбиения σ множества всех простых чисел.

Лемма 1 [14, теорема 1.3]. 1. *Класс $\mathfrak{U}_\sigma$ является наследственной формацией.*

2. Формация $\mathfrak{U}_\sigma$ насыщенная тогда и только тогда, когда $\pi(p-1) \subseteq \sigma(2)$ для всех $p \in \sigma(2)$ и $|\sigma(q)| = 1$ для всех $q \notin \sigma(2)$.

3. Формация $\mathfrak{U}_\sigma$ является классом Фиттинга тогда и только тогда, когда $\sigma(2)$ — множество всех простых чисел.

Так как ввиду леммы 1 класс $\mathfrak{U}_\sigma$ наследственный, то при исследовании структуры минимальной не $\mathfrak{U}_\sigma$ -группы достаточно ограничиться анализом строения ее максимальных подгрупп.

Лемма 2. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Если G не σ -разрешима, то $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$.

Доказательство. Так как группа G не σ -разрешима, то она обладает неабелевым композиционным фактором A/B , который не является σ -примарной группой. Предположим, что $A \subset G$. Так как G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, то подгруппа A σ -сверхразрешима, а значит, фактор A/B σ -примарен, что противоречит предположению.

Следовательно, $A = G$ и G/B — простая неабелева группа. Предположим, что подгруппа B обладает нефраттиниевым G -главным фактором C/D . Тогда в G найдется максимальная подгруппа M , которая не покрывает фактор C/D , т. е. $D \subseteq M$ и $MC = G$. Понятно, что подгруппа M σ -сверхразрешима. Поэтому из

$$G/B = MC/B = MB/B \simeq M/M \cap B$$

следует, что G/B — σ -примарная группа. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, все G -главные факторы подгруппы B фраттиниевы в G , а значит, $B \subseteq \Phi(G)$. Кроме того, так как G не σ -разрешима, то $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$, т. е. G не является σ -примарной группой.

Лемма доказана.

Минимальная неразрешимая группа — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [15]. Этот список содержит следующие группы:

- $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
- $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;
- $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
- $PSL_3(3)$;
- $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [16, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения из [17]: $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B ; $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B .

Если A и B — циклические подгруппы порядка n и m соответственно, то с учетом изложенного понятно обозначение $n : m$.

Нормальная подгруппа E группы G называется *гиперцентральной*, если либо $E = 1$, либо каждый ее G -главный фактор центральный (в G). Далее $Z_\infty(G)$ обозначает произведение всех нормальных гиперцентральных подгрупп

группы G и называется ее *гиперцентром*. Простая проверка показывает, что $Z_\infty(G)$ — нормальная гиперцентральная подгруппа группы G .

3. Доказательство теоремы 2

1. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Тогда по лемме 2 $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$. Из последнего условия следует, что группа $G/\Phi(G)$ не σ -примарна, поэтому $G/\Phi(G)$ не σ -сверхразрешима и ввиду леммы 1 $G/\Phi(G)$ — минимальная не σ -сверхразрешимая группа.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой $\Phi(G)$ не совпадает с $Z_\infty(G)$. Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N \subseteq \Phi(G)$. Очевидно, $G/N/\Phi(G/N) \cong G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, являющаяся минимальной не σ -сверхразрешимой группой, и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G/N)\}| > 1$. Отсюда ввиду выбора группы G имеем

$$\Phi(G/N) = \Phi(G)/N = Z_\infty(G/N).$$

Если группа G имеет минимальную нормальную подгруппу L , отличную от N , то ввиду выбора группы G подгруппа NL/L центральна в G/L . Но тогда из G -изоморфизма $NL/L \cong N$ следует, что $N \subseteq Z(G)$, значит, $\Phi(G) = Z_\infty(G)$, что невозможно.

Таким образом, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Поэтому $\Phi(G) = O_p(G)$ и из выбора группы G и простоты группы $G/\Phi(G)$ следует, что $C_G(N) = \Phi(G) = O_p(G)$. Отсюда имеем, что группа $G/\Phi(G)$ изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов группы N .

Предположим, что все максимальные подгруппы группы $G/\Phi(G)$ σ -нильпотентны. Тогда ввиду теоремы 1 из [5] $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта, что в силу выбора группы G невозможно. Таким образом, в группе $G/\Phi(G)$ найдется некоторая максимальная подгруппа $M/\Phi(G)$, которая не принадлежит классу $\mathfrak{N}_\sigma$.

Пусть $D = M^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — σ -нильпотентный корадикал подгруппы M . Рассмотрим M -главный ряд

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_t = D \cap N \subset N_{t+1} \subset \dots \subset N_k = N.$$

Для любого $i = 1, 2, \dots, t$ из $M \in \mathfrak{U}_\sigma$ следует, что N_i/N_{i-1} — циклическая группа порядка p . Тогда $M/C_M(N_i/N_{i-1})$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Отсюда, в частности, $M/C_M(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{U}_\sigma$, а значит, $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$. Если $i = t+1, \dots, k$, то имеет место M -изоморфизм

$$N_i D / N_{i-1} D \cong N_i / N_i \cap N_{i-1} D = N_i / N_{i-1} (N_i \cap D) = N_i / N_{i-1}.$$

Отсюда

$$D \subseteq C_M(N_i D / N_{i-1} D) = C_M(N_i / N_{i-1}).$$

Кроме того, $ND/D \subseteq O_p(M/D)$. Поэтому $C_M(N_i/N_{i-1})$ содержит $\sigma(p)'$ -холлову подгруппу из M , а значит, $C_M(N_i/N_{i-1})$ — $\sigma(p)'$ -группа и $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$. Итак, для любого $i = 1, 2, \dots, k$ имеем $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$ и

$$M^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq \bigcap_{i=1}^k C_M(N_i/N_{i-1}).$$

Таким образом, $M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G)/\Phi(G)$ — стабильная группа автоморфизмов группы N . По лемме 9.3 из [1] $M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G)/\Phi(G)$ является p -группой.

Рассмотрим подгруппу M^x , где $x \in G$. Так как подгруппа M^x максимальна в G , то $\Phi(G) \subseteq M^x$. Очевидно, $(M^x)^{\mathfrak{N}_\sigma} = (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x$. По аналогии с изложенным выше можно доказать, что группа $(M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G)$ является p -группой, действующей стабильно на группе N . Простая проверка показывает, что группа

$$\langle M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G), (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G) \rangle$$

также действует стабильно на группе N . Снова применяя лемму 9.3 из [1], получаем, что $\langle M^{\mathfrak{N}_\sigma}, (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G) \rangle$ — p -группа. Отсюда ввиду [18]

$$1 \neq M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G) \subseteq O_p(G / \Phi(G)),$$

что противоречит простоте группы $G / \Phi(G)$.

Таким образом, $C_G(N) = G$ и $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G .

2. Пусть $G \notin \mathfrak{S}_\sigma$, $G / \Phi(G)$ — простая минимальная не σ -сверхразрешимая группа и $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G . Тогда $\Phi(G) \subseteq M$. Так как $G / \Phi(G)$ — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, то $M / \Phi(G) \in \mathfrak{U}_\sigma$. По определению тогда все M -главные факторы подгруппы $M / \Phi(G)$, расположенные ниже

$$(M / \Phi(G))^{\mathfrak{N}_\sigma} = M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G),$$

циклические. Так как $\Phi(G) = Z_\infty(G)$, из

$$M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G) \cong M^{\mathfrak{N}_\sigma} / M^{\mathfrak{N}_\sigma} \cap \Phi(G)$$

следует, что все M -главные факторы, расположенные ниже $M^{\mathfrak{N}_\sigma}$, циклические, т. е. $M \in \mathfrak{U}_\sigma$. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{U}_\sigma$, но сама группа G в $\mathfrak{U}_\sigma$ не входит. Следовательно, G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа.

Теорема доказана.

4. Замечания и примеры

Из [10] следует, что любая минимальная не сверхразрешимая подгруппа разрешима. Следующее предложение показывает, что наряду с минимальным разбиением $\{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ существует бесконечное множество разбиений σ множества всех простых чисел, для которых все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы.

Предложение 1. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2\}$. Тогда все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы.

Доказательство. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Предположим, что G не σ -разрешима. Тогда ввиду теоремы 2 выполняются следующие два условия: 1) $G / \Phi(G)$ — простая неабелева группа, являющаяся минимальной не σ -сверхразрешимой группой; 2) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Отсюда и из $\sigma(2) = \{2\}$ следует, что $G / \Phi(G)$ — минимальная простая группа. С учетом списка минимальных простых групп из [15] рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $G / \Phi(G) \cong PSL_3(3)$. В этом случае, как следует из [17, с. 13], $G / \Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу, изоморфную S_4 , которая не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

2. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу, изоморфную $2^p : (2^p - 1)$, которая является группой Фробениуса, а значит, не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

3. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3. В этом случае $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4 , которая не принадлежит классу $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

4. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Как и в предыдущем случае, группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4 . Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

5. $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$, p — простое нечетное число. Тогда ввиду [19, теорема 9] группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фробениуса $F/\Phi(G)$ порядка $q^2(q-1)$, где $q = 2^p$. Эта подгруппа, очевидно, не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Таким образом, все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что существует бесконечное множество разбиений σ , для которых минимальные не σ -сверхразрешимые группы не являются σ -разрешимыми.

ПРИМЕР 1. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$. Тогда группа $G \cong PSL_3(3)$ является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Действительно, как следует из [17, с. 13], группа G содержит максимальные подгруппы, которые изоморфны группам из списка $\{3^2 : 2S_4, 13 : 3, S_4\}$. Так как $\sigma(2) = \{2, 3\}$, то каждая подгруппа из этого списка σ -сверхразрешима. Следовательно, группа G является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Отметим, что группа $G \cong PSL_2(2^2) \cong A_5$ также является минимальной не σ -сверхразрешимой группой для разбиения σ множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. Ёи С., Ли М., Каморников С. Ф. Конечные группы с системой обобщенно субнормальных подгрупп Шмидта // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 89–97.
3. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
4. Li B., Kang W., Gong L. On minimal non- σ -supersoluble groups // Commun. Algebra. 2024. doi.org/10.1080/00927872.2024.2439499.
5. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. Характеризация конечных $\mathfrak{N}_\sigma$ -критических групп // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2022. № 3. С. 130–132.
6. Arad Z., Chillag D. A criterion for the existence of normal π -complements in finite groups // J. Algebra. 1984. V. 87. P. 472–482.
7. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
8. Гольфанд Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.
9. Ballester-Boliches A., Esteban-Romero R., Robinson D. J. S. On finite minimal non-nilpotent groups // Proc. Am. Math. Soc. 2005. V. 133, N 12. P. 3455–3462.
10. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. V. 60. P. 409–434.

11. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen // Math. Z. 1966. V. 91. P. 198–205.
12. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. On minimal non-supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2007. V. 23, N 1. P. 127–142.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. Guo W., Zhang C., Skiba A. N. On σ -supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups // J. Algebra. 2018. V. 512. P. 92–108.
15. Thompson J. G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Am. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383–437.
16. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
17. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
18. Alperin J., Lyons R. On conjugacy classes of p -elements // J. Algebra. 1971. V. 19, N 2. P. 536–537.
19. Suzuki M. On a class of double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

Поступила в редакцию 4 марта 2025 г.

После доработки 4 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Шемяткова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru