

О СМЕШАННЫХ ТОЖДЕСТВАХ ЭНДОМОРФОВ, БИМОДУЛЯХ И ω -АЛГЕБРАХ

А. П. Пожидаев

Аннотация. Описаны смешанные полилинейные тождества степени 3 на правых эндоморфах произвольных алгебр над полем F характеристики не 2. Как следствие, получены неприводимые бимодули над $M_n(F)$ из многообразия, определенного тождеством моноассоциативности, и многообразия $(1, 1)$ -алгебр. Строится огромный класс правосимметрических бимодулей, в частности, неприводимых правосимметрических $M_n(F)$ -бимодулей. Выделен класс ω -правосимметрических алгебр $\mathcal{A}_\omega$ с ω -тождеством, обобщающий класс правосимметрических алгебр, где ω — некоторая билинейная кососимметрическая форма на $\mathcal{A}$. Дано описание строения конечномерных алгебр $\mathcal{A}_\omega$, в частности, простых таких алгебр. Показано, что коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ произвольной ω -правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является алгеброй ω -Ли, и $\mathcal{A}^{(-)}$ разрешима степени ≤ 3 в конечномерном случае.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.413

Ключевые слова: эндоморф, правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелева алгебра, смешанное тождество, бимодуль, неприводимый бимодуль, правосимметрический бимодуль, алгебра ω -Ли.

§ 1. Введение

Алгебра $\mathcal{A}$ называется левосимметрической (*прелевой*), если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ левосимметричен: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Правосимметрические алгебры — это алгебры, антиизоморфные левосимметрическим, т. е. для них выполнено тождество

$$(x, y, z)_{rs} := (x, y, z) - (x, z, y) = 0. \quad (1)$$

Как легко видеть, все эти алгебры Ли-допустимы. Алгебры Новикова являются одним из наиболее известных частных случаев левосимметрических алгебр, которые являются естественным обобщением ассоциативных алгебр.

Зафиксируем произвольное основное поле F , для характеристики которого будем использовать символ $\chi(F)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\chi(F) \neq 2$, через $\langle \Upsilon \rangle := \langle \Upsilon \rangle_F$ будем обозначать линейную оболочку множества Υ над F , а через $\text{alg}(\Upsilon)$ — алгебру над F , порожденную Υ , где опускаем символ F , если поле ясно из контекста. Через $\text{End}(\mathcal{A})$ будем обозначать алгебру всех F -линейных операторов на алгебре (векторном пространстве) $\mathcal{A}$. Если V — векторное пространство над F , то V^* — дуальное пространство к V . Образ $x\phi := \phi(x)$ элемента x под действием отображения ϕ часто записывается в виде

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

$\phi_x; [x, y] := xy - yx$ — коммутатор элементов x и y ; $\mathbb{S}_3$ — симметрическая группа степени 3.

Пусть $(\mathcal{A}, \cdot)$ — алгебра над полем F (символ умножения $\cdot$ обычно будет опускаться). Обозначим через R_a оператор правого умножения в $\mathcal{A}$ на элемент $a \in \mathcal{A}$: $xR_a := x \cdot a := xa$ для всех $x \in \mathcal{A}$; алгебру $\text{End}(\mathcal{A})$ далее будем обозначать через $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$; действие $\phi := A \in \mathcal{M}$ на $a \in \mathcal{A}$ будем записывать справа: $\phi(a) := aA$.

Рассмотрим прямую сумму алгебр $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}$ и наделим ее произведением $\circ$ по правилу

$$A \circ a = aA + [A, R_a], \quad a \circ A = aA, \quad a \circ b = ab, \quad A \circ B = AB \quad (2)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}$. Полученная алгебра называется (*правым*) *эндоморфом* алгебры $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это правый модуль над $\mathcal{M}$.

Напомним, что $\mathcal{A}$ называется *алгеброй правого скалярного умножения*, если существует $\lambda \in \mathcal{A}^*$ такой, что $ab = \lambda(b)a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В данном случае $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathcal{A}_\lambda := \mathcal{A}_\lambda^r$ (с фиксированным символом λ). Аналогично определяется алгебра левого скалярного умножения $\mathcal{A}_\lambda^l$.

В [1] доказана следующая

Теорема 1.1. *Алгебра $E(\mathcal{A})$ является правосимметрической тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — правосимметрическая алгебра. Если $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_\lambda^r, \mathcal{A}_\lambda^l$, то алгебра $E(\mathcal{A})$ проста.*

Основная цель настоящей работы — описание смешанных однородных тождеств степени 3 для эндоморфов, т. е. тождеств, которые выполняются, когда в них присутствуют элементы разных типов, а также описание возникающих при этом обобщений правосимметрических алгебр. Смешанные тождества важны при изучении тождеств алгебр, у которых есть подалгебра с нефиксированной принадлежностью к многообразию алгебр. Изучив смешанные тождества, можно понять, какие условия нужно наложить на данную подалгебру, чтобы исходная алгебра лежала в некотором определенном многообразии. Заметим, что в эндоморфах есть подалгебра, изоморфная алгебре матриц $M_n(F)$ над полем F . Хорошо известно, что $M_n(F)$ не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $< 2n$ (исключая ассоциативность), однако $M_n(F)$ удовлетворяет тождествам, которые следуют из ассоциативности, к примеру: (1) или тождеству $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$, или тождествам $(1, 1)$ -алгебр, и т. п. Таким образом, эндоморф произвольной алгебры в принципе может удовлетворять таким тождествам степени 3. Описание смешанных тождеств на алгебрах вида $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — подалгебры и в тождестве присутствует строго один элемент из $\mathcal{A}$, дает конструкции бимодулей над $\mathcal{B}$ из получаемых многообразий (см. следствия 2.1–2.3). (Заметим, что, к примеру, супералгебры в некотором смысле также можно рассматривать как алгебры, определенные некоторыми «смешанными» тождествами.)

В настоящей работе в § 2 описаны смешанные однородные тождества степени 3 на правых эндоморфах. Заметим, что удастся получить полное описание таких тождеств, не зная тождеств исходной алгебры $\mathcal{A}$. Как следствие получены неприводимые модули над $M_n(F)$ из многообразия, определенного тождеством $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$. Строится огромный класс правосимметрических бимодулей, в частности, неприводимых правосимметрических $M_n(F)$ -бимодулей над произвольным векторным пространством и, как следствие, над

произвольной алгеброй (с левым действием как в эндоморфах). Также в данном параграфе выделен класс алгебр $\mathcal{A}_\omega$ с формой ω и ω -тождеством, обобщающий класс правосимметрических алгебр, где $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto F$ — некоторая билинейная кососимметрическая форма на алгебре $\mathcal{A}$. А именно, ω -правосимметрическая алгебра — это алгебра $\mathcal{A}$, на которой выполняется следующее тождество с формой:

$$(x, y, z)_{rs} = \omega(y, z)x$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$. В §3 дается описание конечномерных алгебр $\mathcal{A}_\omega$, в частности, простых таких алгебр.

Отметим, что примерами алгебр с формами являются также так называемые алгебры ω -Ли [2], исследованию которых посвящено множество работ (см., например, [3, 4] и ссылки в данных работах): векторное пространство L над полем F называется алгеброй ω -Ли, если на L определены антикоммутативное умножение $[\cdot, \cdot]$ и билинейная кососимметрическая форма $\omega(\cdot, \cdot) : L \times L \mapsto F$ такие, что

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = \omega(x, y)z + \omega(z, x)y + \omega(y, z)x$$

для любых $x, y, z \in L$. Заметим, что в [4] показано, что любая конечномерная алгебра ω -Ли (не являющаяся алгеброй Ли) является «вырожденной» в том смысле, что она содержит абелеву подалгебру малой коразмерности.

В §3 также показано, что коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ произвольной ω -правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является алгеброй ω -Ли; если $\mathcal{A}$ конечномерна, то $\mathcal{A}^{(-)}$ разрешима степени ≤ 3 и содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

§ 2. О смешанных тождествах эндоморфов

Пусть $\mathcal{A}$ — прямая сумма двух подалгебр $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, f — элемент свободной неассоциативной алгебры $F(X)$ от свободных порождающих $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ над полем F . Говорят, что полилинейный элемент $f(x_1, \dots, x_n) \in F(X)$ является смешанным тождеством алгебры $\mathcal{A}$, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_i \in \mathcal{A}$ таких, что по крайней мере два элемента среди $a_1, \dots, a_n$ лежат в разных подалгебрах, т. е. $a_i \in \mathcal{B}$, $a_j \in \mathcal{C}$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n$. При этом будем говорить, что f является $(k, n-k)$ -тождеством на $\mathcal{A}$, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ при наличии среди a_i в точности k элементов из $\mathcal{B}$ (и $n-k$ из $\mathcal{C}$).

Рассмотрим вопрос описания смешанных полилинейных тождеств степени 3 (далее: 3-тождеств) на правых эндоморфах $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F . Предположим, что на $E(\mathcal{A})$ выполняется нетривиальное 3-тождество. Любое такое тождество имеет следующий вид:

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (\alpha_\sigma x_\sigma^l - \beta_\sigma x_\sigma^r) = 0, \quad (3)$$

где $x_\sigma^l := (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}$, $x_\sigma^r := x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)})$, $\alpha_\sigma, \beta_\sigma \in F$. Заметим, что $\mathbb{S}_3$ естественно действует справа на данных тождествах, т. е.

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (\alpha_\sigma x_{\sigma\tau}^l - \beta_\sigma x_{\sigma\tau}^r) = 0$$

также является тождеством для любой $\tau \in \mathbb{S}_3$. Таким образом, любое полученное соотношение на коэффициенты $\alpha_\sigma, \beta_\sigma \in F$ ($\sigma \in \mathbb{S}_3$) переходит в соотношение на коэффициенты при правом действии $\mathbb{S}_3$.

Пусть $\alpha_i := \alpha_{\sigma_i}$, $\beta_i := \beta_{\sigma_i}$ и σ_i определяются следующим образом:

$$\sigma_1 = \text{Id}, \sigma_2 = (132), \sigma_3 = (123), \sigma_4 = (12), \sigma_5 = (13), \sigma_6 = (23).$$

Выпишем ради удобства правое действие $\mathbb{S}_3$ на данные коэффициенты (в левой части таблицы цифра i обозначает коэффициент α_i):

1	2	3	4	5	6	
5	6	4	3	1	2	(13)
4	5	6	1	2	3	(12)
6	4	5	2	3	1	(23)
3	1	2	5	6	4	(123)
2	3	1	6	4	5	(132)

Учитывая (2), выпишем явно (3) при $x_1 = x \in \mathcal{A}$, $x_2 = A$, $x_3 = B$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 xAB + \alpha_2 (xBA + [B, R_x]A) + \alpha_3 (xAB + [AB, R_x]) \\ & \quad + \alpha_4 (xAB + [A, R_x]B) + \alpha_5 (xBA + [BA, R_x]) + \alpha_6 xBA \\ & = \beta_1 xAB + \beta_2 (xAB + [B, R_{xA}]) + \beta_3 (xBA + [A, R_{xB}] + A[B, R_x]) \\ & \quad + \beta_4 (xBA + [A, R_{xB}]) + \beta_5 (xAB + [B, R_{xA}] + B[A, R_x]) + \beta_6 xBA. \end{aligned}$$

Полученное соотношение эквивалентно следующим:

$$((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_5))xAB = ((\beta_3 + \beta_4 + \beta_6) - (\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6))xBA, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_2 ([B, R_x]A) + \alpha_3 ([AB, R_x]) + \alpha_4 ([A, R_x]B) + \alpha_5 ([BA, R_x]) \\ & = \beta_2 ([B, R_{xA}]) + \beta_3 ([A, R_{xB}] + A[B, R_x]) \\ & \quad + \beta_4 ([A, R_{xB}]) + \beta_5 ([B, R_{xA}] + B[A, R_x]). \quad (5) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_\lambda$ — алгебра правого скалярного умножения. Легко видеть, что в этом случае все соотношения 3-тождеств получаются из (4) и действия $\mathbb{S}_3$. Если $\dim \mathcal{A} = 1$, то легко видеть, что $E(\mathcal{A})$ коммутативна и ассоциативна.

Далее считаем, что $\dim \mathcal{A} > 1$. Тогда все 3-тождества получаются из соотношения $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_5$ и действия $\mathbb{S}_3$. Легко видеть, что получаются еще три линейно независимых уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \beta_1 + \beta_5 + \beta_6, \\ \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 = \beta_2 + \beta_4 + \beta_5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6 = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, \end{cases}$$

и система приводится к следующему ступенчатому виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_5, \\ \alpha_2 - \alpha_4 = \beta_3 - \beta_5, \\ \alpha_6 - \alpha_3 = \beta_4 - \beta_1, \\ \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6. \end{cases}$$

Полагая свободную неизвестную α_5 равной 1, а остальные свободные неизвестные выбирая нулевыми, получаем решение $\alpha_5 = 1$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = 1$, т. е. приходим к смешанному (1, 2)-тождеству

$$f(x, y, z) := (xy)z - (yx)z + (zy)x - (zx)y = 0. \quad (6)$$

Непосредственная проверка показывает, что (6) является также (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. В случае $\alpha_6 = 1$ получаем эквивалентное тождество, а в остальных случаях получаемые тождества являются следствиями (1, 2)-тождества $g(x, y, z) := (xy)z - z(xy)$ алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. Более того, произвольное (1, 2)-тождество $E(\mathcal{A}_\lambda)$ имеет вид

$$\alpha_5 f(x, y, z) + \alpha_6 f(x, z, y) + \beta_1 g(y, z, x) + \beta_2 g(x, y, z) + \beta_3 g(z, x, y) + \beta_5 g(y, x, z) = 0.$$

Проверим, когда

$$\beta_1 g(y, z, x) + \beta_2 g(x, y, z) + \beta_3 g(z, x, y) + \beta_5 g(y, x, z) = 0 \quad (7)$$

является (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. Пусть $\lambda \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} g(A, y, z) &= yA \cdot z - z \cdot yA = \lambda_z yA - z \cdot yA, \\ g(x, A, z) &= \lambda_z xA - z \cdot xA, \quad g(x, y, A) = 0. \end{aligned}$$

Полагая $x = A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_\lambda)$, $y, z \in \mathcal{A}_\lambda$ в (7) такими, что $y, z \neq 0$, $yA = 0$, $zA = z$, $\lambda_y = 0$, $\lambda_z \neq 0$, получаем $\beta_3 = 0$. Аналогично случай $y = A$ дает $\beta_1 = 0$, а случай $z = A$ приводит к равенству $\beta_2 + \beta_5 = 0$. Таким образом, на $E(\mathcal{A}_\lambda)$ выполняется смешанное тождество

$$g(x, y, z) = g(y, x, z). \quad (8)$$

Легко видеть, что тождества (6) и (8) эквивалентны тождествам (6) и (1). Таким образом, если $\lambda \neq 0$, то все 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ являются следствиями тождеств правосимметричности и (6).

Если $\lambda = 0$, то из вышеприведенных рассуждений следует, что $x \cdot yz = yz \cdot x$ является (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ и при этом оно является следствием смешанной коммутативности. Таким образом, доказана

Теорема 2.1. Все смешанные 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ являются следствиями коммутативности и ассоциативности в случае $\dim \mathcal{A}_\lambda = 1$, в противном случае — следствиями смешанной правосимметричности и тождества (6) при $\lambda \neq 0$ и следствиями смешанной коммутативности и смешанной правосимметричности при $\lambda = 0$.

Далее считаем, что $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения; в частности, $\dim \mathcal{A} > 1$. Выбирая $y \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ так, что $yA = yB = 0$ и действуя (5) на y , получаем

$$(\alpha_2 + \alpha_5)(yx)BA + (\alpha_3 + \alpha_4)(yx)AB = (\beta_2 + \beta_5)(y \cdot xA)B + (\beta_3 + \beta_4)(y \cdot xB)A. \quad (9)$$

Предположим, что $\text{alg}\langle a, b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ для любых линейно независимых $a, b \in \mathcal{A}$ и при этом $x^2 = y$ для некоторых линейно независимых $x, y \in \mathcal{A}$. Выберем $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ так, что $xA = xB = 0$, $yA = y$, $yB = x$. Действуя (5) на x , получаем $(\alpha_2 + \alpha_5)x^2BA + (\alpha_3 + \alpha_4)x^2AB = 0$, откуда $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Далее рассмотрим следующий выбор $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$: $xA = 0$, $xB = y$, $yA = x$, $yB = 0$. Заметим, что при этом $(xy)A, (yx)A \in \langle x \rangle$. Используя действие (5) на x , выводим $-\alpha_3 y - \alpha_4 y + \alpha_5 y \equiv \beta_5 y \pmod{\langle x \rangle}$, откуда, применяя действие $\mathbb{S}_3$ и (4), приходим к тождествам смешанной правосимметричности.

Предположим, что $xy \in \langle x, y \rangle$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$ (назовем такие алгебры «обобщенно квадратичными»); в частности, $x^2 \in \langle x \rangle$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Тогда можно считать, что существуют линейно независимые $x, y \in \mathcal{A}$ такие, что $yx = \alpha x + \beta y$ для некоторых $\alpha, \beta \in F$, $\alpha \neq 0$. Действительно, если $yx = \beta_y^x y$ для

каждого фиксированного $x \in \mathcal{A}$, некоторого $\beta^x \in \mathcal{A}^*$ и всех $y \in \mathcal{A}$, то $x^2 = \beta_x^x x$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Вместо y рассмотрим $z = y + x$. Тогда

$$zx = (y + x)x = \beta_y^x y + \beta_x^x x = \beta_y^x (z - x) + \beta_x^x x = \beta_y^x z + (\beta_x^x - \beta_y^x)x.$$

Если $\beta_x^x - \beta_y^x = 0$ для любых x и y из $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ — алгебра правого скалярного умножения, что не так.

Теперь, полагая $xA = y, xB = x$ ($yA = yB = 0$ в условиях (9)), имеем $(yx)A = (yx)BA = \alpha y$, $(yx)AB = 0$ и из (9) получаем $\alpha_2 + \alpha_5 = \beta_3 + \beta_4$ (так как $y^2 \in \langle x, y \rangle$, то $y^2 B \in \langle x \rangle$), откуда действие $\mathbb{S}_3$ (с применением равенства $\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_3 + \beta_4 + \beta_6$, получаемого из (4)) дает $\alpha_i = \beta_i$ для всех i , а также

$$\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_6.$$

Отсюда выводим, что все 3-тождества являются следствиями правосимметричности и тождества «моноассоциативности»

$$(x, y, z)_s := (x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что тождество

$$(x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} = (x, y, z)_s - (y, x, z)_s$$

выполняется в любой алгебре, поэтому произвольное 3-тождество, которое следует из правосимметричности и (10), имеет вид

$$\alpha(x, y, z)_{rs} + \beta(y, x, z)_{rs} + \gamma(z, x, y)_{rs} + \delta(x, y, z)_s = 0 \quad (11)$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$. Так как (2, 1)-тождество $(x, y, z)_{rs} = 0$ нетривиально только при $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, далее можно считать, что $\delta \neq 0$, иначе все тождества следуют из смешанной правосимметричности. Переставляя циклически x, y, z в (11) и вычитая полученное равенство из (11), приходим к тому, что либо в $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность, либо $\alpha = \beta = \gamma$, $\chi(F) = 2$. Во втором случае из (11) следует, что в $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанное тождество $(x, y, z)_s = \tau(y, x, z)_s$, откуда $\tau = 1$. Тогда в $E(\mathcal{A})$ справедливо смешанное тождество $(x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} = 0$, т. е. выполняются смешанная правосимметричность и тождество $(x, y, z)_s = 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда существуют линейно независимые $x, y \in \mathcal{A}$ такие, что $z = yx \notin \langle x, y \rangle$. Рассматривая A и B в (9) такие, что

$$yA = yB = 0, \quad xA = xB = x, \quad zA = x, \quad zB = 0,$$

получаем $\alpha_3 + \alpha_4 = \beta_3 + \beta_4$; а если мы определим A и B в (9) правилом $xA = x$, $xB = x$, $zA = z$, $zB = 0$, $yA = yB = 0$, то выводим $\beta_3 + \beta_4 = 0$. С учетом равенства $\beta_3 + \beta_4 + \beta_6 = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6$, которое следует из (4), действие $\mathbb{S}_3$ на полученные соотношения опять приводит нас к смешанной правосимметричности.

Найдем необходимые и достаточные условия на $\mathcal{A}$, при которых на $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность. Из (4), (5) следует, что достаточно рассмотреть случай, когда два элемента в $(x, y, z)_{rs} = 0$ выбираются из $\mathcal{A}$. Легко проверяется, что $(x, y, A)_{rs} = 0$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Далее,

$$\begin{aligned} (A, x, y) &= (xA + [A, R_x]) \cdot y - A \cdot xy \\ &= xA \cdot y + y[A, R_x] + [[A, R_x], R_y] - (xy)A - [A, R_{xy}] \end{aligned}$$

$$= xA \cdot y + yA \cdot x - (yx)A + [[A, R_x], R_y] - (xy)A - [A, R_{xy}],$$

откуда

$$(A, x, y)_{rs} = [[A, R_x], R_y] - [[A, R_y], R_x] + [A, R_{yx}] - [A, R_{xy}] = [A, [R_y, R_x] - R_{[y, x]}].$$

Таким образом, на $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность тогда и только тогда, когда $[R_x, R_y] - R_{[x, y]} = \omega(x, y) \text{Id}$ для некоторой билинейной кососимметрической формы $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto F$ и для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Последнее операторное соотношение на языке тождеств с формой может быть записано следующим образом:

$$(x, y, z)_{rs} = \omega(y, z)x \quad (12)$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$, которое далее будем называть ω -тождеством. Обозначим алгебру $\mathcal{A}$ с ω -тождеством (12) через $\mathcal{A}_\omega$ и назовем ω -правосимметрической алгеброй. В итоге доказана

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_\lambda$ и на $E(\mathcal{A})$ выполняется нетривиальное 3-тождество. Если алгебра $\mathcal{A}$ обобщенно квадратичная, то все 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A})$ следуют из смешанной правосимметричности при $\chi(F) \neq 2$, а также смешанной моноассоциативности при $\chi(F) = 2$. В противном случае все смешанные 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A})$ являются следствиями смешанной правосимметричности, которая выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае обобщенно квадратичных алгебр и $\chi(F) = 2$ легко показать, что смешанная моноассоциативность влечет коммутативность алгебры $\mathcal{A}$, а также что $\mathcal{A}$ будет ω -правосимметрической алгеброй. Из результатов §3 следует, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_0$, т. е. реально данный случай в теореме не возникает.

Напомним определение (γ, δ) -алгебр, введенных А. А. Албертом (см., например, [5, с. 425]). Алгебра $\mathcal{A}$ над полем F называется (γ, δ) -алгеброй, где γ, δ — фиксированные скаляры из F , если на $\mathcal{A}$ выполнены следующие тождества:

$$(x, x, x) = 0, \quad (x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0, \\ (x, y, z) + \gamma(y, x, z) + \delta(z, x, y) = 0$$

при $\gamma^2 - \delta^2 + \delta = 1$. Легко видеть, что тождество $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$ является следствием тождества $(xy)z = z(xy)$. Обозначим через $\mathcal{P}$ многообразие алгебр с тождеством $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$. Очевидно, что $M_n(F) \in \mathcal{P}$. Отметим, что при наличии правосимметричности алгебры из $\mathcal{P}$ попадают в класс (γ, δ) -алгебр при $(\gamma, \delta) = (1, 1)$ и $\chi(F) \neq 3$. Заметим, что эндоморф $E(\mathcal{A}_0)$ не является ассоциативной алгеброй в случае $\lambda = 0$ и $\dim \mathcal{A}_0 > 1$, так как $(A, x, B) \neq 0$ в общем случае для подходящих $x \in \mathcal{A}_0, A, B \in \text{End}(\mathcal{A}_0)$. Произвольное векторное пространство V над полем F можно рассмотреть как алгебру с нулевым умножением, которая является алгеброй правого скалярного умножения. Таким образом, получаем

Следствие 2.1. Пусть V_n — векторное пространство размерности n над полем F . Тогда V_n является неприводимым $\mathcal{P}$ -бимодулем (а также $(1, 1)$ -бимодулем) над $M_n(F) = \text{End } V$ относительно действия $Av = vA, v \in V, A \in M_n(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2 $E(V) = V \oplus \text{End}(V)$ лежит в многообразии $\mathcal{P}$ (а также в многообразии $(1, 1)$ -алгебр), поэтому V является $\mathcal{P}$ -модулем $((1, 1)$ -бимодулем) над $M_n(F)$. Неприводимость V очевидна, так как на V действует полная матричная алгебра. $\square$

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра размерности n над полем F . Тогда $E(\mathcal{A})$ является правосимметрическим бимодулем над $M_n(F)$ относительно действия $M_n(F)$ как подалгебры. При этом $M_n(F)$ — неприводимый подбимодуль в $E(\mathcal{A})$, а $E(\mathcal{A})/M_n(F)$ — неприводимый $M_n(F)$ -бимодуль, который изоморфен бимодулю V_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 2.1 и 2.2 и конструкции $E(\mathcal{A})$. $\square$

В заключение данного параграфа приведем важные конструкции неприводимых правосимметрических бимодулей. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная алгебра над полем F . Положим $\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \{b \in \mathcal{B} : [xy, b] = [x, b]y + x[y, b] \ \forall x, y \in \mathcal{B}\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F (если $\mathcal{A}$ — векторное пространство над F , то считаем $\mathcal{A}$ алгеброй с нулевым умножением). Предположим, что $\mathcal{A}$ является ассоциативным правым $\mathcal{B}$ -модулем, т. е. задано правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ такое, что $(ax)y = a(xy)$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathcal{B}$. Пусть дано линейное отображение $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Определим на прямой сумме $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ векторных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ структуру алгебры над полем F , считая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подалгебрами, правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ совпадающим с правым модульным ассоциативным действием $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$, а левое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ следующим:

$$ba = ab + [b, \phi_a]$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Обозначим полученную алгебру через $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$.

Теорема 2.3. Для любой алгебры $\mathcal{B}$ в алгебре $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$ выполняется смешанное (1, 2)-тождество правосимметричности. Если $\mathcal{B}$ правосимметрична и $\mathcal{A}$ — неприводимый правый $\mathcal{B}$ -модуль, то $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $\mathcal{B}$ -бимодулем. В частности, если $\mathcal{A}$ — векторное пространство, $\mathcal{B} = \text{End } \mathcal{A}$, ϕ — произвольное линейное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $M_n(F)$ -бимодулем, где $n := \dim_F \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим (1, 2)-тождество правосимметричности в $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$. Пусть $a \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{B}$. Тогда $(x, A, B)_{rs} = 0$ следует из ассоциативности правого действия $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$. Проверим равенство $(A, x, B)_{rs} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (A, x, B)_{rs} &= (xA + [A, \phi_x])B - A(xB) - (AB)x + A(xB + [B, \phi_x]) \\ &= xAB + [A, \phi_x]B - xBA - [A, \phi_{xB}] \\ &\quad - x(AB) - [AB, \phi_x] + xBA + [A, \phi_{xB}] + A[B, \phi_x] = 0, \end{aligned}$$

так как $\phi_a \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Неприводимость $\mathcal{A}$ как $\mathcal{B}$ -бимодуля очевидна. Последнее утверждение следует из того, что в данном случае $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, так как алгебра $\mathcal{B}$ ассоциативна. $\square$

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная ненулевая алгебра размерности n над полем F . Тогда $(\mathcal{A}, \text{End } \mathcal{A}, R) \cong E(\mathcal{A})$, где $R_a := \phi_a$ — оператор правого умножения на $a \in \mathcal{A}$, а подпространство $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $M_n(F)$ -бимодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определений данных алгебр и теоремы 2.3. $\square$

3. Описание алгебр $\mathcal{A}_\omega$

Приведем конкретный пример нетривиальной ω -правосимметрической алгебры.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим двумерную алгебру $\mathcal{A}_1$ с базисом a, b и ненулевым умножением $a^2 = -2a$, $ab = a$, $ba = -b$. Легко проверить, что данная алгебра является алгеброй с ω -тождеством (12) при $\omega(a, b) = 1$. Также легко видеть, что данная алгебра проста.

Напомним, что если $\mathcal{A}$ — алгебра, то коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ — это алгебра, получаемая введением на $\mathcal{A}$ нового умножения: $[a, b] := ab - ba$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *Ли-допустимой*, если $\mathcal{A}^{(-)}$ является алгеброй Ли. Хорошо известно, что правосимметрические алгебры Ли-допустимы. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ является ω -Ли-допустимой, если $\mathcal{A}^{(-)}$ — алгебра ω -Ли.

Предложение 3.1. ω -Правосимметрические алгебры ω -Ли-допустимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ — ω -правосимметрическая алгебра. Для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] &= (xy - yx)z - z(xy - yx) + (zx - xz)y \\ &\quad - y(zx - xz) + (yz - zy)x - x(yz - zy) = (x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} \\ &= \omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}^{(-)}$ является алгеброй ω -Ли. $\square$

Исследуем нетривиальную алгебру $\mathcal{A}_\omega$ над полем F , т. е. с нетривиальным ω -тождеством (12): $\omega : \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \mapsto F$ — ненулевая кососимметрическая форма на $\mathcal{A}_\omega$. Всюду далее ω -правосимметрические алгебры будут предполагаться нетривиальными.

Покажем, что на $\mathcal{A}_\omega$ выполняется следующее тождество с формой:

$$(\omega(x, [y, z]) + \omega(z, [x, y]) + \omega(y, [z, x]))v = v(\omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z) \quad (13)$$

для всех $x, y, z, v \in \mathcal{A}_\omega$.

Рассмотрим тождество пяти ассоциаторов

$$(v, x, y, z) + (v, x, yz) - v(x, y, z) - (v, x, y)z - (v, xy, z) = 0, \quad (14)$$

выполняющееся в любой алгебре. Сделав в (14) замены $\{x, y, z\} \mapsto \{y, z, x\}$ и $\{x, y, z\} \mapsto \{z, x, y\}$, приходим соответственно к соотношениям

$$\begin{aligned} (vy, z, x) + (v, y, zx) - v(y, z, x) - (v, y, z)x - (v, yz, x) &= 0, \\ (vz, x, y) + (v, z, xy) - v(z, x, y) - (v, z, x)y - (v, zx, y) &= 0. \end{aligned}$$

Суммируя эти три равенства и используя (12), получаем

$$\begin{aligned} (vx, y, z) + (vy, z, x) + (vz, x, y) + (\omega(x, yz) + \omega(y, zx) + \omega(z, xy))v \\ - v(x, y, z) - (v, x, y)z - v(y, z, x) - (v, y, z)x - v(z, x, y) - (v, z, x)y = 0. \end{aligned}$$

Переставив в последнем равенстве x и z и вычитая полученное, после сокращения приходим к (13).

Обозначим ядро отображения ω через $\text{Ker } \omega := \{x \in \mathcal{A}_\omega : \omega(x, \mathcal{A}_\omega) = 0\}$. Напомним, что ω называется *невыврожденным*, если $\text{Ker } \omega = 0$. Алгебру $\mathcal{A}_\omega$ с ω -тождеством (12) назовем *невыврожденной*, если ω невырожденно.

Определим полилинейное отображение $\psi : \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \mapsto \mathcal{A}_\omega$ правилом

$$\psi(x, y, z) = \omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z.$$

Далее для простоты изложения предполагаем конечномерность всех встречающихся векторных пространств над полем F и считаем, что $\chi(F) \neq 2$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — векторное пространство над полем F с невырожденной кососимметрической формой ω и $n := \dim \mathcal{A}_\omega \geq 4$. Тогда $\text{Im } \psi = \mathcal{A}_\omega$.

Доказательство. Из невырожденности ω следует, что базис $e_1, \dots, e_{2k}$, $2k = n$, можно выбрать в $\mathcal{A}_\omega$ так, что $\omega(e_{2s-1}, e_{2s}) = 1$, $\omega(e_i, e_j) = 0$ при $\{i, j\} \neq \{2s-1, 2s\}$, $s = 1, \dots, k$. Тогда $\psi(e_i, e_{2s-1}, e_{2s}) = e_i$ при $i \notin \{2s-1, 2s\}$, что и доказывает лемму. $\square$

Пусть $S := \text{Ker } \omega \neq 0$. Из (13) следует, что если $x \in S$, то $vx = \xi_x v$ для некоторого $\xi \in S^*$ и для всех $v \in \mathcal{A}_\omega$. В частности, S является подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$. Представим $\mathcal{A}_\omega$ в виде $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$. Тогда ω невырожденно на U . Если $\dim U > 2$, то из леммы 3.1 и (13) получаем $vx = \theta_x v$ для любых $v \in \mathcal{A}_\omega$, $x \in U$ и некоторого $\theta \in U^*$. Таким образом, $vx = \tau_x v$ для некоторого $\tau \in \mathcal{A}_\omega^*$ и всех $v, x \in \mathcal{A}_\omega$. Теперь $(v, x, y) = (\tau_x \tau_y - \tau_{xy})v$, $\tau_{xy} = \tau(\tau_y x) = \tau_x \tau_y$, т. е. $(v, x, y) = 0$ для любых $x, y, v \in \mathcal{A}_\omega$. Получили противоречие с нетривиальностью ω . Таким образом, $\dim U = 2$. Заметим, что если $\mathcal{A}_\omega$ невырожденна, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и алгебра $\mathcal{A}_\omega$ проста. Действительно, пусть $I = \langle a \rangle$ — ненулевой идеал в $\mathcal{A}_\omega$, $\mathcal{A}_\omega = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $\omega(a, b) = 1$. Тогда $(x, a, b)_{rs} = x \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}_\omega$; противоречие.

Заметим, что

$$(U, S, S) = (S, U, S) = (S, S, U) = 0.$$

Действительно, для любых $u \in U, a, b \in S$ имеем

$$\begin{aligned} (u, a, b) &= \xi_a \xi_b u - \xi_{ab} u = \xi_a \xi_b u - \xi_{\xi_b a} u = 0, \\ (a, b, u) &= (a, u, b) = \xi_b a u - \xi_{ba} u = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

так как $xa = \xi_a x$ для любых $x \in \mathcal{A}_\omega, a \in S$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра. Тогда $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, где $S := \text{Ker } \omega$ является правосимметрической подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$, $US \subseteq U$, $(U, S, S) = (S, U, S) = (S, S, U) = 0$, $\dim U = 2$ и ω невырожденно на U . В частности, если $\mathcal{A}_\omega$ невырожденна, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и алгебра $\mathcal{A}_\omega$ проста.

Рассмотрим случай $\xi = 0$, т. е. S — алгебра с нулевым умножением и $US = 0$. Если левое действие S на U нулевое, то, полагая в (12) $x \in S, y, z \in U$ при $\omega(y, z) = 1$, приходим к противоречию. Значит, можно считать, что существует $u \in U$ такой, что $au \neq 0$ для некоторого $a \in S$. Пусть $au = b + v$ для ненулевого $v \in U$ и некоторого $b \in S$. Тогда из (15) имеем $s \cdot au = 0$ и $sv = 0$ для любого $s \in S$. Значит, $U = \langle u, v \rangle$, при этом можно предполагать $\omega(u, v) = 1$. Если $su = c + \beta u + \gamma v$ для $s, c \in S, \beta, \gamma \in F$, то $0 = a \cdot su = \beta au$ и $\beta = 0$. Таким образом, получаем следующее левое действие S на U :

$$su = \phi_s + \tau_s v, \quad sv = 0$$

для любого $s \in S$ и некоторых $\phi \in \text{End } S, \tau \in S^*$.

Предположим, что $\tau \neq 0$. Равенства $(u, s, u)_{rs} = 0$ и $(v, s, u)_{rs} = 0$ при $s \in S$ дают $\tau_s uv = 0$ и $\tau_s v^2 = 0$, т. е. $uv = 0 = v^2$. Теперь $(s, u, v)_{rs} = s$ влечет $-s \cdot uv + s \cdot vu = s \cdot vu = s$. Если $vu = d + \theta u + \nu v$ для некоторых $d \in S, \theta, \nu \in F$, то $s \cdot vu = \theta(\phi_s + \tau_s v) = s$, что противоречиво. Таким образом, в случае алгебры S с нулевым умножением левое действие S на U (в $S+U$) — это правое действие U на S , т. е. $SU \subseteq S$. Заметим, что по доказанному равенство $(U, S, U) = 0$ выполнено всегда при условии $S^2 = 0$, а равенство $(s, u_1, u_2)_{st} = \omega(u_1, u_2)s$ для любых

$u_i \in U$ и $s \in S$ эквивалентно $(su)v - s(uv) - (sv)u + s(vu) = s$ для любого $s \in S$ и $U = \langle u, v \rangle$, $\omega(u, v) = 1$. Последнее равенство можно переписать в операторном виде через операторы правого умножения $R_u, R_v, R_{[u,v]}$ действующие из S в S при $u, v \in U$:

$$[R_u, R_v] - R_{[u,v]} = \text{Id}. \quad (16)$$

Осталось определить умножение на U (в $S + U$). Положим

$$u_1 u_2 = h(u_1, u_2) + u_1 \circ u_2, \quad (17)$$

где $h : U \times U \mapsto S$, $u_i \in U$, а $\circ$ — некоторое произведение в U . Тогда из (12) следует, что $(U; \circ) := \langle u, v \rangle$ — двумерная алгебра с ω -тождеством (12), а h согласовано с действием U на S следующим образом:

$$\begin{aligned} h(u, u)v - h(u, v)u &= h(u, u \circ v) - h(u \circ u, v) + h(u \circ v, u) - h(u, v \circ u), \\ h(v, v)u - h(v, u)v &= h(v, v \circ u) - h(v \circ v, u) + h(v \circ u, v) - h(v, u \circ v). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что если $S \neq 0$, то S — собственный идеал в $\mathcal{A}_\omega$.

Обратно, если $\mathcal{A} = S \oplus U$, где U и S удовлетворяют вышеперечисленным условиям, то легко проверяется, что $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй.

Для построенной алгебры $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\omega$ обозначим через $\mathcal{L}$ алгебру $\mathcal{A}^{(-)}$. Тогда легко видеть, что $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = S \oplus \langle u \circ v \rangle$. Так как $SU \subseteq S$, то $[[\mathcal{L}, \mathcal{L}], [\mathcal{L}, \mathcal{L}]] \subseteq S$, а потому $\mathcal{L}$ разрешима степени ≤ 3 . Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра, $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, и $S := \text{Кег } \omega$ — алгебра с нулевым умножением. Тогда $US = 0$, $SU \subseteq S$, умножение на U задается правилом $uv = h(u, v) + u \circ v$, где $\omega(u, v) = 1$, $(U; \circ) = \langle u, v \rangle$ — двумерная ω -правосимметрическая алгебра, умножение на U определено при помощи (17), h согласовано с действием U на S посредством (18) и выполнены соотношения (16). В частности, если $\mathcal{A}_\omega$ проста, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и $\mathcal{A}_\omega = U$. Обратно, если $\mathcal{A} = S \oplus U$, где U и S удовлетворяют вышеперечисленным условиям, то $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй. При этом $\mathcal{A}_\omega^{(-)}$ является разрешимой алгеброй ω -Ли степени ≤ 3 , которая содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим $(n+2)$ -мерную алгебру $\mathcal{A}_\omega := S + U$ над полем F , где $S = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $U = \langle u, v \rangle$, $\omega(u, v) = \alpha$, и произведение определено как в теореме 3.2, считая произведение на U заданным по правилу

$$u^2 = u + \beta v, \quad uv = v, \quad vu = \alpha u + (1 - \alpha\beta)v; \quad v^2 = \alpha\beta^{-1}u - \alpha v,$$

для некоторых фиксированных ненулевых $\alpha, \beta \in F$. Легко проверить, что U удовлетворяет ω -тождеству (12), а (16) в данном случае эквивалентно разрешимости уравнения $[X, Y] = Y$ в $M_n(F)$, которое имеет многочисленные решения. Поэтому, определяя h нулевым отображением, получаем многочисленные примеры ω -правосимметрических алгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Двумерные ω -правосимметрические алгебры легко классифицировать, что оставляем заинтересовавшемуся читателю.

Рассмотрим теперь случай ненулевого умножения на S . Будем говорить, что $\mathcal{A}_\omega$ — алгебра с нетривиальным ядром, если $\text{Кег } \omega$ — это алгебра с ненулевым умножением.

Поскольку $\dim \text{Ker } \xi = \dim S - 1$, базис $\{e, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ в S можно выбрать так, что ненулевыми являются только следующие произведения базисных элементов:

$$e^2 = e, \quad fe = f \quad (19)$$

при $f \in W := \text{Ker } \xi = \langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$; $\xi(e) = 1$, откуда $xe = x$ для любого $x \in \mathcal{A}_\omega$. Легко видеть, что S является ассоциативной подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$. Из (15) имеем $ab \cdot u = a \cdot bu$ для любых $u \in U, a, b \in S$, откуда получаем следующие соотношения для левого действия S на U (в $S + U$):

$$eu = e \cdot eu, \quad e \cdot fu = 0, \quad f \cdot gu = 0, \quad fu = f \cdot eu \quad (20)$$

для любых $f, g \in W, u \in U$. Отметим, что случай $W = 0$ также допустим, при этом $S = \langle e \rangle$ — поле.

Заметим, что если $SU = 0$, то из соотношений $(x, e, y)_{rs} = 0$ для любых $x, y \in U$ следует $U^2 = 0$, что противоречит (12). Таким образом, $SU \neq 0$.

Рассмотрим случай $SU \neq 0$ и $SU \subseteq S$. Учитывая (20) и подправляя при необходимости базис $\langle u, v \rangle$ в U , можно считать, что $ev = e, eu = e$. Из равенств $(x, e, y)_{rs} = 0$ для всех $x, y \in U$ получаем, что U является подалгеброй с произведением

$$u^2 = u, \quad v^2 = v, \quad vu = v, \quad uv = u,$$

которое, очевидно, ассоциативно, а потому соотношение (12) противоречиво на U .

Таким образом, $SU \not\subseteq S$. Если $fu = a + v$ для некоторых $f \in W, a \in S, u, v \in U, v \neq 0$, то из $f \cdot eu = fu$ следует $eu \notin S$. Таким образом, всегда можно считать, что $eu = b + v$ для некоторых $b \in S, u, v \in U, v \neq 0$. Тогда $eu = e \cdot eu = eb + ev$, откуда $ev \equiv v$ (здесь и далее, если не оговорено противное, то сравнимость $\equiv$ рассматривается по модулю S). Рассматривая $u - v$ вместо u , получаем $ev \equiv v, eu \equiv 0$. Итак, имеем

$$ev = v + g, \quad eu = \tau e, \quad fu = \tau f$$

для некоторых $g \in W, \tau \in F$ и произвольного $f \in W$, что получается из соотношений (20). Заметим, что $x \cdot f = 0, x \cdot e = x$ для любых $x \in \mathcal{A}_\omega, f \in W$, и можно считать $\omega(u, v) = 1$.

Из соотношения $(v, e, u)_{rs} = 0$ получаем $vu = \tau v$. Из $e \cdot fv = 0$ выводим $fv \equiv \gamma_f(u - \tau e)$ для произвольного $f \in W$ и некоторого $\gamma \in S^*$ (здесь и далее сравнимость по модулю W). Пусть $uv = \beta e + f_1 + \varsigma v + \sigma u$ для некоторых $\beta, \varsigma, \sigma \in F, f_1 \in W$. Тогда из $(e, u, v)_{rs} = e$ следует

$$\tau ev - e \cdot uv - (v + g)u + \tau(v + g) = e,$$

$$\tau(v + g) - (\beta e + \varsigma(v + g) + \sigma \tau e) = e,$$

откуда $\varsigma = \tau, \beta + \sigma\tau = -1$. Из соотношения $(u, e, u)_{rs} = 0$ получаем $u^2 = \tau u$.

Проверяя оставшиеся соотношения, убеждаемся в их истинности при полученных ограничениях. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}_\omega$ в данном случае задается произведением (19) в подалгебре S и следующими условиями ($\equiv \text{mod } W$):

$$\begin{aligned} ev \equiv v, \quad au = \tau a, \quad fv \equiv \gamma_f(u - \tau e), \quad \omega(u, v) = 1, \\ uv \equiv -(1 + \sigma\tau)e + \tau v + \sigma u, \quad ae = a, \quad af = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

для любых $a \in \mathcal{A}_\omega, f \in W$ и произвольных фиксированных $\sigma, \tau \in F, \gamma \in W^*$. Отметим, что ограничений на v^2 нет, т. е. v^2 можно положить произвольным

элементом из $\mathcal{A}_\omega$. В случае $W = 0$ доказательство проходит аналогично и в результате получаются те же самые правила для произведения (19) и (21), в которых f и W отсутствуют, а $\equiv$ заменяется равенством. Обратно, легко проверяется, что любая алгебра с произведением, заданным при помощи (19) и (21), ω -правосимметрическая.

Заметим, что $[S, \mathcal{A}_\omega] \subseteq \mathcal{B} := \langle u - \tau e \rangle \oplus S$, $[\mathcal{B}, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{C} := \langle u - \tau e \rangle \oplus W$, а $[\mathcal{C}, \mathcal{C}] = 0$. В итоге доказана

Теорема 3.3. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра с нетривиальным ядром. Тогда $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, где $S := \text{Ker } \omega$ и ненулевое произведение в S задается при помощи (19), S является ассоциативной подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$, $SU \neq 0$, $SU \subseteq S$, а произведение $\mathcal{A}_\omega \times U \mapsto \mathcal{A}_\omega$ удовлетворяет условиям (21). Обратно, любая алгебра с произведением, заданным при помощи (19) и (21), ω -правосимметрическая. При этом $\mathcal{A}_\omega^{(-)}$ является разрешимой алгеброй ω -Ли степени ≤ 3 , которая содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

Алгебры, выделенные теоремой 3.3, будем обозначать через $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$, где π, h — наборы соответствующих параметров из F и элементов из W , определяющие умножение в данной алгебре.

В заключение установим критерий простоты ω -правосимметрических алгебр $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$. В формулировке теоремы 3.4 используем обозначения из доказательства теоремы 3.3, а для ее доказательства понадобится

Лемма 3.2. Если I — собственный идеал ω -правосимметрической алгебры, то $I \subseteq \text{Ker } \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ω -правосимметрическая алгебра. Так как $(x, i, y)_{rs} = (i, y)x$ для любых $i \in I$, $x, y \in \mathcal{A}$, то, выбирая $x \notin I$, получим, что левая часть предыдущего равенства лежит в I , а правая не лежит в I , если $I \not\subseteq \text{Ker } \omega$. $\square$

Теорема 3.4. Алгебра $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$ проста тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \gamma$ не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств.

Доказательство. Заметим, что если $\text{Ker } \gamma$ содержит ненулевое R_v -инвариантное подпространство Γ , то $\Gamma \trianglelefteq \mathbb{A} := \mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$. Поэтому далее можно считать, что $\text{Ker } \gamma$ не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств.

Докажем простоту алгебры $\mathbb{A}$. Пусть I — ненулевой идеал в $\mathbb{A}$ и x — ненулевой элемент из I . Тогда $x = \alpha e + \beta f$ по лемме 3.2, где $\alpha, \beta \in F$, $f \in W$, откуда $ex = \alpha e \in I$, $\alpha = 0$ и $\beta f \in I$. Таким образом, $f \in I$ для некоторого $f \in W$.

Заметим, что если $f \in I \cap \text{Ker } \gamma$, то $fR_v^k \notin \text{Ker } \gamma$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $u - \tau e + h \in I$ для некоторого $h \in W$, но тогда $I = \mathbb{A}$ по лемме 3.2. Если же $f \in I$, но $f \notin \text{Ker } \gamma$, то опять $u + h \in I$ для некоторого $h \in W$ и $I = \mathbb{A}$, как и выше. В итоге в любом случае приходим к равенству $I = \mathbb{A}$.

Если $W = 0$, то всегда можно считать, что $\text{Ker } \gamma$, равное нулю, не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств. В этом случае аналогичные рассуждения показывают, что алгебра $\mathbb{A}$ простая. $\square$

Следующая заключительная лемма дает пример простой конечномерной ω -правосимметрической алгебры произвольной размерности $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.

Лемма 3.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $W := \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ в $\mathbb{A} := \mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$ и $\gamma \in W^*$ такой, что $\gamma(f_1) = 1$, $\gamma(f_i) = 0$ при $i \geq 2$. Если правое действие v на W (в $W + U$) определено правилом

$$f_1 v = u - \tau e, \quad f_i v = f_{i+1}, \quad 1 < i < n, \quad f_n v = f_1,$$

то алгебра $\mathbb{A}$ простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, легко видеть, что если $V \leq W$ является R_v -инвариантным и $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V$ для некоторых $\alpha_i \in F$, то $\alpha_1 = 0$, откуда следует $\alpha_n = 0$, и далее получаем $\alpha_i = 0$ для любого $i = 2, \dots, n-1$. Таким образом, $V = 0$ и алгебра $\mathbb{A}$ проста по теореме 3.4. $\square$

Учитывая пример 3.1, теорему 3.4 и лемму 3.2, получаем, что простые ω -правосимметрические алгебры существуют в произвольной размерности $k \geq 2$ над произвольным полем F характеристики не 2.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожидаев А. П. Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.
2. Nurowski P. Deforming a Lie algebra by means of a 2-form // J. Geometry Physics. 2007. V. 57. P. 1325–1329.
3. Zhang R. Representations of ω -Lie algebras and tailed derivations of Lie algebras // Inter. J. Algebra Comput. 2021. V. 31. P. 325–339.
4. Zusmanovich P. ω -Lie algebras // J. Geom. Phys. 2010. V. 60, N 6–8. P. 1028–1044.
5. Общая алгебра / под. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1990. Т. 1.

Поступила в редакцию 25 февраля 2025 г.

После доработки 24 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

app@math.nsc.ru