Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 517.951

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены достаточные условия существования решения задачи Коши для линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами соболевского типа второго порядка в пространстве обобщенных функций медленного роста.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.412

Ключевые слова: задача Коши, уравнение соболевского типа, обобщенная функция медленного роста, мультипликатор.

1. Введение

В полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$ рассматривается задача Коши

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_1(D_x)\partial_t u + P_0(D_x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = g_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = g_1, \tag{1.2}$$

где $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j},\ D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n}),\ P_k(\sigma),\ k = 0, 1, 2,$ — многочлены с комплексными коэффициентами.

Уравнение (1.1) является уравнением соболевского типа. Так часто называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной. Исследование задач для таких уравнений начато С. Л. Соболевым в [1].

Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию Петровского в виде

$$P_2(\sigma)\lambda^2(\sigma) + P_1(\sigma)\lambda(\sigma) + P_0(\sigma) = 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{Re}\lambda(\sigma) \leq \gamma. \tag{P}$$

В настоящее время имеется огромное количество работ, посвященных задачам для уравнений и систем уравнений соболевского типа. Это связано с их широким использованием в математическом моделировании многих процессов. В монографиях [2, 3] представлены обширные перечни работ по данному направлению. Однако работ, в которых рассматривалось решение задачи Коши для уравнений соболевского типа в классах растущих функций, сравнительно немного (см. [4–9] и литературу в них).

Под *решением* задачи (1.1), (1.2) часто понимают обобщенную функцию $u(t)$, зависящую гладко от параметра t и удовлетворяющую (1.1), (1.2) в обобщенном смысле. Такие решения будем называть *сильными обобщенными решениями. Слабым обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) называют обобщенную функцию u, сосредоточенную в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ и удовлетворяющую уравнению

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_1(D_x)\partial_t u + P_0(D_x)u = P_2(D_x)g_0 \otimes \delta_t' + (P_2(D_x)g_1 + P_1(D_x)g_0) \otimes \delta_t, \quad (1.3)$$

где δ_t — дельта-функция на $\mathbb{R}$ [6]. Нетрудно убедиться, что всякое сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) является слабым обобщенным решением.

В настоящей работе рассматриваются сильные обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) со значениями в пространстве медленно растущих обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$.

После применения преобразования Фурье по пространственным переменным задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$P_2(\sigma)\partial_t^2 \widehat{u} + P_1(\sigma)\partial_t \widehat{u}(t) + P_0(\sigma)\widehat{u}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\widehat{u}(t)\big|_{t=0} = \widehat{g_0}, \quad \frac{d\widehat{u}(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \widehat{g_1}, \quad (1.5)$$

где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье обобщенной функции f.

В силу изоморфности рассматриваемых в работе пространств относительно преобразования Фурье задачи (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) эквивалентны. В дальнейшем будет изучаться задача (1.4), (1.5).

Если выполнено условие (P) и $\widehat{g}_0$, $\widehat{g}_1$ — локально интегрируемые функции, то решением задачи (1.4), (1.5) при каждом $\sigma \notin N_2 = \{\sigma \in R^n : P_2(\sigma) = 0\}$ является функция

$$v(\sigma, t) = \eta(t)(a_1(\sigma, t)g_0 + a_2(\sigma, t)g_1), \quad (1.6)$$

где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, — решения уравнения (1.4), удовлетворяющие начальным условиям

$$a_1(\sigma, 0) = 1, \quad \frac{da_1}{dt}(\sigma, 0) = 0, \quad a_2(\sigma, 0) = 0, \quad \frac{da_2}{dt}(\sigma, 0) = 1. \quad (1.7)$$

Задача состоит в описании множества начальных данных, для которых задача (1.4), (1.5) имеет сильное обобщенное решение. Решение этой задачи может быть основано на описании подпространств пространства медленно растущих обобщенных функций, в которых функции $a_1(\sigma, t)$ и $a_2(\sigma, t)$ являются мультипликаторами, гладко зависящими от параметра t, т. е. умножение на эти функции элементов этого подпространства является непрерывным отображением этого подпространства в себя, гладко зависящим от t.

Анализ работ, посвященных разрешимости задачи Коши для уравнений, не разрешенных относительно выделенной переменной, в классах функций степенного роста, в частности, работы [7], в которой приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в указанных классах функций для простейшего уравнения соболевского типа

$$\left(\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2\right)^k \partial_t^2 u + (-1)^k u = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

показывает, что элементы искомого подпространства в окрестности множества N_2 могут иметь вид $P_2^k(\sigma)f$, где показатель k зависит от порядка регулярности обобщенной функции f.

В [8] этот подход реализован для уравнений вида $P_1(D_x)\partial_t u - P_0(D_x)u = 0$. Приведенное построение решения задачи Коши основано на описании мультипликаторов для подпространств обобщенных функций медленного роста. Этот аналитический аппарат используется и в настоящей работе. Он приведен без доказательства в п. 2.

В работе [9] этот подход был применен для построения решения задачи Коши в классах обобщенных функций медленного роста для уравнения

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_0(D_x)u = 0.$$

В настоящей работе полученные в [9] результаты обобщены на случай уравнения (1.1).

Главное содержание работы составляет построение решения задачи (1.4), (1.5) для начальных данных указанного вида с использованием конструкции (1.6). Это построение основано на исследовании дифференциальных свойств функций $a_j(\sigma,t)$ и $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)a_j(\sigma,t)$, $j=1,2$, где $\Delta(\sigma) = P_1^2(\sigma) - 4P_0(\sigma)P_2(\sigma)$.

Функции $a_j(\sigma,t)$, $j = 1,2$, бесконечно дифференцируемы вне множества $N = N_2 \cup N_1$, где $N_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : \Delta(\sigma) = 0\}$, и их производные могут иметь степенные особенности в точках $\sigma \in N$ при выполнении условия (P). Эти особенности можно «погасить», умножив функции $a_j(\sigma,t)$ на функцию, имеющую нули на множестве N достаточной кратности, например, на $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)$. При соответствующем выборе p и q можно обеспечить дифференциальные свойства функции $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)a_j(\sigma,t)$, необходимые для того, чтобы на них можно было умножать обобщенные функции заданного порядка регулярности. Это позволит строить решения задачи (1.4), (1.5) по формуле (1.6) для начальных данных, которые в окрестности множества N имеют указанную структуру. Преобразование Фурье по пространственным переменным дает решение задачи Коши (1.1), (1.2) для начальных данных вида $\Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f$.

2. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Ниже приведены краткие сведения о тех функциональных пространствах, которые будут использованы для реализации указанной цели. Пространство медленно растущих обобщенных функций S' является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством $S(\mathbb{R}^n)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(x)\|_{l,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big[(1+|x|)^l \sum_{|\alpha|\le k} |D_x^\alpha \varphi(x)|\Big], \quad l,k = 0,1,2,\dots.$$

Рассмотрим семейство подпространств S', зависящих от параметров s и l:

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1+|\sigma|^2)^s |\mathscr{F}_x((1+|x|^2)^{l/2} f)|^2 d\sigma\right]^{1/2} < +\infty \right\}, \quad (2.1)$$

где $\mathscr{F}_x g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [10]. Это двупараметрическое семейство гильбертовых пространств обладает, например, следующими замечательными свойствами:

1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s};

2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье $\mathscr{F}_x$;

3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s.

Из свойства 3 следует, что для любой обобщенной функции $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ существуют такие числа s и l, что $g \in H_l^s$.

Пространство H_l^s можно рассматривать как пополнение пространства $S(\mathbb{R}^n)$ по указанной норме. Следовательно, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_l^s.

Так как результаты будут сначала формулироваться для задачи (1.4), (1.5), полученной из исходной с помощью преобразования Фурье, для удобства изложения будем формулировать утверждения, обозначая рассматриваемые пространства символом H_s^l.

При целых неотрицательных l пространство H_0^l совпадает с пространством Соболева W_2^l, в частности, $H_0^0 = L_2$.

Через $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+, \gamma$, $p \in \mathbb{R}$, обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(t)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_s^l с конечной нормой

$$|||v(t)|||_{C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \equiv \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+,\, 0 \leq \nu \leq r} \left[(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} \left\| \frac{d^\nu v(t)}{dt^\nu} \right\|_s^l \right].$$

Пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ банахово. Преобразование Фурье по пространственным переменным отображает изоморфно пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства S' в себя, т. е. функция $a(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S' тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma)| \leq c_\alpha (1 + |\sigma|)^{q_\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

где $c_\alpha > 0$, q_α — некоторые числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка α [10].

Теорема 2.1. *Умножение на функцию $a(\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (2.2), является непрерывным отображением из пространства H_s^l, $s, l \in \mathbb{R}$, в пространство $H_{s-q(l)}^l$, где*

$$q(l) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l)} q_\alpha, \quad \nu(l) = \begin{cases} |l|, & \text{если } l \in \mathbb{Z}, \\ [|l|] + 1, & \text{если } l \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma) g\|_{s-q(l)}^l \leq C(\max_{|\alpha| \leq \nu(l)} c_\alpha) \|g\|_s^l, \tag{2.3}$$

где $C > 0$ — некоторое число, зависящее от l, s и не зависящее от функции $a(\sigma)$.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [8]. В нем использовались производные функции $a(\sigma)$ и их оценки до порядка $\nu(l)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1$'$. *Умножение на функцию, удовлетворяющую неравенствам* (2.2) *при* $|\alpha| \le \nu(l)$, *является непрерывным отображением* $H_{s_1}^{l_1}$, $l_1, s_1 \in \mathbb{R}$, *в пространство* $H_{s_2}^{l_2}$, $l_2, s_2 \in \mathbb{R}$, *в следующих случаях:*

1) $l \ge |l_1|$, $l_2 \le l_1$, $s_2 = s_1 - q(l_1)$;

2) $0 \le l \le l_1$, $l_2 = l$, $s_2 = s_1 - q(l)$.

Рассмотрим семейство функций $a(\sigma, t)$, непрерывно дифференцируемых по переменной σ до порядка $\nu(l)$, гладко зависящих от параметра $t \ge 0$ и при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| \le \nu(l)$ и $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \le r+1$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\partial^\alpha \partial_t^j a(\sigma, t)\right| \le c_{\alpha j}(1+t)^{p_{\alpha j}} e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{q_{\alpha j}}, \quad t \ge 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где $c_{\alpha j} > 0$, $p_{\alpha j}$, $q_{\alpha j}$ — некоторые числа, зависящие от производных функции $a(\sigma, t)$ соответствующих порядков. Функции

$$p(l, r) = \max_{|\alpha| \le \nu(l),\, 0 \le j \le r} p_{\alpha j}, \quad q(l, r) = \max_{|\alpha| \le \nu(l),\, 0 \le j \le r+1} q_{\alpha j}$$

являются неубывающими функциями параметров l и r.

Теорема 2.2. *Умножение на функцию* $a(\sigma, t)$, *удовлетворяющую неравенствам* (2.4), *является непрерывным отображением пространства* H_s^l *в пространство* $C_{\gamma p(l,r)}^r\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)}^l\big)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, s, $l \in \mathbb{R}$, *и для любой обобщенной функции* $g \in H_s^l$ *справедливо неравенство*

$$|||a(\sigma, t) g|||_{C_{\gamma p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)}^l)} \le C \|g\|_s^l, \tag{2.5}$$

где $C > 0$ — *некоторое число, не зависящее от* g.

Доказательство теоремы 2.2 содержится в [8].

3. Построение решения задачи Коши

Для реализации указанного во введении подхода к построению решения задачи (1.4), (1.5) рассмотрим дифференциальные свойства решений $a_1(\sigma, t)$ и $a_2(\sigma, t)$ уравнения (1.4), удовлетворяющие начальным условиям (1.7).

Множество $N = N_1 \cup N_2$ является множеством нулей дискриминанта λ — многочлена $P(\sigma, \lambda)$, $m_i = \deg P_i(\sigma)$, $m = \deg_\sigma P(\sigma, \lambda) = \max\limits_i m_i$.

Так как при $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$ корни характеристического уравнения $P_2(\sigma)\lambda^2 + P_1(\sigma)\lambda + P_0(\sigma) = 0$ существуют и гладко зависят от параметра σ, то функции $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы в $(\mathbb{R}^n \backslash N) \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теорема 3.1. *Если выполнено условие* (P), *то для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *и* $r \in \mathbb{Z}$, $t \ge 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$ *справедливы неравенства*

$$\left|\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)\right| \le C_{\alpha r}(1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{\mu(\alpha, r)} |\Delta(\sigma)|^{d(\alpha, r)} |P_2(\sigma)|^{b(\alpha, r)}, \tag{3.1}$$

где $C_{\alpha r} > 0$ — *некоторые числа,* $\mu(\alpha, r) = |\alpha|(4m + 3m_2 - 1) + mr + 3m$, $d(\alpha, r) = -|\alpha| - \frac{1}{2}$, $b(\alpha, r) = -2|\alpha| - r - 1$.

Доказательство. Из условия (P) и описания решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$\left|\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)\right| \le C_{\alpha r}(\sigma)(1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t}, \quad t \ge 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N, \tag{3.2}$$

где $C_{\alpha r}(\sigma) > 0$ — некоторые функции от параметра σ.

Из неравенств (3.2) следует существование преобразования Лапласа функций $\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, которые являются голоморфными функциями в полуплоскости Π_γ. Обозначим через $Q_j(\sigma, \lambda)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, преобразование Лапласа функции $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2 : Q_j(\sigma, \lambda) = La_j(\sigma, t)$.

Из свойств преобразования Лапласа и определения функций $a_j(\sigma, t)$ следуют равенства

$$Q_1(\sigma, \lambda) = \frac{P_2(\sigma)\lambda + P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)}, \quad Q_2(\sigma, \lambda) = \frac{P_2(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N, \ \lambda \in \Pi_\gamma.$$

Из теоремы обращения преобразования Лапласа [11, гл. III, п. 20], примененной к решениям линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, следуют равенства

$$a_j(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j} + (2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} e^{\lambda t} d\tau, \tag{3.3}$$

где $t > 0$, $\xi > \gamma$, $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $j = 1, 2$.

Для нахождения производных функций $a_j(\sigma, t)$ по σ докажем, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо равенство

$$\partial^\alpha \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N, \ \operatorname{Re} \lambda > \gamma, \ k = 1, 2, \tag{3.4}$$

где $R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ не выше $m_k + |\alpha|(m-1)$.

Если $|\alpha| = 1$, то равенство (3.4) справедливо:

$$\partial_j \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{\partial_j P_k(\sigma) P(\sigma, \lambda) - P_k(\sigma) \partial_j P(\sigma, \lambda)}{P^2(\sigma, \lambda)}.$$

Предположим, что равенство (3.4) справедливо для всех $\beta \in \mathbb{Z}_n^+$, $|\beta| \leq l$, и $\alpha' = \alpha + \gamma_j$, $|\gamma_j| = 1$, $|\alpha| = l$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha'} \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) &= \partial_j \left(\frac{R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} \right) \\
&= \frac{\partial_j R_{k\alpha}(\sigma, \lambda) P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda) - (|\alpha|+1) P^{|\alpha|}(\sigma, \lambda) \partial_j P(\sigma, \lambda) R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} \\
&= \frac{\partial_j R_{k\alpha}(\sigma, \lambda) P(\sigma, \lambda) - (|\alpha|+1) \partial_j P(\sigma, \lambda) R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} = \frac{R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha'|+1}(\sigma, \lambda)},
\end{aligned}$$

где $R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda)$ — многочлен, $\deg_\sigma R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda) \leq m_k + |\alpha|(m-1) - 1 + m = m_k + |\alpha'|(m-1)$, $\deg_\lambda R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda) \leq 2|\alpha| + 2 = 2|\alpha'|$. Следовательно, равенство (3.4) справедливо.

Рассмотрим для произвольных $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$ функции

$$h_{j\alpha}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \partial^\alpha \left(\frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j} + (2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) e^{\lambda t} \, d\tau,$$

где $\xi > \gamma$, $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $j = 1, 2$.

Воспользовавшись равенством (3.4), их можно представить в таком виде:

$$h_{j\alpha}(\sigma,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma)\frac{P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}$$
$$\times (R_{2\alpha}(\sigma,\lambda)\lambda^{2-j} + (2-j)R_{1\alpha}(\sigma,\lambda))e^{\lambda t}\,d\tau. \quad (3.5)$$

Если $\sigma \in \mathbb{R}^n\backslash N$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$ и $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$ корни уравнения $P(\sigma,\lambda) = 0$, то справедливы неравенства

$$|\lambda - \lambda_j(\sigma)| \geq |\operatorname{Re}\lambda - \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)| = |\operatorname{Re}\lambda - \gamma + \gamma - \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)| \geq \operatorname{Re}\lambda - \gamma,\ j = 1,2,$$

так как по условию (P) $\gamma - \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \geq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda - \gamma > 0$. Следовательно,

$$\frac{|P_2(\sigma)|}{|P(\sigma,\lambda)|} \equiv \frac{1}{|\lambda-\lambda_1(\sigma)||\lambda-\lambda_2(\sigma)|} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda-\gamma)^2}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \gamma,\ \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N. \quad (3.6)$$

Из неравенства (3.6) следует ограниченность по переменной $\sigma \in \mathbb{R}^n\backslash N$ функции $P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)P^{-|\alpha|-1}(\sigma,\lambda)$ при $\lambda \in \Pi_\gamma$.

Так как $\deg_\lambda P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda) = 2|\alpha|+2$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n\backslash N$, подынтегральная функция в (3.5) является правильной рациональной дробью. Применение теоремы обращения преобразования Лапласа к таким дробям (см [11, гл. III, п. 2.1]) обеспечивает существование функций $h_{j\alpha}(\sigma,t)$. Дифференцируя равенство (3.3) по переменной σ, учитывая существование функций $h_{j\alpha}(\sigma,t)$ и неравенство (3.6), получим равенства

$$\partial^\alpha a_j(\sigma,t) = h_{j\alpha}(\sigma,t), \quad t\geq 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N. \quad (3.7)$$

Чтобы оценить функции $\partial^\alpha a_j(\sigma,t)$, представим равенство (3.5) в виде

$$h_{j\alpha}(\sigma,t) = \frac{1}{2\pi i}P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma)\left[\sum_{d=0}^{2|\alpha|}A_{\alpha d}(\sigma)\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\frac{\lambda^{d+2-j}e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}\,d\tau\right.$$
$$\left. + \sum_{d=0}^{2|\alpha|}(2-j)D_{\alpha d}(\sigma)\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\frac{\lambda^{d}e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}\,d\tau\right], \quad (3.8)$$

где $A_{\alpha d}(\sigma)$, $D_{\alpha d}(\sigma)$ — коэффициенты λ многочленов $R_{2\alpha}(\sigma,\lambda)$ и $R_{1\alpha}(\sigma,\lambda)$ соответственно, $\deg A_{\alpha d}(\sigma) \leq m_2 + |\alpha|(m-1)$, $\deg D_{\alpha d}(\sigma) \leq m_1 + |\alpha|(m-1)$.

Подынтегральные дроби в (3.8) можно разложить на простейшие дроби для $\sigma \in \mathbb{R}^n\backslash N$:

$$\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} = \frac{r_{\alpha j}(\sigma,\lambda)}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}} + \frac{s_{\alpha j}(\sigma,\lambda)}{(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}, \quad (3.9)$$

где $r_{\alpha j}(\sigma,\lambda)$, $s_{\alpha j}(\sigma,\lambda)$ — многочлены по переменной λ степени не выше $|\alpha|$.

Пользуясь разложением (3.9) и свойствами обратного преобразования Лапласа рациональных дробей (см. [11, гл. III, п. 21]), имеем равенство

$$\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} = Lf_{\alpha j d}(\sigma,t), \quad (3.10)$$

где

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha jd}(\sigma,t) &= \sum_{s=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\frac{1}{(|\alpha|+1-k)!}B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)t^{|\alpha|+1-k}\right\}e^{\lambda_s(\sigma)t},\\
B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) &= \frac{1}{(k-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_s(\sigma)}\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\left(\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda-\lambda_{3-s}(\sigma))^{|\alpha|+1}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Используя равенства (3.7)–(3.11), получим экспоненциальное представление функций $\partial^\alpha a_j(\sigma,t)$:

$$
\begin{aligned}
\partial^\alpha a_j(\sigma,t) &= \sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\frac{1}{(|\alpha|+1-k)!}P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma)\\
&\times\left(A_{\alpha d}(\sigma)\left((2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma)+(j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)\right)+(2-j)D_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)\right)\\
&\times t^{|\alpha|+1-k}e^{\lambda_s(\sigma)t},\quad t\geq 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Дифференцируя это равенство по t и используя формулу Лейбница, получим

$$
\begin{aligned}
\partial_t^r\partial^\alpha a_j(\sigma,t) &= \sum_{j=0}^{2|\alpha|}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\frac{1}{(|\alpha|+1-k)!}P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma)\\
&\times\left(A_{\alpha d}(\sigma)\left((2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma)+(j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)\right)+(2-j)D_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma)\right)\\
&\times\sum_{\rho=0}^{r}b_{\rho r}\frac{d^{r-\rho}t^{|\alpha|+1-k}}{dt^{r-\rho}}(\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Чтобы оценить правую часть равенства (3.12), найдем выражение для функций $B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)$, используя равенство (3.11) и формулу Лейбница:

$$
\begin{aligned}
B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) &= \frac{1}{(k-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_s(\sigma)}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1}b'_{\nu k}\frac{\theta(\lambda^{d+2-j-k+1+\nu})}{(\lambda-\lambda_{3-s}(\sigma))^{\alpha+1+\nu}}\right)\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{\nu=0}^{k-1}b'_{\nu k}\frac{\theta[(\lambda_s(\sigma))^{d+\nu+3-j-k}]}{(\lambda_s(\sigma)-\lambda_{3-s}(\sigma))^{|\alpha|+1+\nu}},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

где $b'_{\nu k}$ — некоторые числа, $\theta(\lambda^p)=\begin{cases}\lambda^p, & \text{если } p\geq 0,\\ 0, & \text{если } p<0.\end{cases}$

Используя в (3.14) равенства

$$
\lambda_s(\sigma)=\frac{-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma)}{2P_2(\sigma)},\quad (\lambda_s(\sigma)-\lambda_{3-s}(\sigma))=(-1)^sP_2^{-1}(\sigma)\Delta^{\frac12}(\sigma),
$$

получим новые выражения для функций $B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)$:

$$
\begin{aligned}
B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{\nu=0}^{k-1}C_{\nu ks}\theta\left[\left(\frac{P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma)}{2P_2(\sigma)}\right)^{d+\nu+3-j-k}\right]\\
&\times(P_2(\sigma))^{|\alpha|+1+\nu}(\Delta(\sigma))^{-\frac12(|\alpha|+1+\nu)}\\
&= \sum_{\nu=0}^{k-1}C'_{\nu ks}\theta[(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^{\gamma(d,\nu,j,k)}](P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)}(\Delta(\sigma))^{-\frac12(|\alpha|+1+\nu)},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где $C_{\nu ks}$, $C'_{\nu ks}$ — некоторые числа,

$$\gamma(d,\nu,j,k) = d+\nu+3-j-k, \quad \text{если } d+\nu+3-j-k \geq 0,$$

$$\varphi(\alpha,d,\nu,j,k) = |\alpha|+j+k-d-2, \quad \text{если } d+\nu+3-j-k \geq 0.$$

Подставив выражение $B^{ks}_{\alpha jd}(\sigma)$ из (3.15) в равенство (3.12), получим выражение для функции $\partial^\alpha a_j(\sigma,t)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $t \geq 0$, удобное для оценивания:

$$\begin{aligned}\partial^\alpha a_j(\sigma,t) &= (P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1}(\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\sum_{s=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{k-1} C_{\alpha k\nu sj}(P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)+|\alpha|}(\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha|-\nu)}\theta[(-P_1(\sigma) \\ &+ (-1)^s\Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(d,\nu,1,k)}][(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)) \\ &+ D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma)) + (j-1)A_{\alpha d}(\sigma)]t^{|\alpha|+1-k}e^{\lambda_s(\sigma)t}. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Так как $0 \leq d \leq 2|\alpha|$, $1 \leq k \leq |\alpha|+1$, $0 \leq \nu \leq k-1$, справедливы неравенства

$$\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)+|\alpha| \geq |\alpha|+1+1-2|\alpha|-2+|\alpha| = 0, \text{ если } d+\nu+3-j-k \geq 0,$$

$$|\alpha|-\nu = (|\alpha|+1-k)+(k-1-\nu) \geq 0.$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$|(P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)+|\alpha|}| \leq C_1(1+|\sigma|)^{\psi(\alpha,j)m_2},$$

где $\psi(\alpha,j) \leq |\alpha|+j+|\alpha|+1-2+|\alpha| = 3|\alpha|+j-1$;

$$|(\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha|-\nu)}| \leq C_2(1+|\sigma|)^{\frac{1}{2}|\alpha|\deg\Delta(\sigma)} \leq C_2(1+|\sigma|)^{|\alpha|m},$$

так как $\deg\Delta(\sigma) \leq 2m$;

$$|(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(d,\nu,j,k)}| \leq C_3(1+|\sigma|)^{\varkappa(\alpha,j)m},$$

где $\varkappa(\alpha,j) \leq (d+\nu+3-j-k)\max\{m_1, \frac{1}{2}\deg\Delta(\sigma)\} \leq (2|\alpha|+2-j)m$.

Оценим функцию $\partial^\alpha a_j(\sigma,t)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $t \geq 0$, пользуясь равенством (3.16) и приведенными выше неравенствами:

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha a_j(\sigma,t)| &\leq C_{j\alpha}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}|P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1}|\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}(1+|\sigma|)^{(3|\alpha|+j-1)m_2+|\alpha|m+(2|\alpha|+2-j)m} \\ &\times [|A_{\alpha d}(\sigma)|(1+|\sigma|)^m| + |D_{\alpha d}(\sigma)|(1+|\sigma|)^{m_2} + |A_{\alpha d}(\sigma)|]. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Так как $A_{\alpha d}(\sigma)$ и $D_{\alpha d}(\sigma)$ — многочлены и справедливы неравенства

$$\deg A_{\alpha d}(\sigma) \leq m_2+|\alpha|(m-1), \quad \deg D_{\alpha d}(\sigma) \leq m_1+|\alpha|(m-1),$$

из неравенства (3.17) при $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N$ следует неравенство

$$|\partial^\alpha a_j(\sigma,t)| \leq C'_{j\alpha}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}|P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1}|\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac{1}{2}}(1+|\sigma|)^{\mu(\alpha)}, \qquad (3.18)$$

где $\mu(\alpha) \leq (3|\alpha|+j-1)m_2+|\alpha|m+(2|\alpha|+2-j)m+|\alpha|(m-1)+\max\{m_2+m, m_1+m_2\} \leq |\alpha|(4m+3m_2-1)+3m$. Следовательно, при $r=0$ неравенство (3.1) справедливо.

Из равенств (3.13) получим выражение для функции $\partial_t^r\partial^\alpha a_j(\sigma,t)$, аналогичное (3.16):

$$\partial_t^r\partial^\alpha a_j(\sigma,t)=(P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1}(\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac12}\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\sum_{s=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}C_{\alpha k\nu s}$$
$$\times(P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)+|\alpha|}(\Delta(\sigma))^{\frac12(|\alpha|-\nu)}\theta[-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^{\gamma(d,\nu,j,k)}]$$
$$\times[(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))+D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma))+(j-1)A_{\alpha d}(\sigma)]$$
$$\times\sum_{\rho=0}^{r}c_{r\rho}\frac{d^{r-\rho}t^{|\alpha|+1-k}}{dt^{r-\rho}}(\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}.$$

Подставив в полученное равенство выражения для $\lambda_s(\sigma)$, используемые ранее, получим

$$\partial_t^r\partial^\alpha a_j(\sigma,t)=(P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1-r}(\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac12}\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\sum_{s=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\rho=0}^{r}C'_{\alpha k\nu\rho}$$
$$\times(P_2(\sigma))^{\varphi'(\alpha,d,\nu,j,k,\rho)}(\Delta(\sigma))^{\frac12(|\alpha|-\nu)}\theta((-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^{\gamma(\alpha,d,\nu,j,k)})$$
$$\times(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^\rho[(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))$$
$$+D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma))+(j-1)A_{\alpha d}(\sigma)]\theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho})e^{\lambda_s(\sigma)t},\qquad(3.19)$$

где $\varphi'(\alpha,d,\nu,j,k,\rho)=\varphi(\alpha,d,\nu,j,k)+|\alpha|+r-\rho$.

Используя оценки, которые применялись при получении неравенства (3.18), получим неравенство

$$\left|\partial_t^r\partial^\alpha\alpha_j(\sigma,t)\right|\le C_{j\alpha r}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}|P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1-r}|\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac12}(1+|\sigma|)^{\mu(\alpha,r)},\quad(3.20)$$

где $\mu(\alpha,r)=|\alpha|(4m+3m_2-1)+3m+rm$. При этом использовалось то, что показатели степеней в слагаемых неотрицательны по построению.

Теорема 3.1 доказана.

Неравенства (3.20) свидетельствуют о том, что производные функций $a_j(\sigma,t)$, $j=1,2$, могут иметь особенности на множестве, где обращается в нуль хотя бы один из многочленов $P_2(\sigma)$ и $\Delta(\sigma)$. Для устранения указанных особенностей рассмотрим функции

$$a_{jpq}(\sigma,t)=\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)a_j(\sigma,t),\quad t\ge0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N,\ j=1,2,\ p,q\in\mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.2. *Если выполнено условие* (P), *то для любых* $l\in\mathbb{Z}_+$ *и* $k\in\mathbb{Z}_+$ *существуют числа* $p(l)$ *и* $q(l,k)$ *такие, что функции* $a_{jpq}(\sigma,t)$, $j=1,2$, $p\ge p(l)$ *и* $q\ge q(l,k)$ *и их производные по* σ *до порядка* l *и по* t *до порядка* k *можно продолжить по непрерывности на* $\mathbb{R}^n$ *и полученные функции* $\partial_t^r\partial^\alpha\widetilde{a}_{jpq}(\sigma,t)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\partial_t^r\partial^\alpha\widetilde{a}_{jpq}(\sigma,t)\right|\le c_{\alpha r}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{\mu(p,q,\alpha,r)},\quad t\ge0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,\qquad(3.21)$$

где $c_{\alpha r}>0$ *— некоторые числа,* $\mu(p,q,\alpha,r)=(2p+q)m+(6m-1)|\alpha|+r(m-m_2)+m$.

Доказательство. Функции $a_{jpq}(\sigma,t)$ являются решениями уравнения (1.4) при $\sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N$, удовлетворяющими начальным условиям

$$a_{1pq}(\sigma,0)=\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma),\quad\partial_ta_{1pq}(\sigma,0)=0,$$

$$a_{2pq}(\sigma,0)=0,\quad \partial_t a_{2pq}(\sigma,0)=\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma).$$

Используя равенство (3.3), получим интегральные представления этих функций:

$$a_{jpq}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)\frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j}+(2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}e^{\lambda t}d\tau, \tag{3.22}$$

где $t>0$, $\xi>\gamma$, $\tau=\operatorname{Im}\lambda$, $\sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N$, $j=1,2$.

Для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha|\le p$, $|\alpha|\le q$, справедливо равенство

$$\partial^\alpha\left(\frac{\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)=\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}Q_\alpha(\sigma,\lambda),\quad \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N,\quad \operatorname{Re}\lambda>\gamma, \tag{3.23}$$

где $Q_\alpha(\sigma,\lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\alpha|(m_2+m_3+m-1)$, $m_3=\deg\Delta(\sigma)$, $m_3=\max\{2m_1,m_0+m_2\}\le 2m$.

Доказательство равенства (3.23) аналогично доказательству равенства (3.4).

Если $|\alpha|=1$, то равенство (3.23) справедливо:

$$\begin{aligned}\partial_i\left(\frac{\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)&=\frac{\partial_i(\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma))P(\sigma,\lambda)-\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)\partial_iP(\sigma,\lambda)}{P^2(\sigma,\lambda)}\\&=\frac{\Delta^{p-1}(\sigma)P_2^{q-1}(\sigma)}{P^2(\sigma,\lambda)}(p\partial_i\Delta(\sigma)P_2(\sigma)P(\sigma,\lambda)+q\Delta(\sigma)\partial_iP_2(\sigma)P(\sigma,\lambda)\\&\qquad-\Delta(\sigma)P_2(\sigma)\partial_iP(\sigma,\lambda)).\end{aligned}$$

Предположим, что равенство (3.23) справедливо для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha|\le k$, и $\alpha'=\alpha+\gamma_i$, $|\gamma_i|=1$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha'}\left(\frac{\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)&=\partial_i\left(\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}Q_\alpha(\sigma,\lambda)\right)\\&=\frac{\partial_i\big(\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)Q_\alpha(\sigma,\lambda)\big)P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma,\lambda)}\\&-\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)Q_\alpha(\sigma,\lambda)\partial_iP^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma,\lambda)}=\frac{\Delta^{p-|\alpha'|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha'|}(\sigma)}{P^{|\alpha'|+1}(\sigma,\lambda)}Q_{\alpha'}(\sigma,\lambda),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}Q_{\alpha'}(\sigma,\lambda)&=[(p-|\alpha|)\partial_i\Delta(\sigma)P_2(\sigma)Q_\alpha(\sigma,\lambda)+(q-|\alpha|)\Delta(\sigma)\partial_iP_2(\sigma)Q_\alpha(\sigma,\lambda)\\&\quad+\Delta(\sigma)P_2(\sigma)\partial_iQ_\alpha(\sigma,\lambda)]P(\sigma,\lambda)-(|\alpha|+1)\Delta(\sigma)P_2(\sigma)Q_\alpha(\sigma,\lambda)\partial_iP(\sigma,\lambda)\end{aligned}$$

— многочлен, степень которого по переменной λ не превосходит $2|\alpha|+2=2|\alpha'|$, а по переменной σ — $|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+m_2+m_3+m-1=|\alpha'|(m_2+m_3+m-1)$.

Равенство (3.23) доказано.

Из равенства (3.23) следует необходимое для дальнейшего изложения равенство

$$\partial^\alpha\left(\frac{\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)P_1(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)=\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}Q'_\alpha(\sigma,\lambda), \tag{3.24}$$

где $Q'_\alpha(\sigma,\lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+m_1$.

Для доказательства равенства (3.24) воспользуемся формулой Лейбница

$$\partial^{\alpha}\left(\frac{\Delta^{p}(\sigma)P_2^{q}(\sigma)P_1(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)=\sum_{\beta\le\alpha}C_\beta^\alpha\partial^\beta\left(\frac{\Delta^{p}(\sigma)P_2^{q}(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)\partial^{\alpha-\beta}P_1(\sigma)$$
$$=\sum_{\beta\le\alpha}C_\beta^\alpha\frac{\Delta^{p-|\beta|}(\sigma)P_2^{q-|\beta|}(\sigma)}{P^{|\beta|+1}(\sigma,\lambda)}\partial^{\alpha-\beta}P_1(\sigma)Q_\beta(\sigma,\lambda)=\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}$$
$$\times\sum_{\beta\le\alpha}C_\beta^\alpha P^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma,\lambda)\Delta^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma)P_2^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma)\partial^{\alpha-\beta}P_1(\sigma)Q_\beta(\sigma,\lambda)$$
$$=\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}Q'_\alpha(\sigma,\lambda),$$

где $Q'_\alpha(\sigma,\lambda)$ — многочлен, удовлетворяющий указанному условию, так как степень каждого слагаемого по переменной λ не выше $2(|\alpha|-|\beta|)+2|\beta|=2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\beta|(m_2+m_3+m-1)+(|\alpha|-|\beta|)(m+m_3+m_2)+m_1-|\alpha|+|\beta|=|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+m_1$.

Рассмотрим функции

$$h_{j\alpha pq}(\sigma,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\partial^\alpha\left(\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)\frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j}+(2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma,\lambda)}\right)e^{\lambda t}\,d\tau,$$

$$t>0,\quad \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N,\quad \xi>\gamma,\quad \tau=\operatorname{Im}\lambda,\quad j=1,2.$$

Воспользовавшись равенствами (3.23) и (3.24), их можно представить в таком виде:

$$h_{j\alpha pq}(\sigma,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma)\frac{P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma,\lambda)}$$
$$\times\big(P_2(\sigma)\lambda^{2-j}Q_\alpha(\sigma,\lambda)+(2-j)Q'_\alpha(\sigma,\lambda)\big)e^{\lambda t}\,d\tau. \quad (3.25)$$

Функции $h_{j\alpha pq}(\sigma,t)$ являются обобщением функций $h_{j\alpha}(\sigma,t)$ в (3.5) и для них справедливы аналогичные (3.7) и (3.8) равенства:

$$\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)=h_{j\alpha pq}(\sigma,t),\quad t\ge 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N, \quad (3.26)$$

$$h_{j\alpha pq}(\sigma,t)=\frac{1}{2\pi i}\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma)$$
$$\times\left[\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\frac{\lambda^{d+2-j}e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}\,d\tau\right.$$
$$\left.+\sum_{d=0}^{2|\alpha|}(2-j)\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\frac{\lambda^{d}e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}(\lambda-\lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}\,d\tau\right], \quad (3.27)$$

где $\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)$, $\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)$ — многочлены, $\deg\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)\le|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+m_2$, $\deg\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)\le|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+m_1$.

Преобразовав подынтегральные выражения в (3.27) с помощью равенства (3.9) и воспользовавшись равенствами (3.10), (3.11), (3.26), получим экспоненциальное представление функций $\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)$:

$$\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)=\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\frac{1}{(|\alpha|+1-k)!}\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma)$$
$$\times\big[\big(\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(2-j)B^{ks}_{\alpha 1d}(\sigma)+(j-1)B^{ks}_{\alpha 2d}(\sigma)\big)+(2-j)\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)B^{ks}_{\alpha 2d}(\sigma)\big]t^{|\alpha|+1-k}e^{\lambda_s(\sigma)t},$$
$$t\ge 0,\quad \sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N. \quad (3.28)$$

Дифференцируя это равенство по t и пользуясь формулой Лейбница, получим

$$\partial_t^r\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)=\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\frac{1}{(|\alpha|+1-k)!}\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma)P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma)$$
$$\times\big[\big(\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(2-j)B^{ks}_{\alpha 1d}(\sigma)+(j-1)B^{ks}_{\alpha 2d}(\sigma)\big)+(2-j)\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)B^{ks}_{\alpha 2d}\big]$$
$$\times\sum_{\rho=0}^{r}c'_{r\rho}\theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho})(\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}.$$

Воспользовавшись равенствами (3.15), получим выражение для функций $\partial_t^r\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)$, $j=1,2$, $\sigma\in\mathbb{R}^n\backslash N$, аналогичное равенству (3.19):

$$\partial_t^r\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma,t)=\Delta^{p-2|\alpha|-\frac12}(\sigma)P_2^{q-2|\alpha|-1-r}(\sigma)\sum_{d=0}^{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|+1}\sum_{s=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\rho=0}^{r}C''_{\alpha k\nu s\rho}$$
$$\times(P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha,d,\nu,j,k,\rho)}\Delta(\sigma)^{\frac12(|\alpha|-\nu)}\theta((-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^{\gamma(\alpha,d,\nu,j,k)}$$
$$\times((-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))^\rho$$
$$\times[(2-j)(\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma)+(-1)^s\Delta^{\frac12}(\sigma))+\widetilde{D}_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma))+(j-1)\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)]$$
$$\times\theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho})e^{\lambda s(\sigma)t}. \quad (3.29)$$

Если выполняются неравенства

$$p\ge p(l)=2l+1,\quad q\ge q(l,r)=2l+r+2,$$

то из равенства (3.28) следует, что функции $a_{jpq}(\sigma,t)$ могут быть продолжены на множество N по непрерывности и полученные функции $\widetilde{a}_{jpq}(\sigma,t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка l по переменной σ, до порядка r по t и их производные имеют вид (3.29).

Используя оценки для многочленов $\Delta(\sigma)$, $P_2(\sigma)$, $\widetilde{A}_{\alpha d}(\sigma)$, $\widetilde{D}_{\alpha d}$ и учитывая, что показатели степеней слагаемых в равенстве (3.29) неотрицательны, получим неравенство

$$\big|\partial_t^r\partial^\alpha\widetilde{a}_{jpq}(\sigma,t)\big|\le c''_{\alpha jr}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{\mu(p,q,\alpha,r)},\quad t\ge 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,$$

где $\mu(p,q,\alpha,r)\le(p-2|\alpha|-\frac12)m_3+(q-2|\alpha|-1-r)m_2+(4|\alpha|+j-1+r-\rho)m_2+\frac12(|\alpha|-\nu)m_3+(2|\alpha|+2-j)m+\rho m+|\alpha|(m_2+m_3+m-1)+2m=pm_3+qm_2+|\alpha|(3m_2-2m_2-m_3+\frac12m_3+2m+m_2+m_3+m-1)-\frac12m_3-(1+r)m_2+(j-1+r-\rho)m_2-\frac12\nu m_3+(2-j)m+\rho m+2m\le(2p+q)m+(6m-1)|\alpha|+r(m-m_2)+m.$

Теорема доказана.

Из теорем 3.2 и 2.2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.3. *Если выполнено условие* (P) *и* $g_i = \Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f_i$, $f_i \in H_l^s$, $l < 0$, $p \geq 2\nu(l)+1$, $q \geq 2\nu(l)+r+2$, $r \geq 2$, *то существует сильное обобщенное решение* $u(t)$ *задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащее пространству* $C^r_{\gamma\nu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})$, *где* $s' = s - \mu(p, q, \nu(l), r)$, *и справедливо неравенство*

$$|||u(t)|||_{C^r_{\gamma\nu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})} \leq C\big(\|f_1\|_l^s + \|f_2\|_l^s\big). \tag{3.30}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство обобщенных функций

$$\upsilon(t) = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t)\widehat{f}_{j-1}, \quad t \geq 0,$$

где $\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t)$ — продолжение функций $a_{jpq}(\sigma, t) = a_j(\sigma, t)\Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma)$.

Из условия теоремы и теорем 3.2 и 2.2 следует, что это семейство принадлежит пространству $C^r_{\gamma\nu(l)}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s'}\big)$, где $s' = s - \mu(p, q, \nu(l), r)$.

Из определения функций $a_{jpq}(\sigma, t)$ и свойств их продолжений $\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t)$ следует справедливость равенств

$$P_2(\sigma)\partial_t^2\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_1(\sigma)\partial_t\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_0(\sigma)\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t) = 0,$$
$$t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2.$$

Тогда для произвольной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем равенства

$$\big(P_2(\sigma)\partial_t^2\upsilon(t) + P_1(\sigma)\partial_t\upsilon(t) + P_0(\sigma)\upsilon(t), \varphi\big)$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\big(\widehat{f}_{j-1}, \big(P_2(\sigma)\partial_t^2\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_1(\sigma)\partial_t\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_0(\sigma)\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, t)\big)\varphi(\sigma)\big) = 0.$$

Следовательно, семейство обобщенных функций $\upsilon(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Из теоремы 2.2 следует справедливость неравенства

$$|||\upsilon(t)|||_{C^r_{\gamma\nu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s'})} \leq c\big(\|\widehat{f}_1\|_s^l + \|\widehat{f}_2\|_s^l\big). \tag{3.31}$$

Семейство обобщенных функций $\upsilon(t)$ удовлетворяет начальным условиям (1.5):

$$\upsilon(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{a}_{jpq}(\sigma, 0)\widehat{f}_{j-1} = \widetilde{a}_{1pq}(\sigma, 0)\widehat{f}_0 = \Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma)\widehat{f}_0 = \widehat{g}_0,$$

$$\partial_t\upsilon(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{2} \partial_t\widetilde{a}_{jpq}(\sigma, 0)\widehat{f}_{j-1} = \partial_t\widetilde{a}_{2pq}(\sigma, 0)\widehat{f}_1 = \Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma)\widehat{f}_1 = \widehat{g}_1.$$

Следовательно, $\upsilon(t)$ является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.4), (1.5), а его преобразование Фурье по пространственным переменным $u(t)$ принадлежит пространству $C^r_{\gamma\nu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})$ и является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2). Неравенство (3.30) следует из неравенства (3.31).

Теорема доказана.

Рассмотренный подход к построению сильных обобщенных решений задачи Коши применим для уравнений с постоянными коэффициентами соболевского типа высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. *Свешников А. Г., Алешин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. А.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. *Костюченко А. Г., Эскин Г. И.* Задачи Коши для уравнений типа Соболева — Гальперна // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 273–284.
5. *Эскин Г. И.* О единственности решения задачи Коши для уравнений не типа Ковалевской // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 285–295.
6. *Павлов А. Л.* Задача Коши для уравнения типа Соболева — Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 11. С. 3–20.
7. *Павлов А. Л.* Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. тр. 2018. Т. 21, № 1. С. 125–154.
8. *Павлов А. Л.* Существование решения задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 824–844.
9. *Павлов А. Л.* Разрешимость задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 5. С. 1119–1136.
10. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
11. *Фукс Б. А., Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Поступила в редакцию 5 января 2025 г.
После доработки 5 января 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Павлов Александр Леонидович (ORCID 0000-0003-0532-7486)
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001, ДНР;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР
alex4909@gmail.com