

УДК 517.956.8:517.956:539.3(3)

ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЗАЖАТОЙ ПО КРАЮ ПЛАСТИНЫ С ПРИКРЕПЛЕННЫМИ СТЕРЖНЯМИ. 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

С. А. Назаров

Аннотация. В низкочастотном диапазоне спектра строится асимптотика частот и мод собственных колебаний изотропного и однородного упругого сочленения тонких цилиндрических вертикальных стержней и горизонтальной пластины. Поверхность сочленения свободна от внешних воздействий всюду, кроме жестко заземленной кромки пластины. Выявлены несколько типов колебаний, сопровождающихся изгибными деформациями пластины и/или стержней. Обоснование асимптотических формул проводится при помощи асимптотически точного анизотропного и весового неравенства Корна, классической леммы о «почти собственных» числах и утверждения о сходимости нормированных собственных чисел.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.411

Ключевые слова: изотропное и однородное упругое сочленение пластины и стержней, пограничные слои, асимптотика собственных чисел и вектор-функций.

1. Постановки задач. Обозначим через ω_0 и ω_j области на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$, ограниченные простыми замкнутыми гладкими (класса C^∞) контурами $\partial\omega_0$ и $\partial\omega_j$, $j = 1, \dots, J$, зафиксируем попарно различные точки $P^1, \dots, P^J$ внутри ω_0 и введем тонкие изотропные и однородные (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$) пластину и стержни:

$$\Omega_0^h = \{x = (x_1, x_2, x_3) : y := (x_1, x_2) \in \omega_0, z := x_3 \in (0, h)\}, \quad (1)$$

$$\Omega_j^h = \{x : \eta^j := h^{-1}y^j \in \omega_j, z \in (-\ell_j, 0]\}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2)$$

В отличие от статьи¹⁾ [1], продолжением которой служит данная работа, все тела (1) и (2) цилиндрические (см. разд. 9). Масштабированием характерный размер сечения ω_0 сделаем единичным, а декартовы системы координат $x \in \mathbb{R}^3$ и геометрические параметры $h \in (0, h_0]$ и $\ell_1, \dots, \ell_J > 0$ безразмерными. Кроме того, точки P^j и системы декартовых координат $y^j = (y_1^j, y_2^j) \in \mathbb{R}^2$ с центрами в них зафиксируем так, чтобы выполнялись удобные равенства

$$\int_{\omega_j} y_1^j dy^j = \int_{\omega_j} y_2^j dy^j = 0, \quad I_{12}(\omega_j) := \int_{\omega_j} y_1^j y_2^j dy^j = 0. \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

¹⁾Ссылки на нужные, но не играющие особо важной роли формулы из нее обозначаем (XX)_[1].

Собственные колебания с частотой $\varsigma_h > 0$ упругого сочленения $\Pi^h = \Omega_0^h \cup \Omega_1^h \cup \dots \cup \Omega_j^h$ описываются системой Ламе трех дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Pi^h. \quad (4)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, а $\Lambda^h = \rho \varsigma_h^2$ — спектральный параметр. Вектор смещений $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)^\top$ интерпретируем как столбец, где $u_q^h = e_{(q)}^\top u^h$ — проекции вектора на ось x_q с ортом $e_{(q)}$ и $\top$ — знак транспонирования. Обозначив через $\delta_{p,q}$ символ Кронекера, укажем классические формулы для компонент тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{pq}(u^h) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p^h}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^h}{\partial x_p} \right), \quad \sigma_{pq}(u^h) = 2\mu \varepsilon_{pq}(u^h) + \lambda \delta_{p,q} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u^h), \quad p, q = 1, 2, 3.$$

Поверхность $\partial \Pi^h$ тела Π^h свободна от внешних воздействий всюду, кроме кромки пластины $\Gamma_0^h = \partial \omega_0 \times (0, h)$, которая зафиксирована, т. е. выполнены краевые условия

$$u^h(x) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \Gamma_0^h, \quad (5)$$

$$\sigma_q^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial \Pi^h \setminus (\overline{\Gamma_0^h} \cup v^h), \quad q = 1, 2, 3. \quad (6)$$

При этом $\sigma_q^{(n)}(u^h) = n_1 \sigma_{1q}(u^h) + n_2 \sigma_{2q}(u^h) + n_3 \sigma_{3q}(u^h)$ и $n = (n_1, n_2, n_3)^\top$ — единичный вектор внешней нормали, т. е. $\sigma^{(n)}(u^h) = (\sigma_1^{(n)}(u^h), \sigma_2^{(n)}(u^h), \sigma_3^{(n)}(u^h))^\top$ — вектор нормальных напряжений. Наконец, v^h — объединение ребер $v_{j0}^h = \partial \omega_j^h \times \{0\}$ и $v_{j\ell}^h = \partial \omega_j^h \times \{-\ell_j\}$ цилиндров (2).

Вариационной формулировкой задачи (4)–(6) служит интегральное тождество [2–4]

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall \psi^h \in H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3, \quad (7)$$

в котором $(\cdot, \cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)^m$ при любом m , $H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ — пространство Соболева вектор-функций, удовлетворяющих условию Дирихле (5), а верхний индекс 3, указывающий количество компонент у вектор-функций, отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм. Наконец, $E(u^h, u^h; \Pi^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная телом Π^h , а соответствующая билинейная форма задана равенством

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \sum_{p,q=1}^3 (\sigma_{pq}(u^h), \varepsilon_{pq}(\psi^h))_{\Pi^h} =: \langle u^h, \psi^h \rangle_h. \quad (8)$$

Собственные числа задачи (7) образуют положительную неограниченную последовательность

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_k^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

составленную при учете их кратностей, а собственные вектор-функции, гладкие всюду, кроме ребер v_{j0}^h , $v_{j\ell}^h$ и $\partial \omega_0^h \times \{0\}$, $\partial \omega_0^h \times \{h\}$, подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(i)}^h, u_{(k)}^h)_{\Pi^h} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10)$$

Основная цель работы — построить асимптотику собственных пар $\{\Lambda_k^h; u_{(k)}^h\} \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ задачи (7) или (4)–(6), в частности, выявить взаимодействие

элементов сочленения. В разд. 2 приведены основные формулы в моделях пониженных размерностей, двумерной для пластины и одномерных для стержней. В разд. 3 сообщаются сведения о пограничных слоях около зон присоединения стержней к пластине, которые (слои) описываются решениями задачи теории упругости для неограниченного тела $\Xi^j = \Xi_0 \cup \Xi_-^j$, образованного слоем $\Xi_0 = \{\xi^j : \eta^j \in \mathbb{R}^2, |\zeta| < 1/2\}$ и полубесконечным цилиндром $\Xi_-^j = \{\xi^j : \eta^j \in \omega_j, \zeta \leq -1/2\}$ (далее — полуцилиндром),

$$L(\nabla_{\xi^j})v(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \Xi^j, \quad B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})v(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \partial\Xi^j \setminus v_j. \quad (11)$$

При этом $\xi^j = (\eta^j, \zeta) = (h^{-1}y^j, h^{-1}(z - h/2))$ — растянутые координаты, $v_j = \partial\omega_j \times \{-1/2\}$ — ребро, а $L(\nabla_{\xi^j})$ и $B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})$ — (3×3) -матрицы операторов из левых частей равенств (4) и (6).

В разных вариантах формальная асимптотика строится в разд. 4–6, а ее обоснование проводится в два этапа: сначала в разд. 7 выводится предварительный — слабый — асимптотический результат о сходимости нормированных собственных чисел $h^{-2}\Lambda_k^h$ при $h \rightarrow +0$, но затем в разд. 8 при помощи анизотропного и весового неравенства Корна [5; 1, разд. 8] и классической леммы 1 о «почти собственных» числах и векторах получены финальные асимптотические разложения и оценки остатков. Если первый этап прост, так как сводится к повторению выкладок из [6, гл. 4 и 5], то второй из-за разнородности асимптотических анзацев на Ω_0^h и Ω_j^h , а также многообразия пограничных слоев становится технически очень сложным и трудоемким. По счастью, часть вычислений уже была проделана в книге [6] и других публикациях, так что в обработке нуждаются только невязки, порожденные пограничными слоями около зон присоединения стержней к пластине.

Наконец, в разд. 9 обсуждаются доступные обобщения и открытые вопросы.

2. Модели пластины и стержней. Теория Кирхгофа — Лява деформации тонкой пластины включает спектральную задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$A_0 \Delta_y^2 w_3^0(y) = M^0 w_3^0(y), \quad y \in \omega_0, \quad w_3^0(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_3^0(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0, \quad (12)$$

дающую осредненный по толщине прогиб w_3^0 , а для вектора осредненных продольных смещений $w^\# = (w_1^0, w_2^0)^\top$ — задачу Дирихле для плоской системы Ламе без спектрального параметра

$$\begin{aligned} -\mu \Delta_y w^\#(y) - (\mu + \lambda_0) \nabla_y \nabla_y w^\#(y) &= f^\#(y), \quad y \in \omega_0, \\ w^\#(y) &= g'(y), \quad y \in \partial\omega_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее $\partial_{n^p} = n^p(y)^\top \nabla_y$, $n^p = (n_1^p, n_2^p)^\top$ — внешняя нормаль на границе области ω_p , а приведенная цилиндрическая жесткость $A_0 > 0$ пластины, измененная постоянная Ламе λ_0 и коэффициент Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$ заданы формулами (10)_[1]. Спектр $\wp^0$ задачи (12) — похожая на (9) последовательность собственных чисел

$$0 < M_1^0 \leq M_2^0 \leq M_3^0 \leq \dots \leq M_k^0 \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

а собственные функции $w_{(k)3}^0 \in C^\infty(\overline{\omega_0})$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(w_{(i)3}^0, w_{(k)3}^0)_{\omega_0} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Согласно модели Кирхофа — Клебша осредненные поперечные и продольное смещения w_1^1 , w_2^1 и w_3^1 в стержне Ω_j^h , а также его закручивание w_4^1 отыскиваются из системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающейся в силу ограничений (3):

$$A_m^j \partial_z^4 w_m^j(z) = M^{jm} |\omega_j| w_m^j(z), \quad z \in \Upsilon_j := (-\ell_j, 0), \quad m = 1, 2, \quad (16)$$

$$-A_m^j \partial_z^2 w_m^j(z) = f_m^j(z), \quad z \in \Upsilon_j, \quad m = 3, 4. \quad (17)$$

Коэффициенты $A_m^j > 0$ заданы формулами (26)_[1], а краевые условия выглядят так:

$$w_m^j(0) = 0, \quad \partial_z w_m^j(0) = 0 \quad \text{и} \quad A_m^j \partial_z^2 w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad A_m^j \partial_z^3 w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad m = 1, 2, \quad (18)$$

$$w_m^j(-\ell_j) = 0 \quad \text{и} \quad A_m^j \partial_z w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad m = 3, 4. \quad (19)$$

Спектры $\wp_m^j$ задач (16), (18), $j = 1, \dots, J$, $m = 1, 2$, образуют аналогичные (14) и (9) положительные монотонные неограниченные последовательности собственных чисел

$$0 < M_1^{jm} < M_2^{jm} < M_3^{jm} < \dots < M_k^{jm} < \dots \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

а соответствующие собственные функции $w_{(k)m}^j \in C^\infty[-\ell_j, 0]$ можно подчинить соотношениям

$$|\omega_j| (w_{(i)m}^j, w_{(k)m}^j)_{\Upsilon_j} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Асимптотические анзацы для собственных пар задачи (4)–(6), сопровождающие процедуру понижения размерностей для тонких пластин и стержней (см. монографии [7, 8, 6, 9]; более объемистые, но все-таки неполные списки приведены в статье [1]) используют растянутую поперечную координату $\zeta = h^{-1}(z - h/2)$ на горизонтальной пластине Ω_0^h

$$\Lambda_{N_k^0}^h = h^2 M_k^0 + h^3 M_k^{0r} + \dots, \quad (22)$$

$$u_{p_k^0}^h(x) = \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) (e_{(3)} w_{(k)3}^0(y) + h w_{(k)}^{0r}(y)) + \dots, \quad x \in \Omega_0^h, \quad (23)$$

и растянутые поперечные координаты $\eta^j = h^{-1}y^j$ на вертикальных стержнях Ω_j^h , $j = 1, \dots, J$,

$$\Lambda_{N_k^{jm}}^h = h^2 M_k^{jm} + h^3 M_k^{jmr} + \dots, \quad m = 1, 2, \quad (24)$$

$$u_{p_k^{jm}}^h(x) = \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (\mathbf{e}_{(m)} w_{(k)m}^j(z) + h w_{(k)}^{jmr}(z)) + \dots, \quad x \in \Omega_j^h, \quad (25)$$

при этом многоточие замещает младшие асимптотические члены, $\mathbf{e}_{(m)} = (\delta_{1,m}, \dots, \delta_{4,m})^\top$ — орт в $\mathbb{R}^4$, главные члены в разложениях (23) и (25) — скалярные собственные функции, а поправочные — векторы. Матричные дифференциальные операторы $\mathbf{W}_{(0)}^h$ и $\mathbf{W}_{(j)}^h$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) w^0(y) &= \frac{e_{(3)}}{h^{1/2}} w_3^0(y) + h^{1/2} \sum_{m=1}^2 e_{(m)} \left(w_m^0(y) - \zeta \frac{\partial w_3^0}{\partial y_m}(y) \right) \\ &\quad - e_{(3)} \frac{\lambda h^{3/2}}{\lambda + 2\mu} \left(\zeta \sum_{m=1}^2 \frac{\partial w_m^0}{\partial y_m}(y) - \left(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24} \right) \Delta_y w_3^0(y) \right) \\ &\quad + h^{5/2} \mathcal{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_y) w^0(y) + h^{7/2} \mathcal{W}_{(0)}^2(\zeta, \nabla_y) w^0(y) \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z)w^j(z) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^2 e_{(m)}^j w_m^j(z) \\
&+ \left(d^6(\eta^j)w_4^j(z) + e_{(3)} \left(w_3^j(z) - \sum_{m=1}^2 \eta_m^j \frac{\partial w_m^j(z)}{\partial z} \right) \right) \\
&+ h \mathcal{X}_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z)w^j(z) + h^2 \mathcal{X}'_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z) \partial_z w^j(z) \\
&+ h^3 \mathcal{X}''_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z) \partial_z^2 w^j(z). \quad (27)
\end{aligned}$$

Отличающиеся от принятых в [1] множители $h^{-1/2}$ и h^{-1} при главных членах выбраны в согласии с условием нормировки (10). Начальные члены представлены в явном виде, а остальные можно найти в [6, гл. 4 и 5], статье [6] или в любой другой публикации по технической или математической теориям тонких упругих тел. Кроме того, операторы $\mathcal{W}_{(0)}^i$, $i = 1, 2$, дифференцируют компоненты w_3^0 и w_1^0 , w_2^0 соответственно $2+i$ и $1+i$ раз, $\mathcal{D}(\partial_{z_j})$ — диагональная матрица $\text{diag} \{ \partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z \}$, а $\mathcal{X}_{(j)}^{\dots}$ — матрицы-функции размером 3×4 . Наконец, d^6 — последний столбец матрицы жестких смещений, трех поступательных и трех вращательных,

$$d(x) = (d'(x), d^6(x)) = (d^\dagger(x), d^\Xi(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Отсутствие спектрального параметра в уравнениях (13) и (17) объясняется именно строением анзацев (23) и (25): первые тройки членов в выражениях (26) и (27) находятся безусловно, а четвертые — только при выполнении однородных уравнений (13) и (17), так как согласно представлениям (22) и (24) собственных чисел итерационные процессы не помещают величины M_k^0 и M_k^{jm} в задачи для $\mathcal{W}^1 w^0$ и $\mathcal{X} \mathcal{D} w^j$, но только в задачи для слагаемых $\mathcal{W}^2 w^0$ и $\mathcal{X}' \mathcal{D} \partial_z w^j$. Определение последних требует, чтобы функции w_3^0 и w_1^j , w_2^j удовлетворяли уравнению (12) в частных производных и обыкновенным дифференциальным уравнениям (16) четвертого порядка. Условия существования последних членов сумм (26) и (27) пояснены в статье [1].

Далее востребованы фундаментальное решение Φ_3 оператора $A_0 \Delta_y^2$ и фундаментальная матрица $\Phi^\#$ двумерной системы уравнений теории упругости с постоянными Ламе λ_0 и μ

$$\Phi_3(y^j) = (8\pi A_0)^{-1} r_j^2 \ln(1/r_j) \text{ и } \Phi^\#(y^j) = (\Phi^{\#1}(y^j), \Phi^{\#2}(y^j)) = \Phi^0 \ln r_j + \Phi^1(\varphi_j). \quad (29)$$

Здесь $(r_j, \varphi_j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_1^1$ — система полярных координат, а симметричные (2×2) -матрицы, неособенная числовая Φ^0 и гладкая Φ^1 на единичной окружности $\mathbb{S}_1^1$ (см., например, [10]), по существу не понадобятся — последнее касается и коэффициента в первой формуле (29).

3. Пограничный слой около зон присоединения стержней к пластине. Растяжение координат $x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta) = (h^{-1}y^j, h^{-1}(z - h/2))$ и формальный переход к $h = 0$ уведут часть границы сочленения Π^h на бесконечность и превращают его в объединение Ξ^j горизонтального единичного слоя Ξ_0 и вертикального полуцилиндра Ξ_-^j с сечением ω_j и осью $(-\infty, 0] \ni \zeta$, а систему

уравнений (4) и краевые условия (6) — в задачу (11). При этом спектральный параметр исчезает, в частности, благодаря малому множителю h^2 в анзацах (22) и (24). Разрешимость этой задачи и асимптотика ее решений на бесконечности, обеспеченные результатами [11] и [12] соответственно, подробно описаны в [1, разд. 5]. Далее для реализации процедуры сращивания [13, 4] понадобятся только несколько специальных решений $\mathcal{V}_{(j)}^1, \dots, \mathcal{V}_{(j)}^6$ однородной задачи (11), а именно, помимо очевидных — жестких смещений тела Ξ^j , т. е. столбцов матрицы (28), поля смещений, порожденные продольной в цилиндре и поперечной в слое силами, изгибающими моментами в цилиндре и слое, а также парами перерезающих в цилиндре и продольных в слое сил. В указанном порядке названные решения заданы следующими пятью парами вектор-функций на прямой $\mathbb{R}$ и на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^1(z) &= \frac{z}{A_3^j} \mathbf{e}_{(3)} \text{ и } \mathbf{Y}^1(y) = -\Phi(y) e_{(3)}, \\ \mathbf{Z}^{1+i}(z) &= \frac{1}{A_i^j} \frac{z^3}{6} \mathbf{e}_{(i)} \text{ и } \mathbf{Y}^{1+i}(y) = \Phi(y) e_{(i)}, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{Z}^{3+i}(z) &= -\frac{1}{A_i^j} \frac{z^2}{2} \mathbf{e}_{(i)} \text{ и } \mathbf{Y}^{3+i}(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y) e_{(3)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Зафиксируем радиус R_j так, чтобы $\overline{\omega_j} \subset \mathbb{B}_{R_j}^2 = \{\eta^j : \rho_j := |\eta^j| < R_j\}$, составим блочно-диагональную матрицу $\Phi = \text{diag}\{\Phi^\#, \Phi_3\}$ из фундаментальных решений (29) и придадим упомянутым вектор-функциям $\mathcal{V}_{(j)}^q$, построенным в работе [1], следующий вид:

$$\mathcal{V}_{(j)}^q(\xi^j) = \mathbf{W}_{(j)}^1(\eta^j, \partial_\zeta)(\chi(-\zeta) \mathbf{Z}^q(\zeta)) + \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi_j(R_j^{-1} \rho^j) \mathbf{Y}^q(\eta^j)) + \widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j). \quad (31)$$

Отличие от их представлений, полученных в [1], состоит в том, что срезающие функции, порожденные эталонной срезкой $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой верны равенства $\chi(z) = 1$ при $z > 2$ и $\chi(z) = 0$ при $z < 1$, занесены под операторы $\mathbf{W}_{(0)}^1$ и $\mathbf{W}_{(j)}^1$, заданные формулами (15) и (19) при $h = 1$. Такое изменение привносит возмущения, сосредоточенные на компактном множестве, а значит, сохраняется указанное в [1] поведение на бесконечности «энергетической» составляющей

$$\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j) = \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi_j(R_j^{-1} \rho^j) \mathbf{T}_{(j)}^q(\nabla_{\eta^j}) \Phi_3(\eta^j) e_{(3)}) + \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{t}_{(j)}^q + \widetilde{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j), \quad (32)$$

исчезающей с экспоненциальной скоростью при $\zeta \rightarrow -\infty$ вместе со своими производными. При этом $\mathbf{t}_{(j)}^q \in \mathbb{R}^6$ — столбец и $\mathbf{T}_{(j)}^q(\nabla_{\eta^j})$ — однородный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, а остаток $\widetilde{\mathcal{V}}_{(j)}^q$ удовлетворяет в слое Ξ_0 обеспеченными оценками (52)_[1] и строением оператора $\mathbf{W}_{(0)}^1(\cdot, \nabla_{\eta^j})$ неравенствам

$$\rho_j |\widehat{\mathcal{V}}_{(j)p}^q(\xi^j)| + \rho_j^2 |\varepsilon_{pq}(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q; \xi^j)| \leq c_j^q \text{ при } \rho_j \geq R_j, |\zeta| \leq 1/2 \text{ и } p, q = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Далее потребуется еще один набор решений однородной задачи (11)

$$\mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}; \xi^j) = \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi(R_j^{-1} \rho_j) \mathcal{P}_3(\eta^j) e_{(3)}) + \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{b}_{(j)}^{\mathcal{P}} + \widehat{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathcal{P}; \xi^j), \quad (34)$$

порожденных квадратным трехчленом $\mathcal{P}_3(y)$. При этом $\mathbf{b}_{(j)}^{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^6$ — столбец, а остаток $\widehat{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathcal{P})$ обладает теми же свойствами, что и остаток $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q$ в представлении (31).

Необходимые сведения об экспоненциальных пограничных слоях около кромки Γ_0^h пластины и свободных торцов $\Gamma_j^h = \omega_j^h \times \{-\ell_j\}$ стержней будут сообщены по мере необходимости.

4. Колебания сочленения, инициированные пластиной. В анзацы (14) и (15) подставим собственную пару $\{M_k^0; w_{(k)3}^0\}$ задачи (12). Пусть пока число M_k^0 не является собственным ни одной из задач (16), (18) (см. разд. 6). При учете формулы Тейлора

$$w_{3k}^0(y) = d_{(3)}^\dagger(y^j, 0) d_{(3)}^\dagger(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_{(k)3}^0(P^j) + O(r_j^2), \quad r_j := |y^j| \rightarrow +0,$$

где $d_{(3)}^\dagger(x)$ — нижняя строка левого (3×3) -блока $d^\dagger(x)$ матрицы (28), продолжим поле $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)} w_{(k)3}^0(y)$ на стержень в главном как умноженное на $h^{-1/2}$ жесткое смещение

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}^j(\eta^j, z) &:= d_{(3)}^\dagger(y^j, z) d_{(3)}^\dagger(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_{(k)3}^0(P^j) \\ &= w_{(k)3}^0(P^j) e_{(3)} + \sum_{i=1,2} \frac{\partial w_{(k)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) (y_i^j e_{(3)} - z e_{(i)}^j), \end{aligned} \quad (35)$$

т. е. вертикальный сдвиг и повороты вокруг осей y_1^j и y_2^j . Поле (35) удовлетворяет краевому условию (6) на $\partial\Omega_j^h \setminus \overline{\omega_j^h(0)}$, но из-за инерционного члена (правой части системы Ламе) оставляет такую невязку в дифференциальных уравнениях (4) на самом стержне Ω_j^h :

$$\begin{aligned} (h^2 M_k^0 + O(h^3)) h^{-1/2} \mathfrak{w}^j(\eta^j, z) \\ = h^{3/2} M_k^0 e_{(3)} w_{(k)3}^0(P^j) - h^{3/2} M_k^0 \sum_{i=1}^2 e_{(i)}^j z \frac{\partial w_{(k)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) + O(h^{5/2}). \end{aligned} \quad (36)$$

В соответствии со стандартным алгоритмом (см. [6, гл. 5, § 1] и, например, [7, гл. 16]) главный член невязки (36) компенсируется выражением

$$h^{3/2} \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (e_{(3)} w_{(k)3}^{j'}(z) + h^{-1} e_{(1)} w_{(k)1}^{j''}(z) + h^{-1} e_{(2)} w_{(k)2}^{j''}(z)) + \dots \quad (37)$$

Для функции $w_{(k)3}^{j''}$ выполнено уравнение (17) с правой частью

$$f_{(k)3}^j(z_j) = M_k^0 w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j|$$

и краевыми условиями (19) для индекса $m = 3$, а значит,

$$\begin{aligned} w_{(k)3}^{j'}(z) &= -M_k^0 (2A_3^j)^{-1} z(z + 2\ell_j) w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j| \\ &\Rightarrow A_3^j \partial_z w_{(k)3}^j(0) = F_{(k)3}^j := -M_k^0 \ell_j w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j|. \end{aligned} \quad (38)$$

Кроме того, функции $w_{(k)i}^{j'}$ при $i = 1, 2$ суть решения уравнений

$$A_i^j \partial_z^4 w_{(k)i}^{j''}(z) - M_k^0 |\omega_j| w_{(k)i}^{j''}(z) = -M_k^0 |\omega_j| z \partial_{y_i^j} w_{(k)3}^0(P^j), \quad z \in \Upsilon_j,$$

с краевыми условиями (18). Благодаря предположению $M_k^0 \notin \wp_i^j$ такая задача имеет единственное решение и для него верна такая формула Тейлора, служащая определением величин F_{ik}^{jq} :

$$\begin{aligned} w_{(k)i}^{j''}(z) &= \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 w_{(k)i}^{j''}}{\partial z^2}(0) + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3 w_{(k)i}^{j''}}{\partial z^3}(0) + O(|z|^6) \\ &=: h^2 \frac{\zeta^2}{2} F_{(k)i}^{j2} + h^3 \frac{\zeta^3}{6} F_{(k)i}^{j3} + O(h^6 |\zeta|^6). \end{aligned} \quad (39)$$

Следуя методу срачиваемых разложений (см. [13, 14; 7, гл. 2] и др.), формируем главные члены внутреннего, т. е. приемлемого вблизи множества $\overline{\omega_j^h(0)} = \partial\Omega_0^h \cap \overline{\partial\Omega_j^h}$, разложения из жесткого смещения $h^{-1/2}\mathbf{w}^j(\eta^j, z)$ и линейной комбинации указанных в разд. 3 решений задачи (11)

$$h^{5/2}F_{(k)3}^j A_3^j \mathcal{V}_{(j)}^1(\xi^j) - h^{3/2} \sum_{i=1}^2 (F_{(k)i}^{j2} A_i^j \mathcal{V}_{(j)}^{3+i}(\xi^j) - h F_{(k)i}^{j3} A_i^j \mathcal{V}_{(j)}^{1+i}(\xi^j)). \quad (40)$$

В силу формул (30) и (31) сумма (40) в цилиндре Ξ_-^j отличается от вектор-функции (37), переписанной в растянутых координатах, экспоненциально малыми слагаемыми и жестким смещением $d(\xi^j)b_{(k)}^{jh}$, которое, имея столбец коэффициентов $b_{(k)}^{jh} = O(h^{3/2})$, значительно меньше, чем аналогичный столбец у жесткого смещения $h^{-1/2}\mathbf{w}^j(\eta^j, z)$ (см. формулу (35)), подлежит учету лишь при построении младших членов асимптотики.

Разложения (35), уточненные вторыми участниками пар (30) и определением (27), показывают, что в слое Ξ_0 и, следовательно, в пластине Ω_0^h выражение (40) представимо в виде

$$\begin{aligned} & -h^{1/2}e_{(3)} \frac{F_{(k)3}^j A_3^j}{8\pi A_0} r_j^2 \ln \frac{h}{r_j} - h^{1/2} \sum_{i=1}^2 \left(e_{(3)} \frac{F_{(k)i}^{j2} A_i^j}{8\pi A_0} \frac{\partial}{\partial y_i^j} \left(r_j^2 \ln \frac{h}{r_j} \right) \right. \\ & \quad \left. - h^2 e_{(i)} A_i^j F_{(k)i}^{j3} \Phi^{\#i} \left(\frac{y^j}{h} \right) \right) + \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Забудем на время о слагаемых с множителем $\ln h$ и о последних членах суммы в (41). Процедура срачивания оставшейся части выражения (41) с внешним разложением (23) на пластине назначает следующее поведение третьей компоненты w_{3k}^{0r} поправочного члена:

$$w_{(k)3}^{0r}(y) = w_{(k)3}^{0r}(P^j) - F_{(k)3}^j A_3^j \Phi_3(y^j) - \sum_{i=1}^2 F_{(k)i}^{j2} A_i^j \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_i^j}(y^j) + O(r_j), \quad r_j \rightarrow +0. \quad (42)$$

Согласно итерационному процессу построения асимптотики решений задач в тонких областях (см., например, [7, гл. 16]) сама функция $w_{(k)3}^{0r}$ удовлетворяет уравнению в проколотой области

$$A_0 \Delta_y^2 w_{(k)3}^{0r}(y) - M_k^0 w_{(k)3}^{0r}(y) = M_k^{0r} w_{(k)3}^0(y), \quad y \in \omega_0^\bullet := \omega_0 \setminus \{P^1, \dots, P^J\}. \quad (43)$$

Кроме того, исследование [15] пограничного слоя вблизи кромки пластины Γ_0^h (см. комментарии в [1, разд. 4] и далее в разд. 8) приводит к краевым условиям

$$w_{(k)3}^{0r}(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_{(k)3}^{0r}(y) = \mathbf{K}(\nu) \Delta_y w_{(k)3}^0(y), \quad y \in \partial\omega_0, \quad (44)$$

где $\mathbf{K}(\nu) \geq 0$ — найденный в [15] множитель, зависящий от коэффициента Пуассона ν . Итак, полностью образована задача (43), (44), (42) для поправок M_k^{0r} и $w_{(k)3}^{0r}$ в анзацах (22) и (23).

Вернемся к анализу оставленных без внимания слагаемых из (41). Вторые члены суммы по $i = 1, 2$ учитываются при определении вектора $(w_{(k)1}^{0r}, w_{(k)2}^{0r})^\top$ продольных смещений, который находится из однозначно разрешимой плоской задачи теории упругости в проколотой области $\omega_0^\bullet$ с краевыми на границе $\partial\omega_0$

и асимптотическими в точках $P^1, \dots, P^J$ условиями, но никак не сказывается на главных членах асимптотики собственных чисел (9).

Наконец, часть слагаемых, приобретших множитель $\ln h$, в силу связей $\Phi_3(\eta^j) = h^{-2}(\Phi_3(y^j) - (8\pi A_0)^{-1} r_j^2 \ln h)$ и $\Phi^\#(\eta^j) = \Phi^\#(y^j) - \Phi^0 \ln h$ компенсируются вычитанием из суммы (40) решений (34) задачи (11)

$$-h^{3/2} \ln h \left(h \frac{F_{(k)3}^j A_3^j}{8\pi A_0} \mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}_3 e_{(3)}; \xi^j) + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{F_{(k)}^{j2}}{4\pi} \frac{A_i^j}{A_0} \mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}_i e_{(3)}; \xi^j) - h F_{(k)}^{j3} A_i^j \Phi^0 e_{(i)} \right) \right), \quad (45)$$

порожденных полиномами $\mathcal{P}_3(y) = y_1^2 + y_2^2$ и $\mathcal{P}_i(y) = y_i$. В результате члены с множителем $\ln h$ исчезают из разложения на пластине Ω_0^h , но в разложении на стержне Ω_j^h появляются «лишние» жесткие смещения $h^{3/2} \ln h d(\xi^j) b^0$, которые, как и в предыдущей ситуации, влияют только на младшие асимптотические члены.

Закончим построение асимптотики собственного числа (23) задачи (4)–(6). Пусть $\varkappa_k^0$ — кратность члена M_k^0 последовательности (14), т. е., положив $\aleph = 0$ в этом разделе, считаем, что

$$M_{k-1}^\aleph < M_k^\aleph = \dots = M_{k+\varkappa_k^\aleph-1}^\aleph < M_{k+\varkappa_k^\aleph}^\aleph. \quad (46)$$

В предшествующих формулах заменим функцию w_{3k}^0 линейными комбинациями

$$\mathbf{w}_3^{0p} = a_k^{0p} w_{(k)3}^0 + \dots + a_{k+\varkappa_k^0-1}^{0p} w_{(k+\varkappa_k^0-1)3}^0, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^0 - 1, \quad (47)$$

со столбцами коэффициентов $a^{0p} = (a_k^{0p}, \dots, a_{k+\varkappa_k^0-1}^{0p})^\top$, подчиненных соотношениям

$$(a^{\aleph q})^\top a^{\aleph l} = \delta_{l,q}, \quad l, q = k, \dots, k + \varkappa_k^\aleph - 1, \quad (48)$$

а в качестве поправок в анзаце (22) возьмем, вообще говоря, разные числа

$$M_k^{\aleph'} \leq \dots \leq M_{k+\varkappa_k^{\aleph'}-1}^{\aleph'}. \quad (49)$$

Соответственно через $\mathbf{F}_{(p)3}^j$ и $\mathbf{F}_{(p)i}^{j2}$ обозначим величины из формул (38) и (39) с заменой $w_{(k)3}^0 \mapsto \mathbf{w}_3^{0p}$.

При условии (46) у задач (43), (44), (42) для пар $\{\mathbf{w}_3^{0p}; M_p^{0'}\}$ есть $\varkappa_k^0$ условий разрешимости, которые удовлетворим посредством следующей выкладки: дифференциальное уравнение в области $\omega_0(R) = \{y \in \omega_0 : r_j > R, j = 1, \dots, J\}$ с малыми отверстиями умножим на собственные функции $w_{(q)3}^0$, $q = k, \dots, k + \varkappa_k^0 - 1$, проинтегрируем по частям при учете краевых и точечных условий и перейдем к пределу при $R \rightarrow +0$. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}^{\aleph k} a^{\aleph p} = M_p^{\aleph'} a^{\aleph p} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^\aleph} \quad (50)$$

с $(\varkappa_k^0 \times \varkappa_k^0)$ -матрицей $\mathcal{M}^{0k} = (\mathcal{M}_{pq}^{0k})_{p,q=k}^{\varkappa_k^0}$, элементы которой согласно соотношениям (15) вычисляются так:

$$M_p^{0'} a_q^{0p} = M_p^{0'} (\mathbf{w}_3^{0p}, w_{(q)3}^0)_{\omega_0} = \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\omega_0(R)} w_{(q)3}^0(y) (A_0 \Delta_y^2 \mathbf{w}_3^{0p}(y) - M_k^0 \mathbf{w}_3^{0p}(y)) dy$$

$$\begin{aligned}
&= A_0 \int_{\partial \omega_0} \partial_{n^0} w_3^{0p}(y) \Delta_y w_{(q)3}^0(y) ds_y \\
&+ A_0 \sum_{j=1}^J \int_{\partial \mathbb{B}_K^2(P^j)} (\partial_{r_j} w_{(q)3}^0(y) \Delta_y w_3^{0p}(y) - w_{(q)3}^0(y) \partial_{r_j} \Delta_y w_3^{0p}(y)) ds_y \\
&= A_0 K(\nu) \int_{\partial \omega_0} \Delta_y w_{(q)3}^0(y) \Delta_y w_3^{0p}(y) ds_y \\
&- \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w_{(q)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) \mathbf{F}_{(p)i}^{j2} + w_{(q)3}^0(P^j) \mathbf{F}_{(p)4}^j \right) =: \sum_{q=k}^{k+\varkappa_k^0-1} \mathcal{M}_{pq}^0 a_q^p. \quad (51)
\end{aligned}$$

В силу определений (38), (39) и (50) матрица $\mathcal{M}^0$ симметричная, а ее (вещественные) собственные числа (49) и соответствующие собственные векторы $a^{0k}, \dots, a^{0k+\varkappa_k^0-1} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^0}$ конкретизируют принятые анзацы для собственных пар исходной задачи (4)–(6).

5. Колебания сочленения, иницированные стержнями. Хотя собственные числа в последовательностях (20) простые, из-за множественности предельных задач (16), (18) считаем, что $M_k^{\equiv} - \varkappa_k^{\equiv}$ -кратный член упорядоченной последовательности $\wp^{\equiv} := \{M_k^{\equiv}\}_{k \in \mathbb{N}}$, объединяющей спектры (20), $j = 1, \dots, J$, $m = 1, 2$ (см. формулу (46) при $\aleph \equiv$). Понятно, что $\varkappa_k^{\equiv} \leq 2J$. Пусть еще число $M_k^{\equiv}$ не является собственным у предельной задачи (12) для пластины (см. разд. 6). В качестве внешних разложений собственных пар исходной задачи (4)–(6) возьмем выражения

$$h^{-1} \mathfrak{W}_{(j_p)}^{hq}(\eta^{j_p}, z) := \mathbf{W}_{(j_p)}^h(\eta^{j_p}, \partial_z) (a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}(z) e_{(m_p)}^j + h w_{(p)}^{j_p q'}(z)) + \dots, \quad (52)$$

$$p, q = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1.$$

Здесь $j_p \in \{1, \dots, J\}$ и $m_p \in \{1, 2\}$, причем $(j_p, m_p) \neq (j_l, m_l)$ при $p \neq l$, а индекс $i_{m_p}^j \in \mathbb{N}$ указывает номер собственного числа $M_{m_p i_p}^{j_p} = M_k^{\equiv}$ в последовательности (20) с $j = j_p$ и $m = m_p$. Кроме того, здесь и далее в статье считаем, что $a_{ls}^{\equiv q} = 0$, если $(s, l) \neq (j_p, m_p)$ для всех $p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1$, т. е. распространяем формулу (20) с поправочным членом $w_{(p)}^{j_p q'}$, вообще говоря, отличным от нуля, на все индексы $j = 1, \dots, J$. Столбцы $a^{\equiv q} \in \mathbb{R}^{2J}$, составленные из коэффициентов $a_{j_p m_p}^{\equiv q}$ и нулей, подчиним условиям ортогональности и нормировки (52). Наконец, $\aleph \equiv$ в данном разделе.

Собственные функции $w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}$ удовлетворяют соотношениям (10), и для них верна формула Тейлора (39) с коэффициентами $F_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p s} = \partial_z^s w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}(0)$, $s = 2, 3$. Поэтому, как и в разд. 4 (см. выражения (40) и (45)), внутренние разложения составим из решений однородной задачи в Ξ^j

$$\mathfrak{W}_{(j_p m_p)}^h(\xi^{j_p}) := -h a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p 2} (\gamma_{(j_p)}^{3+m_p}(\xi^{j_p}) - \ln h (4\pi A_0)^{-1} (\eta_{i_p}^j e_{(3)} - \zeta e_{(m_p)}^{j_p})). \quad (53)$$

Поворот вокруг оси $y_{3-i_p}^{j_p}$ добавлен для того, чтобы после замены $\xi^{j_p} \mapsto (y^{j_p}, \zeta)$ в пластине Ω_0^h уничтожить логарифм (аналогично разд. 4). Теперь, применив похожие на (40) и (45), но упрощенные конструкции вместе с представлениями

(31) и (34) в слое, получим, что член $h^{3/2}\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)w_3^{\equiv q}(y)$ внешнего разложения на пластине Ω_0^h является решением краевой задачи в проколотой области

$$A_0\Delta_y^2 w_3^{\equiv q}(y) = M_k^{\equiv} w_3^{\equiv q}(y), \quad y \in \omega_0^\bullet, \quad w_3^{\equiv q}(y) = 0, \quad \partial_{n_0} w_3^{\equiv q}(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0, \quad (54)$$

с такими асимптотическими условиями в точках P^j , $j = 1, \dots, J$:

$$w_3^{\equiv q}(y) = w_3^{\equiv q}(P^j) + \sum_{l=1}^2 y_l^j \frac{\partial w_3^{\equiv q}}{\partial y_l^j}(P^j) + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 y_m^j a_{jm}^{\equiv q} A_m^j \frac{d^2 w_{(i_{mp}^j)m}^j}{dz^2}(0) \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + O(r_j^2), \quad r_j \rightarrow +0. \quad (55)$$

Согласно соглашению в последней сумме присутствуют и нулевые коэффициенты $a_{jm}^{\equiv q}$. Еще одна группа слагаемых $h^2 a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p 3} \mathcal{V}_{(j_p)}^{i+m_p}(\xi_{j_p}^p)$ во внутреннем разложении проигнорирована потому, что они порождают сингулярности продольных смещений в пластине порядка h^2 и вызывают поперечные смещения верхних концов стержней того же порядка, т. е. влияют лишь на младшие асимптотические члены.

Поскольку по предположению $M_k^{\equiv} \notin \wp^0$, задача (54), (55) имеет единственное решение $w_3^{\equiv q}$, представимое как сумма функций $a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p 2} w_{3j_p}^{\equiv p}$, которым свойственна особенность $O(r_j |\ln r_j|)$ только в точке P^{j_p} . Подстановка этих функций в формулу Грина на «продырявленной» области $\omega_0(R)$ и предельный переход при $R \rightarrow +0$ (см. выкладку (51)) устанавливают симметричность $(\mathcal{K}_k^{\equiv} \times \mathcal{K}_k^{\equiv})$ -матрицы $\mathcal{S}^k = (\mathcal{S}_{pq}^k)_{p,q=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1}$, реализующей отображение

$$\left(\frac{d^2 w_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p}}{dz_{j_p}^2}(0) \right)_{p=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1} \mapsto \left(\frac{\partial w_{3j_p}^{\equiv p}}{\partial y_{m_p}^{j_p}}(P^{j_p}) \right)_{p=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1}.$$

Поправочная пара $\{M_q^{\equiv}; w_{(p)m_p}^{j_p q'}\}$ в анзацах (24) и (52) определяется из уравнения

$$A_{m_q}^{j_q} \partial_z^4 w_{(p)m_p}^{j_p q'}(z) - M_k^{\equiv} |\omega_{j_p}| w_{(p)m_p}^{j_p q'}(z) = M_q^{\equiv} |\omega_{j_p}| a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p}(z), \quad z \in \Upsilon_j,$$

и второй группы краевых условий (18) в точке $z = -\ell_j$. Эти условия считаем однородными по следующей причине: как показано в статье [16], матрицы $\mathcal{X}'_{(j)}$ и $\mathcal{X}''_{(j)}$ в представлении (27) можно зафиксировать так, чтобы пограничные слои около нижних торцов $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней Ω_j^h автоматически приобрели свойство экспоненциального затухания.

Для того чтобы найти краевые условия в точке $z = 0$, выполним сращивание внешнего и внутреннего разложений около торца $\omega_j^h(0)$ стержня Ω_j^h . С этой целью соберем присутствующие в выражении (53) и в представлении

$$h^{3/2}\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)w_3^{\equiv q}(y) = w_3^{\equiv q}(P^j)e_{(3)} + \sum_{l=1}^2 (y_l^j e_{(3)} - z e_{(l)}^j) \frac{\partial w_3^{\equiv q}}{\partial y_l^j}(P^j) + \dots \quad (56)$$

жесткие смещения порядков $1 = h^0$ и $\ln h$, записанные в «медленных» переменных (y^j, z) . Среди них нет горизонтальных поступательных смещений, а

вертикальное смещение (первое в правой части (56)) можно не принимать во внимание, так как оно появляется в первом краевом условии (19) для продольного смещения стержня $hw_3^{j_q''}$ на следующем шаге процедуры. То же можно сказать о повороте в горизонтальной плоскости, предназначенном для определения закручивания $hw_4^{j_q''}$. Интерес представляют повороты $y_{i_p}^j e_{(3)} - ze_{(i_p)}$ вокруг осей $y_{3-i_p}^j$, коэффициенты $G_{m_q}^{j_q}(\ln h)$ при которых, извлеченные из выражений (53) и (56), принимают вид

$$\begin{aligned} G_{m_p}^{j_p}(\ln h) &= \frac{\ln h}{4\pi A_0} A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) a_{j_p m_p}^{\equiv q} - \sum_{l=1}^J \sum_{r=1}^2 a_{lr}^{\equiv q} \mathbf{t}_{(l)r}^{3+r} A_r^l \frac{d^2 w_{(i_{rp})r}^l}{dz^2}(0) \\ &\quad - \sum_{s=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{S}_{qs}^k A_{m_s}^{j_s} \frac{d^2 w_{(i_{m_s s})m_s}^{j_s}}{dz^2}(0) a_{j_s m_s}^{\equiv q} \\ &=: \sum_{s=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{M}_{qs}^k(\ln h) A_{m_s}^{j_s} \frac{d^2 w_{(i_{m_s s})m_s}^{j_s}}{dz^2}(0) a_{j_s m_s}^{\equiv q}. \end{aligned}$$

При этом $\mathbf{t}_{(j)m}^l$ — элемент столбца $\mathbf{t}_{(j)m}^l$ в представлении (31) специального решения $\mathcal{V}_{(j)}^l$ задачи (11), а первая сумма в правой части истолковывается в соответствии с принятым соглашением. В случае $j := j_p = j_l$ и, например, $m_p = 1, m_l = 2$ важное равенство $\mathbf{t}_{(j)5}^4 = \mathbf{t}_{(j)4}^5$ проверяется подстановкой вектор-функций $\mathcal{V}_{(j)}^4$ и $\mathcal{V}_{(j)}^5$ в формулу Грина на усеченной области $\Xi^j = \{\xi^j : \zeta > -R, \rho_j < R\}$ и предельным переходом при $R \rightarrow +\infty$ (подробности см. в [1, разд. 5]). Таким образом, $(\varkappa_k^{\equiv} \times \varkappa_k^{\equiv})$ -матрица $\mathcal{M}^k(\ln h)$ симметрична и отрицательно определена при большом $|\ln h|$.

Поскольку $M_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p} = M_k^{\equiv}$ — простое собственное число, единственное условие разрешимости полученной задачи для $w_{(p)m_p}^{j_p q'}$ с краевыми условиями $w_{(p)m_p}^{j_p q'}(0) = 0$ и $\partial_z w_{(p)m_p}^{j_p q'}(0) = -G_{m_p}^{j_p}(\ln h)$ принимает в силу нормировки (21) собственной функции $w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}$ следующий вид:

$$\begin{aligned} M_q^{\equiv'} a_{j_q m_q}^{\equiv q} &= M_q^{\equiv'} a_{j_q m_q}^{\equiv q} |\omega_{j_q}| \|w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}\|; L^2(\Upsilon_j)\|^2 \\ &= \int_{\ell_{j_q}}^0 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q} (A_{m_q}^{j_q} \partial_z^4 w_{(q)m_q}^{j_q q'} - M_k^{\equiv} |\omega_{j_q}| w_{(q)m_q}^{j_q q'}) dz \\ &= A_{m_q}^{j_q} \frac{d^2 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}}{dz^2}(0) \frac{dw_{(q)m_q}^{j_q q'}}{dz}(0) \\ &= -A_{m_q}^{j_q} \frac{d^2 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}}{dz^2}(0) \sum_{p=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{M}_{qp}(\ln h) A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) a_{j_p m_p}^{\equiv p}. \quad (57) \end{aligned}$$

При $q = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1$ соотношения (57) (без средних их частей) образуют систему алгебраических уравнений с $(\varkappa_k^{\equiv} \times \varkappa_k^{\equiv})$ -матрицей $\mathcal{M}^k(\ln h)$, окаймленной диагональной матрицей $\text{diag} \{A_{m_l}^{j_l} \partial_z^2 w_{(i_{m_l l})m_l}^{j_l}(0)\}_{l=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}$, и ее собственные числа (49) при $\aleph \equiv$ суть отрицательные вещественные аналитические функции

параметра $|\ln h|^{-1}$, причем $M_l^{\equiv'}(0) = 0$. Они и соответствующие собственные векторы $a^{\equiv k}(\ln h), \dots, a^{\equiv k + \varkappa_k^{\equiv} - 1}(\ln h)$, подчиненные соотношениям (52), конкретизируют принятые асимптотические анзацы для собственных пар задачи (4)–(6).

6. Взаимодействие колебаний пластины и стержней. Пусть $M_k^{\equiv} \in \wp^{\equiv} := \wp^0 \cup \wp^{\equiv}$ — общее собственное число задач (12) и (16), (18) с кратностями $\varkappa^0 > 0$ и $\varkappa^{\equiv} > 0$ соответственно. В этом разделе $\aleph = \mathbb{F}$. В формуле (46) для члена $M_k^{\equiv}$ последовательности $\{M_l^{\equiv}\}_{l \in \mathbb{N}}$ с кратностью $\varkappa_k^{\equiv} = \varkappa_k^0 + \varkappa_k^{\equiv}$ первыми поставим собственные числа предельных задач на стержнях. Главные члены принятых в разд. 4 и 5 анзацев для собственных функций $u_{N_{\mathbb{F}}+l}^h$ сохраняются, однако из-за разных нормирующих множителей $h^{-1/2}$ и h^{-1} изменяем анзацы для собственных чисел

$$\Lambda_{N_k^{\equiv}+p}^h = h^2 M_k^{\equiv} + h^{5/2} M_p^{\equiv'} + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1, \quad (58)$$

а также множители при асимптотических поправках в разложениях на стержнях и пластине

$$\mathbf{W}_{(j_p)}^h(\eta^{j_p}, \partial_z)(a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p}(z) + h^{1/2} w_{(q)}^{j_p'}(z)) + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1, \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)(e_{(3)} \mathbf{w}_3^{0p}(y) + h^{1/2} \mathbf{w}_{(p)}^{0'}(y)) + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1. \quad (60)$$

Здесь $\mathbf{w}_3^{0p}$ — линейные комбинации (47) с членами

$$a_{k+\varkappa_k^{\equiv}}^{0p} w_{3i_k^0}^0, \dots, a_{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}^{0p} w_{3i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0,$$

коэффициенты которых образуют столбцы $a^{0p} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^0}$, причем $M_{i_k^0}^0 = \dots = M_{i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0 = M_k^{\equiv}$. Из этих столбцов и дополненных нулями столбцов $a^{\equiv p}$ коэффициентов в формулах (59) составим подлежащие определению столбцы $a^{\equiv p} = ((a^{\equiv p})^\top, (a^{0p})^\top)^\top \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^{\equiv}}$, подчиненные соотношениям (52).

Воспроизведем с упрощениями процедуры из разд. 5 и 4. Именно, в качестве внутреннего разложения около торца $\omega_{j_p}^h(0)$ возьмем сумму жесткого смещения (см. выражение (35))

$$\mathbf{v}_{(j)}^h(y^j, z) := h^{-1/2} d_{(3)}^\dagger(y^j, z) d_{(3)}^\dagger(-\nabla_{y^j}, 0) (a_{k+\varkappa_k^{\equiv}}^{0q} w_{3i_k^0}^0(P^j) + \dots + a_{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}^{0q} w_{3i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0(P^j)) \quad (61)$$

и решения (53) задачи (11) с множителем

$$a_{m_p i_p}^{\equiv q} F_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p 2} = a_{m_p i_p}^{\equiv q} \partial_z^2 w_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p}(0).$$

Как и в предыдущих разделах, процедура сращивания формирует задачи для пар $\{M_p^{\equiv'}; \mathbf{w}_{(q)}^{0'}\}$ и $\{M_p^{\equiv}; w_{(q) m_p}^{j_p'}\}$ из анзацев (58)–(60). Именно, функция $\mathbf{w}_{(q)}^{0'}$ удовлетворяет уравнению в проколотой области

$$A_0 \Delta_y^2 \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) - M_p^{\equiv} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) = M_p^{\equiv'} \mathbf{w}_3^{0q}(y), \quad y \in \omega_0^\bullet = \omega_0 \setminus \{P^1, \dots, P^J\}, \quad (62)$$

краевым условиям Дирихле на границе $\partial\omega_0$ и асимптотическим условиям (см. формулу (55))

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) &= \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) + (y^j)^\top \nabla_{y^j} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) \\ &+ \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \underbrace{a_{jm}^{\equiv q} A_m^j \partial_z^2 w_{(i_{pm}^j) m}^j(0)}_{\partial_z^2 w_{(i_{pm}^j) m}^j(0)} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + O(r_j^2), \quad r_j \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (63)$$

Для функции $w_{(q)m}^{j'}$ с индексами $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$ выполнены соотношения

$$A_m^j \partial_z^4 w_{(q)m}^{j'}(z) - M_k^{\mathbb{F}} |\omega_j| w_{(q)m}^{j'}(z) = M_q^{\mathbb{F}'} |\omega_j| a_{jm}^{\mathbb{E}q} w_{(i_{mp}^j)m}^j(z), \quad z \in \Upsilon_j, \quad (64)$$

$$w_{(q)m_p}^{j_{p'}}(0) = 0, \quad \partial_z w_{(q)m}^{j_{p'}}(0) = \sum_{l=0}^{\kappa_k^0-1} a_l^{0q} \frac{\partial w_{3i_k^0+l}^0}{\partial y_{m_p}^j}(P^{j_p}) \quad (65)$$

и вторая группа краевых условий (18) в точке $z = -\ell_j$. Если $j \neq j_p$, то уравнение (64) однородное и задача с соответствующими краевыми условиями однозначно разрешима. При остальных индексах p условия разрешимости задач (62), (63) и (64), (65) в силу соотношений (15) и (21) принимают вид системы алгебраических уравнений (50) со значком $\mathbb{N} = \mathbb{F}$ и матрицей

$$\mathcal{M}^{k\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{\kappa_k^{\mathbb{E}} \times \kappa_k^{\mathbb{E}}} & \mathcal{B}^k \\ (\mathcal{B}^k)^{\top} & \mathbb{O}_{\kappa_k^0 \times \kappa_k^0} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathcal{B}^k = (\mathcal{B}_{pq}^k)_{p=k, l=k+\kappa_k^{\mathbb{E}}-1}^{k+\kappa_k^{\mathbb{E}}-1, k+\kappa_k^{\mathbb{F}}-1},$$

$$\mathcal{B}_{pl}^k = A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{mp}^j)m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) \frac{\partial w_{3i_k^0+l}^0}{\partial y_{m_p}^j}(P^{j_p}), \quad (66)$$

а $\mathbb{O}_{m \times m}$ — нулевая $m \times m$ -матрица. Матрица $\mathcal{M}^{k\mathbb{F}}$ размером $\kappa_k^{\mathbb{F}} \times \kappa_k^{\mathbb{F}}$ симметрична и ее собственные числа (49) вместе с собственными векторами $a^{\mathbb{F}k}, \dots, a^{\mathbb{F}k+\kappa_k^{\mathbb{F}}-1} \in \mathbb{R}^{\kappa_k^{\mathbb{F}}}$, подчиненными условиям (52) при $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, конкретизируют принятые асимптотические анзацы (58)–(60).

7. Утверждение о сходимостях. Неравенства (98) из первой части формулируемой далее теоремы 2 показывают, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные c_k и h_k , что выполнены соотношения

$$\Lambda_k^h \leq c_k h^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_k^h := E(u_{(k)}^h, u_{(k)}^h; \Pi^h) \leq c_k h^2 \quad \text{при } h \in (0, h_k] \quad (67)$$

для собственной пары $\{\Lambda_k^h; u_{(k)}^h\}$ задачи (7). Второе из них — следствие нормировки $\|u_{(k)}^h; L^2(\Pi^h)\| = 1$. Как и в работе [1], на стержне Ω_j^h используем представление

$$u_{(k)}^{hj}(x) = u_{(k)}^{hj\perp}(x) + d \left(y - P^j, z - \frac{h}{2} \right) \mathbf{b}_{(k)}^{hj}, \quad \text{где } \mathbf{b}_{(k)}^{hj} \in \mathbb{R}^6,$$

$$\int_{\omega_j^h(0,h)} d \left(y - P^j, z - \frac{h}{2} \right)^{\top} u_{(k)}^{hj\perp}(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

В [1, разд. 8] для вектор-функции u_3^{h0} и $u_{(kj)}^{h\perp}$ получены оценки

$$\|u_{(k)}^h; L^2(\Omega_0^h(0, h))\|^2 + \|u_{(k)}^{hj\perp}; L^2(\omega_j^h(-2h, h))\|^2 \leq Ch^2 \mathbf{E}_k^h \leq c_k Ch^4 \mathbf{E}_k^h, \quad (68)$$

Здесь $\omega_j^h(a, b) = \omega_j^h \times (a, b)$ и $\Omega_0^h(0, h) = \{x \in \Omega_0^h : \text{dist}(y, \partial\omega_0) < h\}$. Определим функции среднего

$$\mathbf{u}_{(k)3}^{h0}(y) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^h u_{(k)3}^{h0}(y, z) dz,$$

$$\mathbf{u}_{(k)m}^{hj}(z_j) = \frac{1}{|\omega_j^h|^{1/2}} \int_0^h u_{(k)m}^{hj\perp}(y, z) dy, \quad j = 1, \dots, J, \quad m = 1, 2. \quad (69)$$

В статье [1] при доказательстве теоремы 2 для тех же индексов j и m установлено, что

$$\begin{aligned} & \|u_{(k)m}^{h0}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|u_{(k)3}^{h0} - \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|u_{(k)3}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ & \quad + h(1 + |\ln h|)^{-2} \|u_{(k)3}^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ & \quad + (1 + |\ln h|)^{-2} \|u_{(k)m}^{hj\perp} - \mathbf{u}_{(k)m}^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_\perp \mathbf{E}_k^h \leq c_k c_\perp h^2. \end{aligned} \quad (70)$$

При обработке норм разностей приняли во внимание неравенства Пуанкаре для функций с нулевым средним. Кроме того, при помощи оценок (70)_[1] элементов столбца $\mathbf{b}_{(k)}^{hj}$ проверяем, что $(1 + |\ln h|)^{-2} \|u_m^{hj} - u_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_\perp^j h^{-1} \mathbf{E}_k^h \leq c_\perp^j c_k h$. Итак, из формулы (10) с $i = k$ выводим, что

$$\|\mathbf{u}_{3k}^{h0}; L^2(\omega_0)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|\mathbf{u}_{km}^{hj}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 = 1 + O(h(1 + |\ln h|)^2) \text{ при } h \rightarrow +0. \quad (71)$$

Более того, в упомянутой статье проверены такие соотношения для производных функций (69):

$$\begin{aligned} & \|\nabla_y \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}; L^2(\omega_0)\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 \\ & \leq \frac{1}{h} \int_{\omega_0} \left(\int_0^h \nabla_y u_{(k)3}^h dz \right)^2 dy + \frac{1}{|\omega_j^h|} \int_{-\ell_j}^0 \left(\int_{\omega_j^h} \partial_z u_{(k)m}^{hj\perp} dy \right)^2 dz \\ & \leq \|\nabla_y u_{(k)3}^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|\partial_{z_j} u_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_k h^{-2} \mathbf{E}_k^h \leq C_k. \end{aligned} \quad (72)$$

В итоге благодаря соотношениям (67) и (71), (72) существует бесконечно малая положительная последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, вдоль которой при $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} & h^{-2} \Lambda_k^h \rightarrow \mathbf{M}_k, \text{ а также } \mathbf{u}_{(k)3}^{h0} \rightarrow \mathbf{w}_3^{0k} \text{ и } \mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp} \rightarrow \mathbf{w}_m^{jk} \\ & \text{слабо в } H^1(\omega_0) \text{ и } H^1(\Upsilon_j) \text{ соответственно, но сильно в } L^2(\omega_0) \text{ и } L^2(\Upsilon_j), \\ & \text{причем } \|\mathbf{w}_3^{0k}; L^2(\omega_0)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|\mathbf{w}_m^{jk}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 = 1. \end{aligned} \quad (73)$$

Весовые множители в неравенствах Корна (61)_[1], (62)_[1] и (69)_[1] показывают, что конечны нормы

$$\left(\int_{\omega_0} (\mathbf{R}_{h0}^{-4} |\mathbf{u}_{(k)3}^{h0}|^2 + \mathbf{R}_{h0}^{-2} |\nabla_y \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}|^2) dy \right)^{1/2}$$

и

$$\left(\int_{-\ell_j}^0 \left(\mathbf{R}_{hj}^{-4} |\mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}|^2 + \mathbf{R}_{hj}^{-2} \left| \frac{d\mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}}{dz} \right|^2 \right) dz \right)^{1/2},$$

в которых $\mathbf{R}_{h0}(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega_0)$ и $\mathbf{R}_{hj}(z) = h + |z|$, а значит, функции (69) попадают в пространства Кондратьева [17], которые благодаря показателям -4

и -2 содержатся в пространствах Соболева $H^1(\omega_0)$ и $H^1(\Upsilon_j)$. Таким образом, предельный переход приводит к соотношениям

$$\int_{\omega_0} \mathbf{R}_{00}(y)^{\beta-4} |\mathbf{w}_3^{0k}(y)|^2 dy + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1-\ell_j}^2 \int_0^0 \mathbf{R}_{0j}(z)^{\beta-4} |\mathbf{w}_m^{jk}(z)|^2 dz \leq C_k \quad \forall \beta > 0. \quad (74)$$

Весовой показатель увеличен для обеспечения компактности вложения пространства Кондратьева в весовой класс Лебега (см. [17] и, например, [7, гл. 4; 18, гл. 8]). При наличии гладкости у функций $\mathbf{w}_3^{0k}$ и $\mathbf{w}_m^{jk}$ (см. ниже) формула (74) с малым $\beta > 0$ гарантирует для них двойные условия Дирихле на границе $\partial\omega_0$ и в точке $z = 0$ соответственно.

Теперь выберем функции $\Psi_3^9 \in C_c^\infty(\omega_0)$ и $\Psi_m^j \in C_c^\infty[-\ell_j, 0)$, считая, что Ψ^9 постоянна около каждой из точек $P^1, \dots, P^J$ (и аннулируется около контура $\partial\omega_0$). В тождество (7) подставим пробную вектор-функцию ψ^h , заданную имитирующими асимптотическими конструкциями равенствами

$$\begin{aligned} \psi^h(x) &= h^{-1/2} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)} \Psi_3^0(y) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ \psi^h(x) &= h^{-5/2} e_{(3)} \Psi^0(P^j) \\ &\quad + \frac{1}{|\omega_j^h|^{-1/2}} \sum_{m=1}^2 \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \Psi_m^j(y) \text{ при } x \in \Omega_j^h, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

Благодаря свойствам ингредиентов вектор-функция ψ^h бесконечно дифференцируема в $\overline{\Pi^h}$ при малых $h > 0$ и выполнены условия Дирихле (5), а значит, формула Грина приводит к равенству

$$\begin{aligned} 0 &= E(u_{(k)}^h, \psi^h; \Pi^h) - \Lambda_k^h(u_{(k)}^h, \psi^h)_{\Pi^h} \\ &= (u_{(k)}^h, L(\nabla_x) \psi^h - \Lambda_k^h \psi^h)_{\Pi^h} + (u_{(k)}^h, B(\cdot, \nabla_x) \psi^h)_{\partial\Pi^h \setminus \Gamma_0^h}. \end{aligned}$$

Строение определенных равенствами (26) и (27) дифференциальных операторов $\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y)$ и $\mathbf{W}_{(j)}^h(\cdot, \partial_z)$ обеспечивает соотношения (подробности см. в [6, гл. 4 и 5] и [1])

$$\begin{aligned} L(\nabla_x) \psi^h(x) &= F^{h0}(x), \quad F_3^{h0}(x) = h^{-1/2} A_0 \Delta_y^2 \Psi^0(y) + O(h^{1/2}), \\ F_m^{h0}(x) &= O(h^{-1/2}) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ L(\nabla_x) \psi^h(x) &= F^{hj}(x), \quad F_m^{hj}(x) = |\omega_j^h|^{-3/2} A_m^j \partial_z^4 \Psi^j(z) + O(1), \\ F_3^{hj}(x) &= O(h^{-1}) \text{ при } x \in \Omega_j^h. \\ \Lambda_k^h \psi_3^h(x) &= h^{-1/2} (h^{-2} \Lambda_k^h) \Psi_3^0(y) + O(h^{1/2}), \quad \Lambda_k^h \psi_m^h(x) = O(h^{1/2} \Lambda_k^h) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ \Lambda_k^h \psi_m^h(x) &= (h^{-2} \Lambda_k^h) (|\omega_j^h|^{-1/2} \Psi_m^j(z) + h^{-1/2} \Psi_3^0(P^j)) + O(h^{1/2}), \\ \Lambda_k^h \psi_3^h(x) &= O(h^{1/2} \Lambda_k^h) \text{ при } x \in \Omega_j^h. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу сходимостей (73) и простых оценок первых двух слагаемых в (70) осуществляем предельный переход при помощи определений (69) и получаем, что

$$\begin{aligned} (u_{(k)}^h, L(\nabla_x) \psi^h - \Lambda_k^h \psi^h)_{\Pi^h} &\rightarrow (\mathbf{w}_3^{k0}, A_0 \Delta_y^2 \Psi_3^0 - \mathbf{M}_k \Psi_3^0)_{\omega_0} \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 (\mathbf{w}_m^{kj}, A_m^j \partial_z^4 \Psi_m^j - |\omega_j| \mathbf{M}_k \Psi_m^j)_{\Upsilon_j}. \quad (75) \end{aligned}$$

Более того, оценки производных смещений $u_{(k)m}^h$ и $u_{(k)3}^{hj\perp}$ из формул (61)_[1], (62)_[1] и (69)_[1] вместе со следовыми неравенствами показывают, что

$$(u_{(k)}^h, B\psi^h)_{\partial\Pi^h \setminus \Gamma_0^h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow +0.$$

Таким образом, правое выражение из высказывания (75) обращается в нуль и превращается в интегральное тождество, обслуживающее задачи (12) и (16), (18), причем наборы разрешенных пробных функций суть плотные множества в пространствах $H_0^2(\omega_0)$ и $\{v_m^j \in H^2(-\ell_j, 0) : v_m^j(0) = \partial_z v_m^j(0) = 0\}$ соответственно. В итоге теоремы о поднятии гладкости решений эллиптических краевых задач (см. [4, гл. 2], а также²⁾, например, [18, теорема 8.3.3]) показывают, что функции $\mathbf{w}_3^{k0}$ и $\mathbf{w}_m^{kj}$ попадают в пространства $C^\infty(\overline{\omega_0})$ и $C^\infty[-\ell_j, 0]$, согласно формуле (74) аннулируются на границе $\partial\omega_0$ и в точке $z = 0$ вместе со своими производными и удовлетворяют упомянутым предельным задачам со спектральным параметром $\mathbf{M}_k$. Последняя формула в высказывании (73) приводит к нужному утверждению.

Теорема 1. *Предельные переходы (73) определяют собственную пару хотя бы одной из предельных задач (12) или (16), (18), $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$.*

8. Теорема об асимптотике собственных чисел. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^h := H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ введем скалярное произведение (8) и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{T}^h$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^h u^h, \psi^h \rangle_h = (u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall u^h, \psi^h \in H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3. \quad (76)$$

К тому же оператор $\mathcal{T}^h$ компактный и, следовательно, по теоремам 10.1.5 и 10.2.1 в [19] его дискретный спектр $\wp^h$ образует положительную монотонную бесконечно малую последовательность собственных чисел, составленную при учете их кратностей,

$$\tau_1^h \geq \tau_2^h \geq \tau_3^h \geq \dots \geq \tau_k^h \geq \dots \rightarrow +0. \quad (77)$$

В силу определения (76) вариационная постановка (7) задачи (4)–(6) эквивалентна уравнению $\mathcal{T}^h u^h = \tau^h u^h$ в $\mathcal{H}^h$, а члены последовательностей (77) и (9) связаны соотношением $\tau_k^h = (\Lambda_k^h)^{-1}$.

Далее понадобится лемма о «почти собственных» числах и векторах, являющаяся прямым следствием спектрального разложения резольвенты (см. первоисточник [20] и [19, гл. 6]).

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $U^h \in \mathcal{H}^h$ и число $T^h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют требованиям*

$$\|U^h; \mathcal{H}^h\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^h U^h - T^h U^h; \mathcal{H}^h\| =: \epsilon^h \in [0, T^h).$$

Тогда найдется член $\tau_{\mathbb{N}}^h$ последовательности (77), для которого $|\tau_{\mathbb{N}}^h - T^h| \leq \epsilon^h$. Более того, при любом $\epsilon_*^h \in (\epsilon^h, T^h)$ существует такой столбец

$$\mathcal{C}^h = (\mathcal{C}_{\mathcal{N}^h}^h, \dots, \mathcal{C}_{\mathcal{N}^h + \mathcal{K}^h - 1}^h)^\top \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h},$$

²⁾Границу $\partial\omega_0$ и точку $z = 0$ интерпретируем как ребра с размерностями 1 и 0. Возможны и иные ссылки.

что

$$\left\| U^h - \sum_{p=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1} \mathcal{C}_p^h \mathcal{U}_p^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq 2 \frac{\epsilon^h}{\epsilon_*^h}, \quad \sum_{p=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1} |\mathcal{C}_p^h|^2 = 1, \quad (78)$$

где $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^h}^h, \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1}^h$ — собственные векторы оператора $\mathcal{T}^h$, отвечающие его собственным числам из замкнутого сегмента $[T^h - \epsilon_*^h, T^h + \epsilon_*^h]$ и удовлетворяющие условиям $\langle \mathcal{U}_p^h, \mathcal{U}_q^h \rangle_h = \delta_{p,q}$.

Ближайшая цель — соорудить «почти собственные» числа M_q^h и векторы $U_{(q)}^h$ для оператора $\mathcal{T}^h$ и оценить вычисленную по ним величину ϵ_q^h из леммы 1. Выберем собственное число $M_k^{\mathbb{F}}$ в объединенной последовательности $\{M_l^{\mathbb{F}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ с кратностями $\mathfrak{K}_k^0$ и $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}$, причем в отличие от разд. 6 не исключаем случаи $\mathfrak{K}_k^0 = 0$ или $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} = 0$. В качестве «почти собственных» чисел возьмем выражения

$$T_q^h = h^{-2} (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'})^{-1}, \quad q = k, \dots, k + \mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} - 1, \quad (79)$$

где $M_q^{\mathbb{F}'}$ — собственные числа (49), $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, матрицы $\mathcal{M}^{k\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}}$ размером $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} \times \mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}$, заданной формулами (66). Если же $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{N}} = 0$ при $\mathbb{N} = 0$ или $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, то сама матрица и ее собственные числа считаются нулевыми, так как предельные задачи соответственно на стержнях или пластине оказываются однозначно разрешимыми, а поправочные члены $O(h^{3/2})$ в представлениях (22) и (24) — нулевыми.

Конструкция соответствующих «почти собственных» векторов $U_{(k)}^h, \dots, U_{(k+\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}-1)}^h$ непомерно громоздкая, поскольку включает в себя разнородные пограничные слои, возникающие около кромки Γ_0^h пластины и внешних торцов $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней, а также степенных — наиболее сложных для обработки — пограничных слоев в зонах присоединения стержней к пластине, которым и уделим основное внимание. Подчеркнем, что первые пограничные слои уже неоднократно изучались во многих публикациях (см. статьи [15, 21–23] и др., а также [7, гл. 16]).

Для образования «почти собственных» векторов введем гладкие срезающие функции

$$\mathfrak{r}_0^j \in C_c^\infty(\omega_0), \quad \mathfrak{r}_0^j(y) = 1 \text{ в фиксированной окрестности точки } P^j \\ \text{и } \mathfrak{r}_0^j \mathfrak{r}_0^l = 0 \text{ при } j \neq l,$$

$$\mathfrak{r}_j^h(y) = 1 \text{ при } r_j < R_j h \text{ и } \mathfrak{r}_j^h(y) = 0 \text{ при } r_j > 2R_j h, \quad \mathfrak{X}_j^h(z) = 1 - \chi(-\zeta), \\ \mathfrak{r}_j^0(z) = 1 \text{ при } z > -\ell_j/3 \text{ и } \mathfrak{r}_j^0(y) = 0 \text{ при } z < -2\ell_j/3, \quad (80)$$

$$\mathfrak{r}_0^h(y) = 1 \text{ при } n > -h \text{ и } \mathfrak{r}_0^h(y) = 1 \text{ при } -n < 2h, \quad \mathfrak{r}_0^0 \in C_c^\infty(\mathfrak{D}_d), \quad \mathfrak{r}_0^0 = 0 \text{ в } \mathfrak{D}_{d/2},$$

$$\mathfrak{X}^h(y) = (1 - \mathfrak{r}_1^h(y)) \times \dots \times (1 - \mathfrak{r}_j^h(y)), \quad \mathfrak{X}_0^h(y) = (1 - \mathfrak{r}_0^h(y)) \mathfrak{X}^h(y).$$

При этом (n, s) — криволинейные координаты в d -окрестности $\mathfrak{D}_d$ контура $\partial\omega_0$, n — ориентированное расстояние до контура, $n < 0$ в $\Omega \cap \mathfrak{D}_d$, s — длина дуги на нем, а $e_{(n)}$ и $e_{(s)}$ — орты осей. Удобно считать, что $\mathfrak{r}_0^h(y) = \chi(R_j^{-1} \rho_j)$ (см. формулу (31)).

В дополнение к «почти собственному» числу (79) положим

$$U_{(q)}^h = \|\mathfrak{u}_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \mathfrak{u}_{(q)}^h,$$

причем сужение вектор-функции $\mathbf{u}_{(q)}^h$ на пластину Ω_0^h определим так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(q)}^{h0}(x) = & \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) \left(\mathfrak{X}^h(y) \mathbf{w}_3^{0q}(y) e_{(3)} + h^{1/2} \mathfrak{X}_0^h(y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) e_{(3)} \right. \\ & + h \mathfrak{X}^h(y) \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) e_{(3)} + \sum_{j=1}^J \mathfrak{r}_j^h(y) (\mathfrak{l}_{(q)}^0(y^j) e_{(3)} \\ & + h^{1/2} \mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j) e_{(3)}) + h \mathfrak{r}_0^0(y) (\mathbf{K}_n^q(\nu) e_{(n)} + \mathbf{K}_z^q(\nu) e_{(3)}) \Big) \\ & - h^{5/2} \mathfrak{r}_0^h(y) \mathscr{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_y) (\mathbf{w}_3^{0q}(y) e_{(3)}) + h^{3/2} \mathfrak{r}_0^0(y) \tilde{\mathbf{v}}^\#(h^{-1}n, \zeta, s) \\ & + h \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \mathfrak{r}_0^j(y) \left(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}(\xi^j) + \ln h \frac{1}{4\pi A_0} (\eta_i^j e_3 - \zeta e_{(i)}^j)^2 \right). \quad (81) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{w}_3^{0q}$ и $\mathbf{w}_{(q)3}^{0'}$ — функции, построенные в разд. 6, а

$$\mathfrak{l}_{(q)}^0(y^j) = \mathbf{w}_3^{0q}(P^j) + y_1^j \partial_{y_1} \mathbf{w}_3^{0q}(P^j) + y_2^j \partial_{y_2} \mathbf{w}_3^{0q}(P^j)$$

и $\mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j)$ — их линейные части, порождающие жесткие смещения $\mathfrak{d}_{(q)}(y^j, z)$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}'_{(q)}(y^j, z) &:= h^{1/2} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) (\mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j) e_{(3)}) \\ &= \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) e_{(3)} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}}{\partial y_i^j}(P^j) \left(y_3^j e_{(3)} - \left(z - \frac{h}{2} \right) e_{(i)}^j \right). \end{aligned}$$

Представлению (63) сингулярного решения задачи Дирихле для уравнения (62) придадим вид

$$\mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) = \mathfrak{l}'_q(y^j) + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + \tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0'j}(y), \quad \tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0'j}(y) = O(r_j^2), \quad (82)$$

где b_i^j — коэффициент, выделенный в формуле (63) фигурной скобкой снизу, причем по соглашению $b_i^j = 0$, если $j \neq j_p$ и $m \neq m_p$ при всех $p = k, \dots, k + \varkappa_k^- - 1$. Кроме того, в формулу (81) помещен экспоненциально затухающий при удалении от Γ_0^h остаток $\tilde{\mathbf{v}}_{(q)}^\#$ в разложении

$$\mathbf{v}_{(q)}^\#(h^{-1}n, \zeta, s) = \mathbf{K}_n^q(\nu) e_{(n)} + \mathbf{K}_z^q(\nu) e_{(3)} + \tilde{\mathbf{v}}_{(q)}^{\#m}(h^{-1}n, \zeta, s)$$

пограничного слоя около кромки пластины, построенного в [15] и подробно описанного в [1, разд. 4]. Функция $\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet} \in H^2(\omega_0) \cap C^\infty(\overline{\omega_0} \setminus \{P^1, \dots, P^J\})$ — решение следующей краевой задачи с точечными условиями, корректной ввиду теоремы Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости:

$$\begin{aligned} \Delta_y^2 \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) &= - \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \Delta_y^2 \mathbf{T}_{(j)}^{3+m}(\nabla_{\eta^j})(\mathfrak{r}_0^j(y) \Phi_3(\eta^j)) \\ &=: f_0^\bullet(y) + f_1^\bullet(y) \ln h, \quad y \in \omega_0^\bullet, \quad (83) \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = 0, \quad \partial_n \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = \mathbf{K}(\nu) \Delta_y w_{3k}^0(y), \quad \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(P^j) = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Наконец, в последней сумме из (81) присутствует составляющая $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{i+3}$ разложения (31) решения однородной задачи (11) в Ξ^j , которую также поместим

в сужение «почти собственного» вектора $\mathbf{u}_{(q)}^h$ на стержни Ω_j^h , $j = 1, \dots, J$, а именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(q)}^{hj}(x) = & \sum_{m=1}^2 a_{jm}^{\equiv q} \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \left(\mathfrak{X}_j^h(z) \left(w_{(q)m}^j(z) e_{(m)} \right. \right. \\ & \left. \left. + h^{1/2} \left(w_{(q)m}^{j'}(z) - z \frac{\partial \mathbf{w}_3^{0q}}{\partial y_m}(P^j) \right) e_{(m)} \right) \right) \\ & + h \sum_{m=1}^2 (\mathfrak{r}_j^0(z) (\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j) - \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{t}_{(j)}^{3+m}) \\ & + h \chi(-\zeta) \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (\mathfrak{r}_j^0(z) (d'(0, h^{-1}z) \mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} + d^6(h^{-1}y^j, 0) \mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}) \\ & + h^{-1/2} \mathfrak{d}_j^h(y^j, z) + h^{1/2} \mathfrak{d}_j'(y^j, z)). \quad (84) \end{aligned}$$

Принято соглашение о коэффициентах $a_{jm}^{\equiv q}$ из разд. 5, использовано первое разбиение (28) матрицы d , а $\mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} \in \mathbb{R}^5$ — укороченный столбец $\mathbf{t}_{(j)}^{3+m} \in \mathbb{R}^6$ (отщипили нижний элемент $\mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}$).

Теперь в согласии с определениями (79) и (8), (76) преобразуем величину ϵ_q^h из леммы 1:

$$\begin{aligned} \epsilon_q^h = & \|\mathcal{T}^h U_{(q)}^h - T_q^h U_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\| = \sup |\langle \mathcal{T}^h U_{(q)}^h - T_q^h U_{(q)}^h, \psi^h \rangle_h| \\ & = h^{-2} (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'})^{-1} \|\mathbf{u}_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \\ & \times \sup |E(\mathbf{u}_{(q)}^h, \psi^h; \Pi^h) - h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) (\mathbf{u}_{(q)}^h, \psi^h)_{\Pi^h}|. \quad (85) \end{aligned}$$

Супремум вычисляется по единичной сфере в $\mathcal{H}^h$, т. е.

$$\|\psi^h; \mathcal{H}^h\|^2 = E^h(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) = 1.$$

Выражение между последними знаками модуля представим как сумму $I_0^h(\psi^h) + I_1^h(\psi^h) + \dots + I_J^h(\psi^h)$ и начнем рассмотрение с наиболее сложно устроенного первого слагаемого.

Все срезки перенесем от слагаемых из (81) к пробной вектор-функции ψ^h . Сомножитель $1 - \mathfrak{r}_0^h$ у срезки $\mathfrak{X}_0^h$ (см. последнюю формулу (80)) имеется у слагаемого $h^{1/2} \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}$ и при ее переносе возникают коммутаторы на трехмерном тонком «кольце» $\Omega_0^h(h) = \{x \in \overline{\Omega_0^h} : h \leq |n| \leq 2h\}$ объемом $\text{mes}_3 \Omega_0^h(h) = O(h^2)$, модули которых мажорируются суммой интегралов

$$\begin{aligned} & ch^{1/2} \sum_{l=0}^3 h^{l-1/2} \sum_{k=0}^{1+l} \int_{\Omega_0^h(h)} |\nabla_y^{l+1-k} \mathfrak{r}_0^h(y)| |\nabla_y^k \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}(y)| (|\varepsilon(\psi^h; x)| + h^{-1} |\psi^h(x)|) dx \\ & \leq C (\text{mes}_3 \Omega_0^h(h))^{1/2} \sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-1} \max_{n \in [-2h, -h]} |n|^{(2-k)+} \\ & \quad \times (\|\varepsilon(\psi^h); L^2(\Omega_0^h)\| + h^{-1} \|\psi^h; L^2(\Omega_0^h(h))\|), \quad (86) \end{aligned}$$

каждый из которых не превосходит $c_{lk} h^2 (1 + |\ln h|)$ по следующим причинам. Производные порядка $1 + l$, приходящие из оператора $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)$ и тензора напряжений, имеют множитель $h^{l-1/2}$, а дифференцирование распределено между $\mathfrak{r}_0^h$ и $\mathbf{w}_{(q)3}^{0r}$, причем в первом случае возникает множитель h^{k-1-l} , а во втором — $c_k |n|^{(2-k)+}$ благодаря равенствам $\mathbf{w}_{(q)3}^{0r} = \partial_n \mathbf{w}_{(q)3}^{0r} = 0$ на $\partial\omega_0$ (здесь

$t_+ = (t + |t|)/2$ — положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$). Наконец, согласно неравенству Корна (71)_[1] на множествах $\mathbb{T}_j^h = \{x \in \Pi^h : z > -2h, r_j < 2R_j h\} \supset \Omega_0^h(h)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \|\psi_p^h; L^2(\mathbb{T}_j^h)\| &\leq c_j h^{1-\delta_{p,3}} (1 + |\ln h|) E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) \\ &\leq c_j h^{1-\delta_{p,3}} (1 + |\ln h|), \quad p = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (87)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее станет понятно, что порядок $h^2(1 + |\ln h|)$ мажоранты для выражения (88) оптимален. Если и функцию $\mathbf{w}_3^{0q}$ умножить на срезку $1 - \mathfrak{x}_0^h$ (она отсутствует у $\mathfrak{X}^h$; см. список (80)), то оценивание коммутаторов породило бы недопустимо большую мажоранту $ch^{3/2}$. Именно поэтому в конструкцию (81) был введен пограничный слой, который согласно [15] обеспечивает искомую погрешность $O(h^2)$. Функция $h^{5/2}\mathfrak{x}_0^h \mathcal{W}^1(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}$, вычитенная опять-таки для выполнения условия (5), не нуждается в поправке типа пограничного слоя, так как ее норма в пространстве $\mathcal{H}^h$ равна $O(h^{5/2})$ благодаря формулам $\text{supp}|\nabla_y \mathfrak{x}_0^h| \subset \Omega_0^h(h)$ и $\text{mes}_3 \Omega_0^h(h) = O(h^2)$.

Теперь обработаем коммутаторы, появляющиеся вследствие переноса срезов $\mathfrak{x}_j^h$, для которых носители производных принадлежат множеству $\Omega_j^h(h) = \{x \in \Omega_0^h; h \leq R_j^{-1}r_j \leq 2h\} \subset \mathbb{T}_j^h$ объемом $O(h^3)$. Около точек P^j введем величины $\tilde{\mathbf{w}}_3^{0qj}(y) = \mathbf{w}_3^{0q}(y) - \mathbf{l}_q^0(y^j) = O(r_j^2)$ и $\tilde{\mathbf{w}}'_{(q)3}(y)$ из формулы (82). Интегралы, содержащие первую из них и коммутаторы со срезкой $\mathfrak{x}_j^h$, не превосходят

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega_j^h(h)} &\left(\sum_{l=0}^3 h^{l-1/2} \sum_{k=0}^{1+l} |\nabla_y^{l+1-k} \mathfrak{x}_j^h(y)| |\nabla_y^k \tilde{\mathbf{w}}_3^{0q}(y)| |\varepsilon(\psi^h; x)| \right. \\ &\quad \left. + |\sigma_{mp}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)(\mathbf{w}_3^{0q}(y)e_{(3)}))| |\nabla_y \mathfrak{x}_j^h(y)| |\psi^h(x)| \right) dx \\ &\leq c_j (\text{mes}_3 \Omega_j^h(h))^{1/2} \left(\sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-3/2} \max_{r_j/R_j \in [h, 2h]} r_j^{(2-k)_+} + h^{3/2} h^{-1} (1 + |\ln h|) \right) \\ &\leq C_j h^2 (1 + |\ln h|). \end{aligned} \quad (88)$$

Пояснение: сначала вынесли срезку «из-под напряжений»

$$\sigma_{mp}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y)(\mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)})),$$

которые согласно формулам (27) равны $O(h^{3/2})$, а затем занесли ее «вовнутрь деформаций» $\varepsilon_{mp}(\psi^h)$ и применили неравенства (87). Для функции $\tilde{\mathbf{w}}'_{(q)3}(y)$ подобные действия приводят к оценке с мажорантой $C_j h^{5/2}(1 + |\ln h|)$, а для решения задачи (83) благодаря соотношениям $\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = O(r_j)$ и присутствию параметров h и $\ln h$ — к оценке с той же мажорантой, что и в (88).

Разберемся со слагаемыми, оставшимися в выражении $I_0^h(\psi^h)$ после переноса срезов. Начнем с суммы $\mathfrak{I}_h^{00}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{0r}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{0''}(\psi^h)$ скалярных произведений

$$\begin{aligned} &E_0(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h; \Omega_0^h) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &+ h^{1/2} (E_0(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h; \Omega_0^h) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &- h^2 M_q^{\mathbb{F}'}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h}) - h^3 M_q^{\mathbb{F}'}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h)_{\Omega_0^h}, \end{aligned} \quad (89)$$

где $\Sigma_{\pm}^h$ — основания пластины Ω_0^h , а $B^{\pm}(\nabla_x)$ — операторы краевых условий Неймана на них. Благодаря наличию срезок возможно интегрирование по частям. В частности,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_h^0(\psi^h) &= ((L(\nabla_x) - h^2 M_k^{\mp}) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q} e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &\quad + \sum_{\pm} (B^{\pm}(\nabla_x) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q} e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Sigma_{\pm}^h} \\ &=: (\mathfrak{F}^h, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} + \sum_{\pm} (\mathfrak{G}_{\pm}^h, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Sigma_{\pm}^h}, \end{aligned} \quad (90)$$

и согласно процедуре понижения размерностей (см., например, [6, гл. 4])

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_3^h(y, \zeta) &= h^{1/2} \mathfrak{F}_3^0(y, \zeta) + O(h^{5/2}), \quad \mathfrak{G}_{\pm 3}^h(y) = h^{3/2} \mathfrak{G}_{\pm 3}^0(y, \zeta) + O(h^{7/2}), \\ \mathfrak{F}_m^h(y, \zeta) &= O(h^{3/2}), \quad \mathfrak{G}_{\pm m}^h(y) = O(h^{5/2}), \\ \int_{-1/2}^{1/2} \mathfrak{F}_3^0(y, \zeta) d\zeta + \sum_{\pm} \mathfrak{G}_{\pm m}^h(y) &= 0, \quad y \in \omega_0, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (91)$$

Обеспеченная неравенством Корна (61)_[1] (см. также, например, [5, § 2]) оценка

$$\begin{aligned} h^2 \|\psi_3^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|\psi_m^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + h^3 \|\psi_3^h; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 + h \|\psi_m^h; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 \\ \leq C_0 E(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h) \end{aligned} \quad (92)$$

показывает, что модули всех скалярных произведений в (90), кроме содержащих $\mathfrak{F}_3^0$ и $\mathfrak{G}_{\pm 3}^0$, приобретают мажоранту ch^2 . В силу последнего условия ортогональности из (91), выполненного для собственной пары $\{M_k^{\mp}; \mathbf{w}_3^0\}$ задачи (12), в сумме скалярных произведений с указанными ингредиентами возможна замена пробной функции ψ_3^h разностью $\psi_3^{h\perp} = \psi_3^h - \bar{\psi}_3^h$, где $\bar{\psi}_3^h$ — среднее ψ_3^h по отрезку $(0, h) \ni z$. В итоге неравенство Пуанкаре приводит к оценке

$$\begin{aligned} h^{-2} \|\psi_3^{h\perp}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + h^{-1} \|\psi_3^{h\perp}; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 \\ \leq c \|\partial_z \psi_3^{h\perp}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 = c \|\partial \psi_3^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 \leq CE(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h), \end{aligned}$$

благодаря которой рассматриваемая сумма получает ту же мажоранту. Нужная оценка для выражения $\mathfrak{I}''(\psi^h)$ сомнений не вызывает. Для обработки выражения $\mathfrak{I}'(\psi^h)$ требуются только что проведенные выкладки при учете уравнения (62), суженного на подобласть $\text{supp } \mathfrak{X}_0^h \subset \omega_0^{\bullet}$, причем замена $\mathfrak{X}^h \mapsto \mathfrak{X}_0^h$ (см. определения (80)) вызывает малую погрешность $O(h^4)$.

Наконец, рассмотрим разности $E(\mathfrak{r}_0^j \widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}, \psi^h; \Omega_0^h) - E(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}, \mathfrak{r}_0^j \psi^h; \Omega_0^h)$. Коммутаторы, включающие срезку $\mathfrak{r}_0^j$ и первое слагаемое из представления (32), уже учтены в правой части уравнения из задачи (83), а интегралы от тех, в которых присутствует затухающий остаток $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}$, согласно неравенствам (33)

оцениваются следующей величиной:

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta_j^h(R_0)} (|\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j)| |\varepsilon(\psi^h(x))| + |\varepsilon(\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j))| |\psi^h(x)|) dx \\ & \leq c_j \left(\left(\int_{\Theta_j^h(R_0)} \rho_j^{-2} dx \right)^{1/2} E(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\Theta_j^h(R_0)} \rho_j^{-4} dx \right)^{1/2} \|\psi^h; L^2(\Omega_0^h)\| \right) \leq Ch^{5/2}. \end{aligned}$$

Здесь $\Theta_j^h(R_0) = \{x \in \Omega_0^h : R_0^{-1}r_j \in (1, 2), z \in (0, h)\}$ — трехмерное кольцо объемом $O(h)$, а в конце цепочки использовано неравенство (92).

После переноса срезок жесткие смещения (включая последние слагаемые из суммы (84)) аннулируются в функционале энергии, т. е. в нем неучтенными остаются слагаемые, которые после перехода к растянутым координатам помещаем как слагаемое $\mathbf{F}_0^{m+3}(\Psi^h)$ в правую часть интегрального тождества, обслуживающего (неоднородную) задачу (11) для $\hat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}$ (см. [1, разд. 5]):

$$E(\hat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}, \Psi^h; \Xi^j) = \mathbf{F}_0^{m+3}(\Psi^h) + \mathbf{F}_j^{m+3}(\Psi^h). \quad (93)$$

Пробная вектор-функция $\Xi^j \ni \xi^j \mapsto \Psi^h(\xi^j) = \psi^h(P^j + h\xi^j)\mathbf{r}_0^j(h\eta^j)\mathbf{r}_j^0(h\zeta)$ имеет компактный носитель, а последнее слагаемое возникло в результате переноса срезки $\mathfrak{X}_j^h$ от члена $\frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0)$ формулы Тейлора для главного члена в первой сумме из (84). Оставшийся интеграл, включающий коммутатор с названными срезкой и членом, не превосходит суммы таких величин:

$$\begin{aligned} & c \int_{\mathbf{Q}_j^h} \left(\sum_{l=0}^3 h^{l-1} \sum_{k=0}^{1+l} |\partial_z^{l+1-k} \mathfrak{X}_j^h(z)| \left| \partial_z^k \left(w_{(q)m}^j(z) - \frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0) \right) \right| |\varepsilon(\psi^h; x)| \right. \\ & \quad \left. + \left| \sigma \left(\mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \left(w_{(q)m}^j(z) - \frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0) \right) \right) \right| |\psi^h(x) \partial_z \mathfrak{X}_j^h(z)| \right) dx \\ & \leq c_j (\text{mes}_3 \mathbf{Q}_j^h)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-2} \max_{h \leq |z| \leq 2h} |z|^{(3-k)+} + h^2 h^{-1} (1 + |\ln h|) \right) \\ & \leq C_j h^{5/2} (1 + |\ln h|). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{Q}_j^h = \omega_j^h \times (-2h, -h) \subset \mathbb{T}_j^j$ — цилиндр, на котором компоненты тензора напряжений $\sigma(\mathbf{W}_{(j)}^h(\dots); \eta^j, z)$ суть $O(h|z|)$. Кроме того, использованы неравенства (87) и $|\partial_z \mathfrak{X}_j^h(z)| \leq ch^{-1}$. При обработке аналогичных интегралов, содержащих слагаемое $h^{1/2}(\dots)$ порядка $|z|^2$ из членов первой суммы в (84), приобретаем коэффициент $h^{1/2}$, но теряем множитель h при обработке компонент тензора напряжений. В итоге все-таки получаем приемлемую мажоранту $C_j h^2 (1 + |\ln h|)$.

В связи с интегральным тождеством (93) укажем, что интегралы, появляющиеся вследствие коммутирования со срезкой $\mathfrak{r}_j^0$, оцениваются суммой экспоненциально малой величины, порожденной остатком $\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}$ в представлении

(32), и величины, не превосходящей

$$\begin{aligned} ch \|\sigma(\mathbf{W}_{(j)}^h(\mathbf{x}_j^0(d'\mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} + d^6\mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}); L^2(\Omega_j^h))\| \|\varepsilon(\psi^h); L^2(\Omega_j^h)\| \\ \leq ch(\text{mes}_3 \Omega_j^h)^{1/2} h E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) = Ch^3. \end{aligned}$$

Еще одно следствие (87) неравенства Корна (71)_[1]

$$\begin{aligned} h^{-\delta_{3,l}} \|\psi_l^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ + \|\nabla_y \psi_l^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_j h^{-2} (1 + |\ln h|) E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h), \quad l = 1, 2, 3, \quad (94) \end{aligned}$$

обеспечивает мажоранту

$$c_{mj} h h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) h \|\psi^h; L^2(\Omega_j^h)\| \leq C_{mj} h^{5/2} (1 + |\ln h|)$$

для сопутствующих скалярных произведений, содержащих спектральный параметр.

Для последней пары жестких смещений в формуле (84) модуль суммы

$$\begin{aligned} h^{-1/2} h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) (\mathbf{x}_j^h(\mathfrak{d}_j^h + h\mathfrak{d}_j'), \psi^h)_{\Pi^h} \\ + h^{5/2} |\omega_j| \sum_{m=1}^2 M_k^{\mathbb{F}} \frac{\partial \mathbf{w}_3^{0q}}{\partial y_m^j} (P^j) \int_{-\ell_j}^0 (1 - \chi(-\zeta)) z \bar{\psi}_m^h(z) dz \quad (95) \end{aligned}$$

не превосходит привычной величины $ch^2(1 + |\ln h|)$. При этом $\bar{\psi}_m^h(z)$ — среднее функции $\psi_m^h(\cdot, z)$ по сечению $\omega_j^h \ni y^j$, для которого верна формула

$$\|\psi_m^h - \bar{\psi}_m^h; L^2(\Omega_j^h)\| \leq c_j h \|\nabla_{y^j} \psi_m^h; L^2(\Omega_j^h)\|.$$

Помимо оценок (87), позволяющих поместить под интеграл срезку $1 - \chi(-\zeta)$, мажоранта получена при учете неравенства (94).

В итоге осталось необработанным выражение с пробной вектор-функцией $\mathfrak{X}_j^h \psi^h$, обращающейся в нуль на торце $\omega_j^h(0)$, после интегрирования по частям аналогично формулам (89), (90) представим его как сумму скалярных произведений $\mathfrak{I}_h^{j0}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{j'}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{j''}(\psi^h)$. Укажем и оценим первое из них:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_h^{j0}(\psi^h) &= \sum_m^2 a_{jm}^{\mathbb{F}q} ((L(\nabla_x) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}) \mathbf{W}_{(q)j}^h(\cdot, \partial_z) w_{(q)m}^j e_{(m)}^j, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Omega_j^h} \\ &\quad + (B^\pm(\nabla_x) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \partial_z) w_{(q)m}^j e_{(m)}^j, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Sigma_j^h} + \dots \\ &=: (\mathfrak{F}^{jh}, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Omega_j^h} + \sum_{\pm} (\mathfrak{G}^{hj}, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Sigma_j^h} + \dots \end{aligned}$$

Здесь $\Sigma_j^h = \partial \omega_j^h \times (-\ell_j, 0)$ — боковая поверхность стержня, а многоточием обозначены интегралы по торцу $\omega_j^h(-\ell_j)$, которые в силу второго из краевых условий (18) и простых следствий неравенства Корна (71)_[1] мажорируются величиной $c_j h^2 (1 + |\ln h|)$. Процедура понижения размерностей (см., например, [6, гл. 5]) предоставляет вполне аналогичные (91) соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_m^{hj}(\eta^j, z) &= h \mathfrak{F}_m^{0j}(\eta^j, z) + O(h^3), \quad \mathfrak{G}_m^{hj}(\eta^j, z) = h^2 \mathfrak{G}_m^{0j}(\eta^j, z) + O(h^4), \quad m = 1, 2, \\ \mathfrak{F}_3^{hj}(\eta^j, z) &= O(h^2), \quad \mathfrak{G}_3^{hj}(\eta^j, z) = O(h^3), \end{aligned}$$

$$\int_{\omega_j} \mathfrak{F}_m^{0j}(\eta^j, z) d\eta^j + \int_{\partial\omega_j} \mathfrak{G}_m^{0j}(\eta^j, z) ds_{\eta^j} = 0, \quad z \in \Upsilon_j.$$

Уравнение (16) для собственной пары $\{M_k^\mp; w_{(q)m}^j\}$ и последние условия ортогональности позволяют сделать замену $\psi_m^h \mapsto \psi_m^h - \overline{\psi}_m^h$ и применить неравенство Пуанкаре на малом сечении ω_j^h , дающее дополнительный множитель h . В результате оценка первой нормы из неравенства (94) при $l = 1, 2$ обеспечивает нужную мажоранту $c_{jm}h^2(1 + |\ln h|)$. Остальная часть рассматриваемого выражения обрабатывается при помощи того же неравенства, например,

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{F}_3^{hj}, \mathfrak{F}_3^h)_{\Omega_j^h} + (\mathfrak{G}_3^{hj}, \mathfrak{G}_3^h)_{\Sigma_j^h}| &\leq c_j (h^2 (\text{mes}_3 \Omega_j^h)^{1/2} \|\psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\| \\ &\quad + h^3 (\text{mes}_2 \Sigma_j^h)^{1/2} h^{-1/2} (\|\psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\| + h \|\nabla_{y^j} \psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\|)) \\ &\leq C_j h^{5/2} (1 + |\ln h| + h^2). \end{aligned}$$

Аналогично поступаем со слагаемыми $\mathfrak{F}_h^{j'}(\psi^h)$ и $\mathfrak{F}_h^{j''}(\psi^h)$, причем из первого нужно еще вычесть второй член суммы (95) для того, чтобы сформировать уравнение (64) для пары $\{M_q^{\mp'}; w_{(q)m}^{j'}\}$.

Просмотрев полученные оценки, видим, что величина (85) не превосходит $c_q \|\mathbf{u}_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} (1 + |\ln h|)$. Кроме того, повторив с серьезными упрощениями проведенные выкладки, находим, что

$$|\langle \mathbf{u}_q^h, \mathbf{u}_p^h \rangle_h - h^2 M_k^\mp \delta_{p,q}| \leq c_{qp} h^{5/2} (1 + |\ln h|), \quad q, p = k, \dots, k + \varkappa - 1, \quad (96)$$

и, следовательно, $\|\mathbf{u}_q^h; \mathcal{H}^h\| \geq h M_k^\mp / 2$ при малом $h > 0$. В итоге лемма 1 предоставляет собственные числа $\tau_{N_q^h}^h$ оператора $\mathcal{T}^h$ и $\Lambda_{N_q^h}^h = 1/\tau_{N_q^h}^h$ задачи (4)–(6), для которых верны соотношения

$$|\tau_{N_q^h}^h - T_q^h| \leq C_q h^{-1} (1 + |\ln h|),$$

$$|\Lambda_{N_q^h}^h - h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})| \leq C_q h (1 + |\ln h|) (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'}) \Lambda_{N_q^h}^h.$$

Таким образом,

$$\Lambda_{N_q^h}^h \leq 2h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})$$

в случае $C_q h (1 + |\ln h|) (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'}) \leq 1/2$. В итоге при подходящих положительных c_q и h_q получаем финальную формулу

$$|\Lambda_{N_q^h}^h - h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})| \leq c_q h^3 (1 + |\ln h|) \text{ при } h \in (0, h_q]. \quad (97)$$

Теорема 2. Для каждого $q \in \mathbb{N}$ найдутся такие $c_q > 0$ и $h_k > 0$, что член Λ_q^h последовательности (9) удовлетворяет соотношению (97), в котором $N_q^h = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось по обычной схеме проверить два факта: во-первых, отображение $q \mapsto N_q^h$ можно сделать мономорфизмом и, во-вторых, $N_q^h = q$ в формуле (97).

В принятых ограничениях на собственное число $M_k^\mp$ построены «почти собственные» векторы $U_{(k)}^h, \dots, U_{(k+\varkappa_k^\mp-1)}^h$, т. е. вторая часть леммы 1, в которой $\epsilon_{k*}^h = \theta^{-1} h^{-1} (1 + |\ln h|) \max\{C_k, \dots, C_{k+\varkappa_k^\mp-1}\}$ в согласии с формулами (78) и $\theta \in (0, 1)$, предоставляет нормированные столбцы $\mathcal{C}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{C}_{(k+\varkappa_k^\mp-1)}^h \in$

$\mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h}$ (выравниваем их высоты добавлением нулевых элементов). Пусть еще $\mathcal{S}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{S}_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$ — соответствующие линейные комбинации ортонормированных собственных векторов $\mathcal{U}_{N_k^h}^h, \dots, \mathcal{U}_{(N_k^h+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$. Первая формула (78) и соотношения (96), которые применяем дважды: сначала для вычисления асимптотик норм, а затем и скалярных произведений, показывают, что

$$\begin{aligned} |(\mathcal{C}_{(q)}^h)^\top \mathcal{C}_{(p)}^h - \delta_{p,q}| &= |\langle \mathcal{S}_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h \rangle_h - \delta_{p,q}| \\ &\leq |\langle \mathcal{S}_{(p)}^h - U_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h \rangle_h| + |\langle U_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h - U_{(q)}^h \rangle_h| \\ &\quad + |\langle U_{(p)}^h, U_{(q)}^h \rangle_h - \delta_{p,q}| \leq 2\theta + 2\theta + h^{1/2}(1 + |\ln h|)c_{pq}. \end{aligned}$$

Итак, при малых $h > 0$ и $\theta > 0$ столбцы $\mathcal{C}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{C}_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$ «почти ортонормированы» в пространстве $\mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h}$, а значит, $\mathcal{K}_k^h \geq \mathcal{K}_k^{\mathbb{F}}$, в чем и требовалось убедиться, так как дополнительный множитель θ^{-1} в неравенстве для разности $\tau_{N_q^h}^h - T_q^h$ не сказывается на выводе формулы (96). Следовательно, $q \leq N_q^h$ и верна оценка

$$\Lambda_q^h \leq \Lambda_{N_q^h}^h \leq C_k(h) := h^2 M_k^{\mathbb{F}} + h^{5/2} M_q^{\mathbb{F}'} + c_q h^3 (1 + |\ln h|), \quad (98)$$

которая обеспечивает соотношение (67) из разд. 7. Теперь можно применить теорему 1. В предположении $N_q^h > q$ обнаруживаем бесконечно малую положительную последовательность $\{\mathbf{h}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, для которой существуют собственные числа $\Lambda_{\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m}}^{\mathbf{h}_m} \leq C_k(h)$ задачи (4)–(6) с соответствующими собственными вектор-функциями $u_{(\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m})}^{\mathbf{h}_m}$, ортогональными в пространстве $L^2(\Pi^h)$ собственным вектор-функциям $u_{(1)}^h, \dots, u_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$. В результате сходимости (73) гарантируют, что, во-первых, $\lim h^{-2} \Lambda_{\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m}}^{\mathbf{h}_m} \leq M_k^{\mathbb{F}}$ и, во-вторых, пределы функций (69), найденных по $u_{(\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m})}^{\mathbf{h}_m}$, образуют собственную вектор-функцию совокупности предельных задач (12) и (16), (18), ортогональную в $L^2(\omega_0) \times L^2(\Upsilon_1) \times \dots \times L^2(\Upsilon_J)$ собственным вектор-функциям этих же задач в количестве $k + \mathcal{K}_k^{\mathbb{F}} - 1$ штук, отвечающих собственным числам из полуинтервала $(0, M_k^{\mathbb{F}}]$. Этот вывод противоречит способу построения упорядоченной последовательности $\wp^{\mathbb{F}} = \{M_k^{\mathbb{F}}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Теорема доказана.

Вторая часть леммы 1 также дает возможность обосновать асимптотику собственных вектор-функций задачи (4)–(6). Используемые конструкции (81) и (84) включают много «лишних» членов, введенных по технической надобности. Кроме того, произвол в выборе собственных векторов матрицы (66) усложняет формулировку соответствующих асимптотических формул. Поэтому ограничимся рассмотрением простого собственного числа $M_k^{\mathbb{F}} \in \wp^{\mathbb{F}}$ и формулировки оценки «слабой» нормы, позволяющей исключить все пограничные слои.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{K}_k^{\mathbb{F}} = 1$ и $(a_k^0, a_k^{11}, a_k^{12}, \dots, a_k^{J1}, a_k^{J2})^\top$ — дополненный по соглашению из разд. 5 нулями и нормированный в $\mathbb{R}^{1+2J}$ собственный вектор матрицы (66), отвечающий ее собственному числу $M_k^{\mathbb{F}}$. При некоторых положительных величинах $c_k^{\mathbb{F}}$ и $h_k^{\mathbb{F}}$ собственная вектор-функция $u_{(k)}^h$ задачи (4)–(6), подчиненная условию (10), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|u_{(k)}^{h0} - a_k^0 w_{(i_k)3}^0 e_{(3)}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|u_{(k)}^{hj} - a_k^{jm} w_{(i_{jm})m}^j e_{(m)}^j; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ \leq c_k^{\mathbb{F}} h (1 + |\ln h|)^2 \quad \text{при } h \in (0, h_k^{\mathbb{F}}]. \end{aligned}$$

9. Три замечания. 1°. Модификация асимптотического анализа. Если условие Дирихле (5) распространить и на нижние торцы $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней, то предельная задача на области ω_0 изменится: из-за жесткости стержней на продольное растяжение/сжатие к соотношениям (12) добавятся корректные ввиду теоремы Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости точечные условия

$$w_3^0(P^j) = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

При этом приходится пересмотреть все асимптотические конструкции и процедуру их обоснования. Иные модификации нужны в случае переноса краевых условий Неймана (6) на кромку Γ_0^h пластины. Такие способы крепления будут разобраны автором в последующих публикациях.

В случае анизотропных или неоднородных материалов пластины и стержней асимптотические анзацы (22) и (24) для собственных чисел сохраняются, однако предельные задачи в области ω_0 и на отрезках Υ_j не распадаются на независимые пару (12), (13) и четверку (16), (17) скалярных уравнений. В частности, изгибные колебания пластины и стержней сопровождаются их продольными деформациями. Это обстоятельство приводит к существенным изменениям в строении внутренних асимптотических разложений собственных вектор-функций около торцов $\omega_j^h(0)$, $j = 1, \dots, J$. Хотя спектральные задачи для анизотропных, даже композитных одиночных пластин и стержней с переменными сечениями исследованы в полном объеме (см., например, [6, гл. 7]), их сочленения вида Π^h никогда не анализировались.

2° ЗАОСТРЕНИЕ КОНЦОВ СТЕРЖНЕЙ. Как упоминалось в [1, разд. 9], конические заострения ($H_j(-\ell_j) = 0$ и $\partial_{z_j} H_j(-\ell_j) > 0$) нижних концов стержней

$$\Omega_j^h = \{x : h^{-1}H(z)^{-1}y^j \in \omega_j, \quad z \in (-\ell_j, 0]\}, \quad (99)$$

где $H_j \in C^\infty(\overline{\Upsilon_j})$, $H_j(z) > 0$ при $z \in (-\ell_j, 0]$, не оказывают существенного влияния на асимптотический анализ статической задачи теории упругости для сочленения Π^h . Этот вывод сохраняется и для спектральной задачи (4)–(6), так как вырождение коэффициентов дифференциальных уравнений (16) сопровождается появлением дополнительных множителей $O(|\ell_j + z|^2)$ при спектральном параметре в их правых частях. Вместе с тем, если хотя бы одно заострение пикообразное, т. е. $H_j(-\ell_j) = \partial_{z_j} H_j(-\ell_j) = 0$ для профиля (99), то возникает эффект «черной дыры» для упругих волн [24, 25] и, в частности, перестает быть верным неравенство Корна в области Ω^h , а спектр задачи теории упругости приобретает непрерывную компоненту (см. [26, 27, 16]). Даже в случае затупленного острия согласно [25] собственные числа задачи для упругого тела Π^h приобретают «странное поведение» при $h \rightarrow +0$.

3°. Младшие члены асимптотики. В разд. 4 и 5 были продемонстрированы приемы построения младших членов асимптотик собственных чисел и вектор-функций задачи (4)–(6), относящиеся к частным случаям, но описывающие всевозможные осложнения — разнообразные пограничные слои, аналитическую зависимость поправок от параметра $|\ln h|^{-1}$ и пр.

В [6, гл. 7] в формулах для собственных чисел задач об одиночных пластинах и стержнях получены оценки остатков, в которых явно выделена зависимость мажорант от кратности предельного собственного числа $M_k^\mp$ и его номера k в последовательности $\wp^\mp$. Этот результат показывает, что привлечение младших членов чрезвычайно увеличивает мажоранту и одновременно уменьшают зону действия асимптотических формул, так что использование более

одного поправочного члена вряд ли целесообразно в исследованиях, имеющих прикладную направленность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров С. А. Деформация тонкой упругой зажатой по краю пластины с прикрепленными стержнями. 1. Статическая задача // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 3. С. 481–505.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
5. Назаров С. А. Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.
6. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
7. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.
8. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É. Coques elastiques mines. Propriétés asymptotiques. Paris: Masson, 1997.
9. Panassenko G. Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.
10. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
11. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
12. Назаров С. А. Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое // Тр. Моск. мат. о-ва. 1998. Т. 60. С. 3–97.
13. Ван Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
14. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
15. Зорин И. С., Назаров С. А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.
16. Kozlov V., Nazarov S. A. On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 9/10. P. 887–944.
17. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
18. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.
19. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
21. Dauge M., Gruais I. Edge layers in thin elastic plates // Comput. Methods Appl. Mechanics Engin. 1998. V. 157, N 3-4. P. 335–347.
22. Panassenko G. P. Asymptotic analysis of bar systems. 1 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 3. P. 325–352.
23. Назаров С. А. Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 345–364.
24. Миронов М. А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акустический журн. 1988. Т. 34, № 3. С. 546–547.
25. Назаров С. А. Концентрация собственных частот упругих тел с затупленным пикообразным заострением // Акустический журн. 2022. Т. 68, № 3. С. 249–260.
26. Назаров С. А. О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1105–1127.

27. Бахарев Ф. Л., Назаров С. А. О структуре спектра задачи теории упругости для тела со сверхострым пиком // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 746–756.

Поступила в редакцию 14 ноября 2024 г.

После доработки 14 ноября 2024 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)

Институт Проблем Машиноведения РАН,

лаборатория «Математические методы механики материала»,

ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178

srgnazarov@yahoo.co.uk, srgnazarov108@gmail.com