Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 512.542

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОРАДИКАЛАХ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В. С. Монахов

Аннотация. Получен положительный ответ на вопрос, предложенный в работе Т. И. Васильевой и А. Г. Коранчук «Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов». Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.410

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, нормализатор, корадикал, субнормальная подгруппа.

1. Введение

Силовским нормализатором конечной группы принято называть нормализатор силовской подгруппы. Наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$-корадикалом группы G и обозначается символом $G^{\mathfrak{X}}$. Для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$-корадикал группы называется *нильпотентным корадикалом.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Т. И. Васильева и А. Г. Коранчук [1, теорема A] доказали, что $\mathfrak{X}$-корадикал конечной группы нильпотентен тогда и только тогда, когда все силовские нормализаторы разрешимы и $\mathfrak{X}$-корадикал любого силовского нормализатора является субнормальной подгруппой. Для конечных разрешимых групп с $\mathbb{P}$-субнормальными нильпотентными корадикалами всех силовских нормализаторов они получили критерий сверхразрешимости, [1, предложение 1]. Кроме того, в их работе сформулирован

Вопрос. *Можно ли в теореме* A *и в предложении* 1 *убрать условие разрешимости?*

В настоящей статье получен положительный ответ на этот вопрос.

Все обозначения и терминология, как в [1, 2].

2. К теореме A работы [1]

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация, состоящая из нильпотентных групп. $\mathfrak{X}$-корадикал конечной группы G нильпотентен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-корадикал каждого силовского нормализатора является субнормальной в G подгруппой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$-корадикал группы G нильпотентен. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Согласно [2, IV.1.16; IV.3.4(b)] формация $\mathfrak{X}$ наследственная, а $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № Ф24КИ–021.

наследственная насыщенная формация. Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}} \leq G^{\mathfrak{X}}$ и $G^{\mathfrak{X}}$ — нормальная в G нильпотентная подгруппа, то $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G. Это верно для любого $r \in \pi(G)$, поэтому необходимость выполняется.

Обратно, пусть $\mathfrak{X}$-корадикал каждого силовского нормализатора группы G является субнормальной подгруппой в G. Требуется доказать, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 6] каждая фактор-группа удовлетворяет условиям теоремы. По индукции подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ равна 1 и в G имеется единственная минимальная подгруппа, которую обозначим K.

Случай 1. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ равна 1.

По условию $A = N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G. Так как A p-замкнута, то ее силовская p-подгруппа A_p субнормальна в G. Поэтому $A_p \leq O_p(G) = 1$ и A — p'-подгруппа. Поскольку $N_G(G_p)/A$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ — p-разложимая подгруппа. Это верно для любого $p \in \pi(G)$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3, теорема 2] группа G нильпотентна; противоречие.

Случай 2. $1 \neq F(G) = K = O_q(G) = C_G(O_q(G))$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа для некоторого $q \in \pi(G)$.

Ясно, что в G существует максимальная в G подгруппа такая, что $M_G = 1$ и $G = K \rtimes M$. Так как условия теоремы наследуют фактор-группы, по индукции $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, в частности, группа G разрешима и в G есть q'-холлова подгруппа $G_{q'} \leq M$.

Пусть $r \in \pi(G_{q'})$ и $G_r \leq G_{q'}$. По условию $B = N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G. Так как B r-замкнута, ее силовская r-подгруппа B_r субнормальна в G. Поэтому $B_r \leq O_r(G) = 1$ и B — r'-подгруппа. Поскольку $N_G(G_r)/B$ нильпотентна, то $N_G(G_r)$ — r-разложимая подгруппа. Так как $N_{G_{q'}}(G_r) = N_G(G_r) \cap G_{q'}$, то $N_{G_{q'}}(G_r)$ — r-разложимая подгруппа. Это верно для любого $r \in \pi(G_{q'})$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3, теорема 2] подгруппа $G_{q'}$ нильпотентна.

Так как $K = O_q(G)$, то $O_q(M) = 1$ и $F(M) \leq G_{q'}$. Поскольку $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, то $M/F(M)$ нильпотентна, $G_{q'}$ нормальна в M и $F(M) = G_{q'}$. Теперь $M = G_{q'} \rtimes M_q$ и $M = N_G(G_r)$ для каждого $r \neq p$. По условию $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G. Поэтому $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}} \leq M_G = 1$, $N_G(G_r) = M \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $M_q = 1$ и $G = K \rtimes M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Теорема 1 доказана.

При $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ из теоремы 1 вытекают следующие два результата.

Следствие 1.1. *Конечная группа метанильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентные корадикалы всех силовских нормализаторов являются субнормальными подгруппами.*

Следствие 1.2. *Конечная группа имеет нильпотентный коммутант тогда и только тогда, когда коммутанты всех силовских нормализаторов являются субнормальными подгруппами.*

Таким образом, теорема 1 и ее следствия убирают условия разрешимости в теореме A и ее следствиях A1, A2, A3 работы [1].

Так как в конечной группе нормализаторы силовских p-подгрупп сопряжены, то сопряжены и их нильпотентные корадикалы. Известно, что подгруппа, перестановочная со своими сопряженными, является субнормальной подгруппой [4, 2.6]. Поэтому из теоремы 1 вытекают также следующие два новых результата.

Следствие 1.3. *Если в конечной группе G для каждого $p \in \pi(G)$ нильпотентные корадикалы нормализаторов силовских p-подгрупп перестановочны между собой, то G метанильпотентна.*

Следствие 1.4. *Если в конечной группе G для каждого $p \in \pi(G)$ коммутанты нормализаторов силовских p-подгрупп перестановочны между собой, то коммутант группы G нильпотентен.*

3. К предложению 1 и теореме B

Пусть $\mathfrak{D}$ — класс всех конечных групп, обладающих силовской башней сверхразрешимого типа [2, с. 359]. Класс $\mathfrak{D}$ является наследственной насыщенной радикальной формацией. Каждая конечная сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ и все включения собственные. Здесь $\mathfrak{U}$ — класс всех конечных сверхразрешимых групп.

В условиях предложения 1 [1] предполагалась разрешимость группы и для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ вводились ограничения: $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. В следующей теореме условие разрешимости группы не требуется и расширен диапазон для формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 4] и [5, лемма 1.8 (1)] условия теоремы наследуют фактор-группы. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, то $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа, которую обозначим через K.

Случай 1. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ равна 1.

Пусть p — наибольшее в $\pi(G)$. Так как группа G неразрешима, то $p \geq 5$. Поскольку $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ p-замкнута и $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то согласно [6, лемма 2] силовская p-подгруппа A из $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G. Значит, $A \leq O_p(G) = 1$ и $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ p'-подгруппа. Так как $N_G(G_p)/N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ p-разложима. Согласно [7, теорема 1.1(2)] фактор-группа $G/O_{p'}(G)$ разрешима, в частности, $K \leq O_{p'}(G)$. По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$, поэтому KG_p нормальна в G. По лемме Фраттини $G = KN_G(G_p)$ и в G имеется нормальная p'-холлова подгруппа $G_{p'}$.

Проверим, что для $G_{p'}$ выполняются условия теоремы. Пусть $r \in \pi(G_{p'})$ и $G_r \leq G_{p'}$. Ясно, что $N_{G_{p'}}(G_r) = N_G(G_r) \cap G_{p'}$ и $N_{G_{p'}}(G_r)$ нормальна в $N_G(G_r)$. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}$ — наследственные формации, а $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ по условию теоремы, то $N_{G_{p'}}(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$. Поскольку $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в $N_G(G_r)$ и $N_G(G_r)$ разрешима, то $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ [5, лемма 1.9(3)]. По условию $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G, значит, и подгруппа $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $G_{p'}$ нормальна в G, то $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в $G_{p'}$, [5, лемма 1.8(1)]. Поскольку r — произвольное из $\pi(G_{p'})$, то для $G_{p'}$ выполняются все условия теоремы. По индукции $G_{p'} \in \mathfrak{F}$ и $K = 1$; противоречие.

Случай 2. $1 \neq F(G) = K = O_q(G) = C_G(O_q(G))$ для некоторого $q \in \pi(G)$.

По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$, поэтому G разрешима. Проверим, что для каждой холловой подгруппы группы G выполняются условия теоремы. Пусть H — холлова подгруппа группы G и $G_r \leq H$. Ясно, что $N_H(G_r) = N_G(G_r) \cap H$. Так как

$\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}$ — наследственные формации, а $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ по условию, то $N_H(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$. Подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G, поэтому $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$ $\mathbb{P}$-субнормальна в H [5, лемма 1.9(1)]. Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H \leq N_G(G_r) \cap H = N_H(G_r)$, а $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ нормальна в $N_H(G_r)$, то $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ нормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$. Теперь $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$, а значит, $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в H. Поскольку r — произвольное из $\pi(H)$, то условия теоремы наследуют все холловы подгруппы группы.

Если $|\pi(G)| > 2$, то по индукции каждая в G холлова бипримарная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$, поэтому G принадлежит $\mathfrak{D}$. Так как в G есть нормальная силовская подгруппа и по условию ее нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $G = G_pG_q$. По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$. Если $q > p$, то G_q нормальна в G и $G = N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$. Остался случай $q < p$. Пусть M — максимальная в G подгруппа, для которой $G = K \rtimes M$. Так как $M \cong G/K \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$, то $M = M_p \rtimes M_q$ и $M = N_G(M_p) \in \mathfrak{F}$, поскольку M_p — силовская в G подгруппа. По условию $M^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $M^{\mathfrak{N}} \leq G_p$, то $M^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G [6, лемма 2]. Поэтому $M^{\mathfrak{N}} = 1$, $M = M_p$, $K = G_q$ и $G = N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Конечная группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G для каждого $r \in \pi(G)$.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, то каждая ее подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна [5, лемма 1.1(2)]. Так как $\mathfrak{F}$ наследственная, то $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ для каждого $r \in \pi(G)$. Обратно, пусть $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G для каждого $r \in \pi(G)$. Так как $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{D}$, то применима теорема 2, по которой $G \in \mathfrak{F}$.

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ получаем

Следствие 2.2. *Конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$-субнормален в G.*

Таким образом, следствия 2.1 и 2.2 убирают условие разрешимости в предложении 1 и следствии 1 работы [1]. Согласно следствию 2.1 при $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$ теорема 2 допускает обращение. Для $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$ это не так.

Пример. Группа $G = (C_5 \times C_5) \rtimes (C_3 \rtimes C_4)$ [9, SmallGroup(300,13)] и ее силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{D}$. Здесь C_n — циклическая группа порядка n. Однако $N_G(G_3)^{\mathfrak{N}} = G_3$ не $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

Формация $\mathfrak{D}$ кроме $\mathfrak{U}$ содержит еще три наследственные насыщенные формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$, причем $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U} \subset \mathrm{sh}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ [6]. Группы, принадлежащие формациям $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$, называют w-*сверхразрешимыми*, v-*сверхразрешимыми* и sh-*сверхразрешимыми* соответственно. Для каждой из этих трех формаций из теоремы 2 вытекают следующие новые результаты.

Следствие 2.3. *Если в конечной группе G любой силовский нормализатор* w-*сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$-субнормален в G, то G* w-*сверхразрешима.*

Следствие 2.4. *Если в конечной группе G любой силовский нормализатор* v-*сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$-субнормален в G, то G* v-*сверхразрешима.*

Следствие 2.5. *Если в конечной группе G любой силовский нормализатор* sh-*сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$-субнормален в G, то G* sh-*сверхразрешима.*

Следствие 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 6] каждая фактор-группа удовлетворяет условиям следствия. По индукции $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная подгруппа, которую обозначим K.

Предположим, что $F(G) = 1$. По условию $H = N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G. Так как H p-замкнута, то ее силовская p-подгруппа H_p субнормальна в G. Поэтому $H_p \leq O_p(G) = 1$ и H — p'-подгруппа. Поскольку $N_G(P)/H$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ — p-разложимая подгруппа. Это верно для любого $p \in \pi(G)$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3] группа G нильпотентна; противоречие.

Значит, $F(G) \neq 1$. По индукции $G/F(G) \in \mathfrak{F}$, в частности, группа разрешима. Но в разрешимых группах субнормальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны [5, лемма 1.9(3)]. Остается применить теорему 2.

Следствие 2.6 расширяет диапазон для формации $\mathfrak{F}$ из достаточности теоремы B работы [1].

Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ — нормальная подгруппа в $(N_G(G_r))'$, справедливо

Следствие 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)'$ субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B [10]. В этой ситуации подгруппу B называют *s-добавлением* к A в G. Если s-добавление B является разрешимой подгруппой, то полунормальная подгруппа A будет $\mathbb{P}$-субнормальной, поскольку A перестановочна с подгруппами композиционного ряда группы B.

Следствие 2.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ полунормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [10, лемма 2.1] все условия наследуют фактор-группы. Так как $G \notin \mathfrak{N}$, то существует $p \in \pi(G)$ такое, что $A = N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \neq 1$ [3, теорема 2]. Подгруппа A 2-нильпотентна и полунормальна в G. Согласно [10, теорема B(a)] подгруппа A^G разрешима. Значит, и группа G разрешима. Так как в разрешимых группах полунормальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, то $G \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.

Следствие 2.9. (1) *Если в конечной группе все силовские нормализаторы полунормальны, то группа сверхразрешима.*

(2) *Если в конечной группе любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален, то группа сверхразрешима.*

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть в группе G все силовские нормализаторы полунормальны. Условия наследуют все фактор-группы, поэтому $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа, которую обозначим K. Если K разрешима, то G разрешима. Теперь все силовские нормализаторы $\mathbb{P}$-субнормальны и G сверхразрешима согласно [8, теорема 3.1]. Далее считаем, что K неразрешима, поэтому $C_G(K) = 1$ и $F(G) = 1$.

Пусть p — наибольшее в $\pi(G)$, $A = N_G(G_p)$, B — s-добавление к A в G. Если $q \in \pi(G : A)$, то $q \in \pi(B)$ и в B существует подгруппа Q порядка q. По теореме Силова подгруппа G_p нормальна в подгруппе AQ, поэтому $Q \leq A$. Согласно [10, лемма 2.1 (c)] $Q^G \leq A$. Так как A p-замкнута, то Q^G p-замкнута и $O_p(Q^G) \leq O_p(G) \leq F(G) = 1$. Значит, Q^G — p'-подгруппа и $Q^G G_p = Q^G \times G_p$. Поскольку K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $K \leq Q^G$ и $G_p \leq C_G(K) = 1$; противоречие.

(2) Полагая $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ в следствии 2.8, получим требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева Т. И., Коранчук А. Г.* Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
3. *Баллестер-Болинше А., Шеметков Л. А.* О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 3–5.
4. *Isaacs I. M.* Finite group theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2008.
5. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
6. *Монахов В. С.* О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.
7. *Guralnick R. M., Malle G., Navaro G.* Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Am. Soc. 2003. V. 132, N 4. P. 973–979.
8. *Kniahina V. N., Monakhov V. S.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Intern. J. Group Theory. 2013. V. 2, N 4. P. 21–29.
9. A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2 [Electronic resource]. Mode of access: https://www.gap-system.org. Date of Access: 10.09.2023.
10. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26. P. 157–161.

Поступила в редакцию 9 января 2025 г.
После доработки 17 марта 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Монахов Виктор Степанович (ORCID 0000-0003-0977-7396)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
victor.monakhov@gmail.com