СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ
С ОПЕРАТОРОМ МОНЖА — АМПЕРА
И ЕЕ МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

А. А. Косов, Э. И. Семенов

Аннотация. Рассматриваются системы двух уравнений с оператором Монжа — Ампера, правые части которых могут зависеть от оператора Лапласа и градиента искомого функции. Для построения точных многомерных решений в случае, когда правые части содержат степенные или экспоненциальные функции неизвестных, предложен вариант метода редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены многомерные точные решения, выражаемые явным образом через суперпозицию квадратичных форм от пространственных переменных и элементарных функций. Приводится целый ряд примеров явных точных решений, в том числе глобальных положительных, анизотропных по пространственным переменным.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.409

Ключевые слова: система уравнений, оператор Монжа — Ампера, многомерные точные решения.

Введение

В [1] строились точные многомерные решения обобщенного уравнения Монжа — Ампера

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u), \quad (1)$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе n -го порядка, который будем также называть оператором Монжа — Ампера; ∇u — градиент; Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) есть n -мерный аналог уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}),$$

которое включает в себя как частный случай классическое уравнение Монжа — Ампера [2, 3]

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d,$$

и уравнение вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = G(x, y, u, u_x, u_y), \quad (2)$$

где $u \triangleq u(x, y)$ — искомая функция, $a \triangleq a(x, y, u, u_x, u_y)$, $b \triangleq b(x, y, u, u_x, u_y)$, $c \triangleq c(x, y, u, u_x, u_y)$, $d \triangleq d(x, y, u, u_x, u_y)$, $G(x, y, u, u_x, u_y)$ — заданные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты № 121041300058-1 и № 121032400051-9).

Уравнение (2) встречается в дифференциальной геометрии [4], в задачах газовой динамики и гидродинамики [5–8], а также многих других математических моделях естествознания. В справочниках [7, 8] приведены точные решения уравнения (2) для некоторых $G(x, y, u, u_x, u_y)$. Подробная сводка новых результатов по методу редукции и точным решениям для нестационарной версии уравнения Монжа — Ампера (2), которое встречается в магнитной гидродинамике, представлена в работах [9–11]. В [12, 13] получены условия линеаризации уравнения Монжа — Ампера контактными преобразованиями и построения инвариантов Лапласа. Уравнение Монжа — Ампера и его различные обобщения исследовались методами группового анализа в работах [14–16], где в ряде случаев были представлены точные решения. Важность исследования многомерного уравнения Монжа — Ампера связана с его различными приложениями, прежде всего в задачах дифференциальной геометрии [4, 17, 18]. Так, например, частный случай уравнения (1) вида $\det H(u) = \phi(\mathbf{x})$, где $\phi(\mathbf{x})$ — заданная функция, принимающая положительные значения, возникает в результате элементарного преобразования уравнения, вытекающего из знаменитой проблемы Минковского на замкнутых выпуклых гиперповерхностях в евклидовом $(n + 1)$ -мерном пространстве [19]. В [20, 21] отмечается, что априорные оценки в проблеме Минковского являются априорными для решения уравнения Монжа — Ампера (1) с функцией

$$f = \frac{1}{k(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Кроме того, многомерное уравнение Монжа — Ампера и его обобщения широко применяются в квантовой теории поля [15], гравитации [22, 23] и задачах оптимальной транспортировки [23–26].

В данной статье рассмотрим систему из двух уравнений с оператором Монжа — Ампера следующего вида:

$$\det H(u) = h_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v), \quad \det H(v) = h_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v), \quad (3)$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$, $v \triangleq v(\mathbf{x})$ — искомые функции переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H(u) = (\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j)$, $H(v) = (\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j)$ — матрицы Гессе n -го порядка; $\det H(u)$, $\det H(v)$ — определители матриц Гессе; $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ — заданные функции своих аргументов. Основной задачей является построение точных многомерных решений системы уравнений (3) с использованием квадратичной функции вида

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где A — вещественная числовая матрица размера $n \times n$. Ранее авторами квадратичная функция (4) успешно использовалась для построения точных многомерных решений систем уравнений реакции-диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [27, 28]. Отметим, что построение точных решений системы двух двумерных уравнений с оператором Монжа — Ампера рассматривалось в [29]. Такого рода системы возникают в задачах гидродинамики несжимаемых двухжидкостных сред [30].

2. Основные результаты

Для построения точных решений системы уравнений (3) нам понадобится формула, которая является результатом следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $T(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы A , задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, для гессиана функции $T(\xi) = T(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ справедлива формула

$$\det \left(\frac{\partial^2 T(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = \det A \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dT}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 T}{d\xi^2} \right], \quad (5)$$

где $\det A$ — определитель матрицы A .

Доказательство этой леммы приведено в [1]. Точные решения системы уравнений (3) будем отыскивать в следующем виде:

$$u(\mathbf{x}) = F(\xi), \quad v(\mathbf{x}) = G(\xi), \quad (6)$$

где аргумент ξ задается формулой (4), а условия на функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ аналогичны условиям на функцию $T(\xi)$, которые определены в лемме 1. Также наряду с формулами (6) будем использовать квадратичные функции (4) с различными матрицами A_1 , A_2 . А именно, решения системы (3) будем отыскивать так:

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \xi_1, \quad v(\mathbf{x}) = \beta \xi_2, \quad (7)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — некоторые постоянные, а ξ_1 , ξ_2 задаются квадратичными функциями

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(A_1 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(A_2 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Здесь A_1 , A_2 — симметричные матрицы размера $n \times n$.

Для решения поставленной задачи необходимо конкретизировать вид правых частей системы (3). В статье ограничимся несколькими видами функциональных зависимостей. Сперва уделим внимание случаю, когда h_1 , h_2 зависят только от искомым функций.

2.1. Случай, когда правые части зависят только от искомым функций. Положим $h_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \equiv f(u, v)$, $h_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \equiv g(u, v)$ и рассмотрим частный случай системы (3) вида

$$\det H(u) = f(u, v), \quad \det H(v) = g(u, v). \quad (9)$$

В силу формулы (5) на функциях (6) система в частных производных редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего вида:

$$\begin{aligned} \det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] &= f(F, G), \\ \det A \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dG}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 G}{d\xi^2} \right] &= g(F, G). \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Если правые части системы (9) являются степенными функциями своих аргументов следующих видов:

$$f(u, v) = \delta_1 u^{\mu_1} v^{\nu_1}, \quad g(u, v) = \delta_2 u^{\mu_2} v^{\nu_2}, \quad (11)$$

где $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 — вещественные параметры такие, что

$$\mu_1 - \mu_2 \neq n, \quad \nu_1 - \nu_2 \neq -n, \quad (12)$$

и для вычисленных по следующим формулам величин

$$p = \frac{n(n + \nu_1 - \nu_2)}{n^2 - n(\mu_1 + \nu_2) + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1}, \quad q = \frac{n(n - \mu_1 + \mu_2)}{n^2 - n(\mu_1 + \nu_2) + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \quad (13)$$

система уравнений

$$p^n(2p - 1)a^n - \delta_1 a^{\mu_1} b^{\nu_1} = 0, \quad q^n(2q - 1)b^n - \delta_2 a^{\mu_2} b^{\nu_2} = 0 \quad (14)$$

имеет положительное решение $a = \bar{a} > 0$, $b = \bar{b} > 0$, то система уравнений (9) с оператором Монжа — Ампера имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \bar{a} \left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^p, \quad v(\mathbf{x}) = \bar{b} \left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^q, \quad (15)$$

где A — произвольная симметричная положительно определенная матрица с определителем, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего поясним смысл условий (12) теоремы. Если в (12) оба неравенства нарушаются, обращаясь в равенства, то в (13) числители и знаменатели обращаются в нуль, что недопустимо. Если только одно неравенство в (12) обращается в равенство, то формулы (15) дадут только тривиальные постоянные решения системы (9), (11). Поэтому в (12) накладываются оба неравенства одновременно, что позволяет получить нетривиальные решения. После подстановки функций (6) в систему (9) с правыми частями вида (11), приходим к системе ОДУ, в которой

$$f(F, G) = F(\xi)^{\mu_1} G(\xi)^{\nu_1}, \quad g(F, G) = F(\xi)^{\mu_2} G(\xi)^{\nu_2}. \quad (16)$$

В свою очередь, точные решения редуцированной системы ОДУ (10), (16) будем отыскивать в виде

$$F(\xi) = \alpha \xi^p, \quad G(\xi) = \beta \xi^q, \quad (17)$$

где константы p, q задаются формулами (13). После подстановки функций (17) в полученную систему ОДУ и несложных преобразований, приравнявая к нулю коэффициенты при степенных функциях от ξ , приходим к системе равенств (14). Тем самым установлено, что каждое положительное решение системы (15) дает семейство глобальных положительных решений. Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3$, $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 = 3$ и симметричная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1. \quad (18)$$

Тогда по теореме 1 система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \delta_1 u^2 v, \quad \delta_1 > 0,$$

$$v_{xx}v_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = \delta_2 u^3 v^3, \quad \delta_2 > 0,$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = \left(\frac{576}{\delta_2} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{12}z^2 \right)^{-1},$$

$$v(x, y, z) = \frac{3}{\delta_1} \left(\frac{576}{\delta_2} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{12}z^2 \right)^{-4}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 вместо (14) можно рассматривать систему

$$\mathcal{D}p^n(2p-1)a^n - \delta_1 a^{\mu_1} b^{\nu_1} = 0, \quad \mathcal{D}q^n(2q-1)b^n - \delta_2 a^{\mu_2} b^{\nu_2} = 0, \quad (19)$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое вещественное число, использовать в формулах (15) произвольное (не обязательно положительное) решение этой системы $(\bar{a}, \bar{b})$ и произвольную симметричную матрицу A , определитель которой подчинен условию $\det A = \mathcal{D}$. Однако в этом случае, вообще говоря, уже нельзя гарантировать глобальность решения, определяемого по формулам (15).

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$, $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 = 3$ и невырожденная симметричная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 27. \quad (20)$$

Тогда, используя теорему 1, с учетом равенств (19) получим, что система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \delta_1 u^2 v,$$

$$v_{xx}v_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = \delta_2 u^3 v^3$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = \alpha \left(-x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right)^{-1},$$

$$v(x, y, z) = \beta \left(-x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right)^{-4},$$

где параметры α, β задаются соотношениями

$$\alpha = \frac{\delta_1}{81}\beta, \quad \beta = \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{8264970432}{\delta_2} \right)^{1/3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что каждому решению $F(\xi), G(\xi)$ системы ОДУ (10) соответствует точное решение системы (9) вида

$$u(\mathbf{x}) = F \left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right), \quad v(\mathbf{x}) = G \left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right).$$

Этот факт можно использовать для сведения системы (9) с краевыми условиями на квадратичных поверхностях к численному решению краевой задачи для системы ОДУ (10), что может существенно уменьшить объем вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в системе (10) функции $f(F, G), g(F, G)$ — полиномы по своим переменным, то система (9) может допускать полиномиальные решения

$$F(\xi) = \sum_{i=0}^k a_i \xi^i, \quad G(\xi) = \sum_{i=0}^m b_i \xi^i.$$

Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть

$$f(F, G) = \frac{13}{\sqrt{38}} F^2 + G^3 - \frac{531441\sqrt{38}}{340787200}, \quad g(f, G) = F + G + \frac{47061\sqrt{38}}{1664000},$$

тогда система ОДУ (10) в случае $n = 3$ обладает точным решением вида

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{38}}{228 \det A} \xi^3 - \frac{3^{4/3} 19^{5/6} \sqrt{2}}{320 (\det A)^{2/3}} \xi^2 + \frac{117 \cdot 3^{2/3} 19^{1/6} \sqrt{2}}{1024 (\det A)^{1/3}} \xi - \frac{49761\sqrt{12}}{1064960},$$

$$G(\xi) = \frac{3^{1/3} 19^{5/6} \sqrt{2}}{228 (\det A)^{2/3}} \xi^2 - \frac{13 \cdot 3^{2/3} 19^{1/6} \sqrt{2}}{160 (\det A)^{1/3}} \xi + \frac{9\sqrt{38}}{1024}.$$

Как отмечено в [31], полиномиальные решения уравнений типа Монжа — Ампера представляют интерес для теории упругости.

Рассмотрим теперь случай, когда система (9) имеет следующий вид:

$$\det H(u) = c_{11} u^{\mu_{11}} + c_{12} v^{\mu_{12}}, \quad \det H(v) = c_{21} u^{\mu_{21}} + c_{22} v^{\mu_{22}}. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 2. Если показатели степени удовлетворяют условиям

$$\mu_{11}\mu_{22} = \mu_{12}\mu_{21}, \quad \mu_{12}(n - \mu_{11}) = \mu_{11}(n - \mu_{22}), \quad \mu_{11} \neq n, \quad \mu_{22} \neq n,$$

и для вычисленных по следующим формулам величин

$$\alpha = \frac{n}{n - \mu_{11}}, \quad \beta = \frac{n}{n - \mu_{22}},$$

система уравнений

$$a^n (2\alpha - 1) a^n - c_{11} a^{\mu_{11}} - c_{12} a^{\mu_{12}} = 0, \quad \beta^n (2\beta - 1) b^n - c_{21} b^{\mu_{21}} - c_{22} a^{\mu_{22}} = 0$$

имеет положительное решение $a = \bar{a} > 0$, $b = \bar{b} > 0$, то система уравнений (21) с оператором Монжа — Ампера имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \bar{a} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^\alpha, \quad v(\mathbf{x}) = \bar{b} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^\beta,$$

где A — симметричная положительно определенная матрица с определителем, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится прямой подстановкой в систему уравнений (21) с учетом формулы (5).

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 3$, $\mu_{11} = 1$, $\mu_{12} = 1/2$, $\mu_{21} = 4$, $\mu_{22} = 2$ и симметричная матрица A имеет вид (18). Тогда по теореме 2 система уравнений с оператором Монжа — Ампера

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = c_{11}u + c_{12}v^{1/2},$$

$$v_{xx}v_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = c_{21}u^4 + c_{22}v^2$$

имеет точное анизотропное решение

$$u(x, y, z) = a \left(\frac{3}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{12} z^2 \right)^{3/2}, \quad v(x, y, z) = b \left(\frac{3}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{12} z^2 \right)^3,$$

при этом положительные параметры решения a , b удовлетворяют следующей алгебраической системе уравнений:

$$c_{11} = \frac{27}{4} a^2 - \frac{\sqrt{b}}{a} c_{12}, \quad c_{21} = \frac{135 b^3}{a^4} - \frac{b^2}{a^4} c_{22}. \quad (22)$$

1. Пусть $c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 1$, тогда система (22) приводится к уравнению

$$1 + \frac{1}{256}(27a^2 - 4)^4 - \frac{135}{4096}a^6(27a^2 - 4)^6 = 0,$$

а параметр b находится из формулы $b = a^2(27a^2 - 4)^2/16 > 0$. Численный анализ показывает, что уравнение для нахождения параметра a имеет два вещественных корня $a_{\pm} \approx \pm 0.5312921672$.

2. Пусть $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} > 0$, $c_{21} > 0$, тогда из системы (22) получаем

$$a = \frac{3^{1/2}2^{6/7}5^{13/14}}{45} c_{12}^{3/7} c_{21}^{1/14}, \quad b = \frac{2^{8/7}5^{4/7}}{135} c_{12}^{4/7} c_{21}^{3/7}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда функции в правых частях системы (9) являются экспоненциальными.

Теорема 3. Если правые части системы (9) являются экспоненциальными функциями следующих видов:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= -(a + b)\delta \exp(-(n + 1)q_2u) + \delta \exp(q_1v - (n + 1)q_2u), \\ g(u, v) &= -(a + b)\varepsilon \exp(-(n + 1)q_1v) + \varepsilon \exp(q_2u - (n + 1)q_1v), \end{aligned} \quad (23)$$

где $a, b, \delta \neq 0, \varepsilon \neq 0, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ — параметры такие, что

$$\varepsilon q_1^n = \delta q_2^n, \quad (24)$$

то система (9) имеет точные решения вида

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_2} \ln \left(a + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_1} \ln \left(b + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right), \quad (25)$$

где A — симметричная матрица, определитель которой удовлетворяет равенствам $\det A = -\varepsilon q_1^n = -\delta q_2^n$.

Доказательство. С учетом формулы (4) решения (25) для удобства перепишем в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_2} \ln(a + \xi), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_1} \ln(b + \xi). \quad (26)$$

Пусть правые части системы (9) задаются формулами (23), тогда на решениях (26) после несложных преобразований они запишутся в виде

$$f(u, v) = -(a + \xi)^{-n-1}(a - \xi)\delta, \quad g(u, v) = -(b + \xi)^{-n-1}(b - \xi)\varepsilon. \quad (27)$$

После подстановки решений (26) в левые части системы (9) с учетом формулы (5) придем к соотношениям

$$\det H(u) = \det A(a - \xi)(a + \xi)^{-n-1}q_2^{-n}, \quad \det H(v) = \det A(b - \xi)(b + \xi)^{-n-1}q_1^{-n}.$$

В свою очередь, с учетом условия (24) и равенств $\det A = -\varepsilon q_1^n = -\delta q_2^n$ последние формулы примут вид

$$\det H(u) = -\delta(a - \xi)(a + \xi)^{-n-1}, \quad \det H(v) = -\varepsilon(b - \xi)(b + \xi)^{-n-1}. \quad (28)$$

Сравнивая равенства (27), (28), легко видеть что система (9) обращается в тождество. $\square$

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 3$ и невырожденная симметричная матрица A имеет вид (20). Тогда по теореме 3 система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \exp(-2u) - 216 \exp\left(-2u + \frac{1}{4}v\right),$$

$$v_{xx}u_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = 8 \exp(-v) - 1728 \exp\left(-v + \frac{1}{2}u\right)$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = 2 \ln \left(\frac{1}{108} - x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right),$$

$$v(x, y, z) = 4 \ln \left(-\frac{1}{216} - x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right).$$

2.2. Случай, когда правые части зависят от оператора Лапласа и градиента искомого функций. Пусть теперь правые части системы уравнений (3) задаются следующими формулами:

$$h_1 = \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_1 \Delta u + \nu_1 \Delta v),$$

$$h_2 = \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_2 \Delta u + \nu_2 \Delta v).$$

Выбор таких функциональных зависимостей обусловлен работой [32, с. 1010], в которой встречается интересное уравнение

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^q} = a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + \Theta(x, y, u, u_x, u_y), \quad 0 \leq q \leq 1,$$

многомерный аналог которого можно записать так:

$$\frac{\det H(u)}{(1 + |\nabla u|^2)^q} = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta u$$

или

$$\det H(u) = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u)(1 + |\nabla u|^2)^q + \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u)(1 + |\nabla u|^2)^q \Delta u. \quad (29)$$

Вводя новые функции

$$\Theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) (1 + |\nabla u|^2)^q, \quad \theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) = \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) (1 + |\nabla u|^2)^q,$$

перепишем (29) в виде

$$\det H(u) = \Theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta u. \quad (30)$$

Рассмотрим систему двух уравнений с оператором Монжа — Ампера, правые части которой аналогичны правой части уравнения (30) вида

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_1 \Delta u + \nu_1 \Delta v), \\ \det H(v) &= \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_2 \Delta u + \nu_2 \Delta v). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ — вещественные константы. При этом не исключается такой случай, когда в уравнениях системы (31) может присутствовать лапласиан только от одной из искомым функций, т. е. одна из констант в каждом уравнении системы равна нулю, а вторая отлична от нуля. В дальнейшем для задачи построения точных решений системы (31) будем при необходимости конкретизировать вид функций $\Theta_1, \Theta_2, \theta_1, \theta_2$, не исключая ситуацию, когда $\Theta_1, \Theta_2, \theta_1, \theta_2$ в системе уравнений (31) можно положить тождественными константами. Точные многомерные решения системы уравнений (31) будем отыскивать в виде (7), (8).

Теорема 4. Если для функций Θ_1, Θ_2 выполнены условия

$$\Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \equiv \lambda_1, \quad \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \equiv \lambda_2, \quad (32)$$

а константы μ_i, ν_i ($i = 1, 2$) такие, что $\mu_1\nu_2 = \mu_2\nu_1$, то система обобщенных уравнений Монжа — Ампера (31) обладает точным многомерным решением

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\det A_1} \right)^{1/n} (A_1 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\det A_2} \right)^{1/n} (A_2 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (33)$$

при этом следы невырожденных симметричных матриц A_1, A_2 удовлетворяют равенствам

$$\alpha\mu_1 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_1 \operatorname{tr}(A_2) = 0, \quad \alpha\mu_2 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_2 \operatorname{tr}(A_2) = 0. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формулах (7) ненулевые постоянные α, β произвольны. На функциях (7), (8) левые части системы (31) примут в силу формулы (5) постоянные значения $\alpha^n \det A_1$ и $\beta^n \det A_2$. В свою очередь, после подстановки решений (7), (8) в правые части системы (31) получим с учетом формул (32), (34) соответственно следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times [\alpha\mu_1 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_1 \operatorname{tr}(A_2)] \\ = \lambda_1 + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times 0 = \lambda_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times [\alpha\mu_2 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_2 \operatorname{tr}(A_2)] \\ = \lambda_2 + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times 0 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Следовательно, после подстановки функций (7), (8) в систему уравнений (31) получаем равенства $\lambda_1 = \alpha^n \det A_1$, $\lambda_2 = \beta^n \det A_2$. Выражая отсюда постоянные α, β и подставляя их в (7), (8), получим формулы (33). Таким образом, функции (33) являются искомыми точными решениями. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что теорема 4 справедлива и для случая, когда $\operatorname{tr}(A_1) = 0$ и $\operatorname{tr}(A_2) = 0$.

ПРИМЕР 5. Пусть $n = 3$ и $A_1 = A_2 = E$, где E — единичная матрица 3×3 . Тогда по теореме 4 система обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \frac{192(1 + |\nabla u|^2)}{3 - 16v} + v^p \Delta \left(u + \frac{2}{3}v \right), \\ \det H(v) &= -\frac{216(1 + |\nabla v|^2)}{1 + 18u} + u^q \Delta \left(\frac{2}{3}u + v \right) \end{aligned}$$

имеет в трехмерном координатном пространстве следующие радиально — симметричные решения:

$$u(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2), \quad v(x, y, z) = -3(x^2 + y^2 + z^2).$$

ПРИМЕР 6. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -10 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

причем $\det A_1 = 2$, $\text{tr}(A_1) = -16$, $\det A_2 = 4$, $\text{tr}(A_2) = -8$. Тогда по теореме 4 система обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\det H(u) = \lambda + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) \Delta(u - v),$$

$$\det H(v) = 16\lambda + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) \Delta(v - u)$$

имеет в трехмерном координатном пространстве следующие точные анизотропные по пространственным переменным решения:

$$u(x, y, z) = \frac{2^{2/3} \lambda^{1/3}}{2} (-x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 3xy + xz + 6yz),$$

$$v(x, y, z) = 2^{2/3} \lambda^{1/3} \left(-3x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 2xy - yz \right).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \mu_{11} \Delta(|\nabla u|^2) + \mu_{12} \Delta(|\nabla v|^2) + c_{11} \Delta u + c_{12} \Delta v, \\ \det H(v) &= \mu_{21} \Delta(|\nabla u|^2) + \mu_{22} \Delta(|\nabla v|^2) + c_{21} \Delta u + c_{22} \Delta v. \end{aligned} \quad (36)$$

Теорема 5. Если числа α, β и симметричные матрицы A_1, A_2 удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^n \det A_1 &= 2\alpha^2 \mu_{11} \text{tr}(A_1^2) + 2\beta^2 \mu_{12} \text{tr}(A_2^2) + \alpha c_{11} \text{tr}(A_1) + \beta c_{12} \text{tr}(A_2), \\ \beta^n \det A_2 &= 2\alpha^2 \mu_{21} \text{tr}(A_1^2) + 2\beta^2 \mu_{22} \text{tr}(A_2^2) + \alpha c_{21} \text{tr}(A_1) + \beta c_{22} \text{tr}(A_2), \end{aligned} \quad (37)$$

то система уравнений с оператором Монжа — Ампера (36) имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} (\mathbf{x}, S_1^T A_1 S_1 \mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}, S_2^T A_2 S_2 \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (38)$$

где S_1, S_2 — произвольные ортогональные матрицы.

Доказательство проводится прямой подстановкой с использованием формулы (5) и того факта, что при преобразованиях подобия с ортогональными матрицами след и определитель являются инвариантами.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Не уменьшая общности, в системе (37) можно считать $\alpha = \beta = 1$, это не сужает множества решений системы (36), доставляемых теоремой 5. Однако в случае, когда представляют интерес квадратичные решения системы (36) с заданными матрицами A_1, A_2 , следует рассматривать (37) как систему двух уравнений для нахождения подходящих чисел α, β .

ПРИМЕР 7. Рассмотрим частный случай системы (36), когда $n = 3$ и уравнения имеют вид

$$\det H(u) = \mu_1 \Delta(|\nabla u|^2), \quad \det H(v) = \mu_2 \Delta(|\nabla v|^2), \quad (39)$$

где $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ — вещественные параметры. Из теоремы 5 следует, что система (39) имеет семейство точных решений вида (38) со следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a/3 & 0 & 0 \\ 0 & a(1 + \sqrt{3})/3 & 0 \\ 0 & 0 & a(1 - \sqrt{3})/3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b/3 & 0 & 0 \\ 0 & b(1 + \sqrt{3})/3 & 0 \\ 0 & 0 & b(1 - \sqrt{3})/3 \end{pmatrix},$$

где $a = -27\mu_1^{3/5}\mu_2^{2/5}$, $b = -27\mu_1^{2/5}\mu_2^{3/5}$.

ПРИМЕР 8. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 задаются формулами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 5 система уравнений с оператором Монжа — Ампера (36) обладает точным анизотропным по пространственным переменным решением

$$u(x, y, z) = \alpha \left(x^2 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + xy - 4xz \right),$$

$$v(x, y, z) = \beta \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 2z^2 + 2xy + yz \right), \quad (40)$$

при этом соответствующая алгебраическая система уравнений (37) имеет вид

$$47\alpha^3 - 144\alpha^2\mu_{11} - 168\beta^2\mu_{12} = 0, \quad 93\beta^3 - 144\alpha^2\mu_{21} - 168\beta^2\mu_{21} = 0. \quad (41)$$

Для произвольных ненулевых коэффициентов $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$ из системы (41) для нахождения одной из неизвестных величин α или β получаем полиномиальное уравнение пятой степени, которое заведомо имеет вещественное решение. Если на этом решении квадратное уравнение для нахождения другой неизвестной из пары (α, β) также имеет вещественные корни, то получим квадратичные точные решения системы в частных производных вида (40). А в частном случае $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_1, \mu_{21} = \mu_{22} = \mu_2$ алгебраическая система (41) имеет вещественное решение

$$\alpha = \frac{144}{47}\mu_1 + \frac{56 \cdot 406503^{2/3}}{135501}\mu_2, \quad \beta = \frac{48 \cdot 406503^{1/3}}{1457}\mu_1 + \frac{56}{31}\mu_2.$$

Пусть функции h_1, h_2 задаются следующими формулами:

$$h_1 = \lambda_1 + f(\Delta v), \quad h_2 = \lambda_2 + g(\Delta u).$$

В этом случае система уравнений (3) запишется так:

$$\det H(u) = \lambda_1 + f(\Delta v), \quad \det H(v) = \lambda_2 + g(\Delta u). \quad (42)$$

Здесь $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ — некоторые параметры.

Теорема 6. Если симметричные матрицы A_1, A_2 и числа $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \lambda_1, \lambda_2$ удовлетворяют системе равенств

$$\alpha^n \det A_1 = \lambda_1 + f(\beta \operatorname{tr}(A_2)), \quad \beta^n \det A_2 = \lambda_2 + g(\alpha \operatorname{tr}(A_1)), \quad (43)$$

то система уравнений Монжа — Ампера (42) имеет точное решение (38).

Доказательство. После подстановки квадратичных функций (38) с произвольными симметричными матрицами A_1, A_2 и свободными константами $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ в уравнения системы (42) с учетом леммы 1 приходим к равенствам (43). Таким образом, функции (38) и симметричные матрицы A_1, A_2 , константы α, β которых удовлетворяют системе равенств (43), обращают уравнения системы (42) в тождества. При этом допустим и случай, когда $\lambda_i = 0$, и $\det A_i = 0$, $\operatorname{tr}(A_i) = 0$, $i = 1, 2$. В этом случае с учетом формулы (5) обе части обоих уравнений системы (42) тождественно обращаются в нуль на всех функциях вида (38). Теорема доказана. $\square$

Теорема 7. Если правые части уравнений системы (42) удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1 + f(0) = 0, \quad \lambda_2 + g(0) = 0,$$

то эта система уравнений имеет точные решения вида (38), где A_1, A_2 — произвольные симметричные матрицы, определители и следы которых равны нулю, а $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ — произвольные вещественные числа.

Доказательство. Из условий $\det A_1 = 0, \det A_2 = 0$ и леммы 1 следует, что левые части уравнений системы (42) тождественно обращаются в нуль на всех функциях вида (38), отвечающих условиям данной теоремы. А из условий $\operatorname{tr}(A_1) = 0, \operatorname{tr}(A_2) = 0$ следует, что тождественно обращаются в нуль правые части уравнений системы (42) на всех функциях вида (38), отвечающих условиям данной теоремы. Теорема доказана. $\square$

Пример 9. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 задаются формулами (35). Тогда по теореме 6 системы обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\det H(u_1) = \Delta v_1, \quad \det H(v_1) = \Delta u_1, \quad (44)$$

$$\det H(u_2) = (\Delta v_2)^3, \quad \det H(v_2) = (\Delta u_2)^2 \quad (45)$$

имеют в трехмерном координатном пространстве следующие точные анизотропные по пространственным переменным решения:

$$u_1(x, y, z) = -2x^2 - 10y^2 - 4z^2 - 6xy + 2xz + 12yz,$$

$$v_1(x, y, z) = 6x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz,$$

$$u_2(x, y, z) = 16384x^2 + 81920y^2 + 32768z^2 + 49152xy - 16384xz - 98304yz,$$

$$v_2(x, y, z) = -1024 \cdot 2^{1/3}(6x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz).$$

Кроме того, по теореме 7 точными решениями систем (44), (45) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, будут функции (38), в которых симметричные матрицы A_1, A_2 такие, что $\det A_1 = 0, \operatorname{tr}(A_1) = 0, \det A_2 = 0, \operatorname{tr}(A_2) = 0$.

3. Заключение

В статье построены анизотропные по пространственным переменным многомерные точные решения нелинейных систем уравнений с оператором Монжа — Ампера. Полученные результаты представляют теоретический интерес, поскольку их можно использовать для изучения качественных свойств, анализа выполнения краевых условий, оценки скорости роста и т. д. Найденные точные решения также можно использовать в качестве тестовых при разработке численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач. В качестве дальнейшего направления развития результатов целесообразно рассмотреть возможность использования предложенных здесь идей и подходов для построения точных решений для нестационарных вариантов изученных в статье систем уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1334–1349.
2. Монж Г. Приложение анализа к геометрии (пер. с фр. Monge G. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris. 1795). М.-Л.: ОНТИ, 1936.
3. Ampère A. Application de la théorie sur les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier et second ordre. Paris: J. de l'Ecole Polytechnique, 1820.
4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
6. Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса // Прикл. математика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. Second edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
8. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Часть 2. Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 2023.
9. Аксенов А. В., Полянин А. Д. Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 750–763.
10. Polyanin A. D., Aksenov A. V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: Symmetries, closed-form solutions, and reductions // Mathematics. 2024. V. 12. N 2127.
11. Aksenov A. V., Polyanin A. D. Symmetries, reductions and exact solutions of nonstationary Monge–Ampère type equations // Mathematics. 2025. V. 13. N 525.
12. Кушнер А. Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа — Ампера и инварианты Лапласа // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 5. С. 597–600.
13. Кушнер А. Г. Приведение гиперболических уравнений Монжа — Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 609–611.
14. Фушич В. И., Серов Н. И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 543–546.
15. Фушич В. И., Шгелень В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наук. думка, 1989.
16. Leibov O. S. Reduction and exact solutions of the Monge–Ampère equation // Nonlinear Math. Phys. 1989. V. 4, N 1, 2. P. 146–148.
17. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа — Ампера. М.: Наука, 1988.
18. Trudinger N. S., Wang X. J. The Monge–Ampère equation and its geometric applications // Handbook of geometric analysis. Somerville: International, 2008. V. 1. P. 467–524. (Adv. Lect. Math.; V. 7).
19. Calabi E. Improper affine hyperspheres of convex type and generalization of a theorem by K. Jörgens // Michigan Math. J. 1958. V. 5, N 2. P. 105–126.
20. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
21. Борисенко А. А., Веснин А. Ю., Ивочкина Н. М. К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 171–193.
22. Ambrosio L., Baradat A., Brenier Y. Monge–Ampère gravity, as a Γ -limit of good rate functions // Anal. PDE. 2023. V. 16, N 9. P. 2005–2040.

23. Bonnefous A., Brenier Y., Mohayaei R. Monge–Ampère gravity, optimal transport theory and their link to the Galileons. arXiv:2405.15035v2 [gr-qc]. 31 Oct 2024.
24. Ma X. N., Trudinger N. S., Wang X. J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem // Arch. Ration. Mech. Anal. 2005. V. 177. P. 151–183.
25. Trudinger N. S., Wang X. J. On the second boundary value problem for Monge–Ampère type equations and optimal transportation // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 2009. V. 8, N 1. P. 143–174.
26. Guido De Philippis, Alessio Figalli. The Monge–Ampère equation and its link to optimal transportation. arXiv:1310.6167v1 [math.AP]. 23 Oct 2013.
27. Косов А. А., Семенов Э. И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1282–1299.
28. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1619–1640.
29. Рахмелевич И. В. Система двумерных уравнений Монжа — Ампера: редукции и точные решения // Владикавк. мат. журн. 2024. Т. 26, № 4. С. 121–136.
30. Жабборов Н. М., Коробов П. В., Имомназаров Х. Х. Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2019. Т. 5, № 2. С. 156–163.
31. Аминов Ю. А. Существование полиномиальных решений уравнения Монжа — Ампера 4-й степени. Сильный изгиб тонкой пластинки // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 8. С. 3–17.
32. Бакельман И. Я., Красносельский М. А. Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с оператором Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1007–1010.

Поступила в редакцию 2 марта 2025 г.

После доработки 17 апреля 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Косов Александр Аркадьевич (ORCID 0000-0003-1352-1828)

Семенов Эдуард Иванович (ORCID 0000-0002-9768-9945)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033

kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com