Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 517.518.1

НЕКОНТАКТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЩИХ ГРУПП КАРНО И ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Выведена формула коплощади для отображений групп Карно произвольной глубины. Одним из ключевых свойств является описание соотношения мер Хаусдорфа, построенных по субримановым и римановым квазиметрикам.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.408

Ключевые слова: группа Карно, множество уровня, хаусдорфова размерность, формула коплощади.

Статья посвящена продолжению начатых в [1, 2] исследований метрических свойств классов неконтактных отображений групп Карно. В отличие от рассмотренных ранее случаев в поставленной задаче нет ограничений на соотношение размерностей подрасслоений, соответствующих полям одинаковых степеней. Кроме того, сняты ограничения на глубину прообраза и образа. Таким образом, решается вопрос в универсальной постановке. В частном случае, когда размерности подрасслоений полей одинаковой степени на прообразе не меньше, чем таковые на образе, результаты перспективны в плане применений к аппроксимации липшицевых во внутреннем смысле отображений гладкими. Такая аппроксимация может быть полезна при выводе в явном виде метрических свойств множеств уровня классов липшицевых во внутреннем смысле отображений. Эта задача является одной из трудных открытых проблем анализа на метрических структурах, и в настоящее время она решена только либо для некоторых частных случаев (см., например, [3–6] и др.), либо в достаточно локальном виде [7]. Так как при построении отображений, аппроксимирующих исходное, свойство контактности (и соответственно липшицевости во внутреннем смысле) в общем случае исчезает, то возникает вопрос, как описать субримановы свойства неконтактных аппроксимаций. В ходе решения задачи установлен ряд свойств дифференциалов неконтактных отображений, а именно, показано, как структура дифференциала может быть адаптирована под структуру дифференциала контактного отображения и какими аналогами субримановых метрических свойств он обладает. Также исследованы классы функций множества, определяемых на поверхностях уровня, и установлено, что каждая такая функция является мерой и обладает свойством счетной аддитивности.

В разд. 1 приведены основные определения и факты из теории групп Карно. Разд. 2 посвящен сравнению в прообразе и образе сумм размерностей подрасслоений полей, степень которых не превосходит определенного числа от единицы до

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

глубины образа, и описанию свойств дифференциала в нехарактеристических точках. В разд. 3 построен дифференциал субриманова типа и установлены его свойства. Разд. 4 содержит приложения установленных результатов: описание новой меры Хаусдорфа на множествах уровня и вывод формулы коплощади нового типа (ср. [1, 8, 2]).

1. Основные свойства групп Карно

Для описания условий решаемой задачи нам потребуются базовые определения и свойства исследуемых объектов.

Определение 1.1 (см., например, [9]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V=\bigoplus_{j=1}^{M}V_j,\quad [V_1,V_j]=V_{j+1},\ j<M,\quad [V_1,V_M]=\{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j=1,\dots,M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1,X_2,\dots,X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$\begin{cases} X_1,\dots,X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1,\\ X_{\dim V_1+\dots+\dim V_{k-1}+1},\dots,X_{\dim V_1+\dots+\dim V_k} & \text{— базис } V_k,\ 1<k\le M.\end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j\in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Если

$$x=\exp\biggl(\sum_{j=1}^{N}x_jX_j\biggr)(\mathbf{0}),\quad y=\exp\biggl(\sum_{j=1}^{N}y_jX_j\biggr)(\mathbf{0}),$$

то

$$x\cdot y=z=\exp\biggl(\sum_{j=1}^{N}z_jX_j\biggr)(\mathbf{0}),$$

где $z_j=x_j+y_j$ для $\deg X_j=1$,

$$z_j=x_j+y_j+\sum_{\substack{\mu>0,\beta>0,\\ |\mu+\beta|_h=\deg X_j}}F^j_{\mu,\beta}x^\mu y^\beta$$

при $\deg X_j>1$, и для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h=\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i\deg X_i$.

Здесь умножение $x\cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N}x_jX_j$ с началом в единице группы $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N}y_jX_j$ с началом в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N}z_jX_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}y_jX_j\Bigr)(x)$.

Определение 1.3. Константы $\left\{F^j_{\mu,\beta}\right\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Замечание 1.4. Так как на группе Карно по определению верно

$$[X_i, X_j] = \sum_{k:\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k,$$

где все $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны, а при вычислении координат $\{z_j\}_{j=1}^N$ используется формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то константы $\left\{F^j_{\mu,\beta}\right\}_{j,\mu,\beta}$ всегда определяются однозначно.

Определение 1.5. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

В качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную известной метрике Карно — Каратеодори (см., например, [10]) на группах Карно.

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно и $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg X_j = 1} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots, \Big(\sum_{j:\deg X_j = M} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Big\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\operatorname{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника. Кроме того, d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори, которая вычисляется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых (т. е. абсолютно непрерывных кривых, у которых касательный вектор в почти каждой точке горизонтален). Ее недостаток состоит в том, что структура шаров в этой метрике в настоящее время известна только в нескольких частных случаях.

Свойство 1.7. *Образ шара* $\operatorname{Box}_2(v, r)$ *при отображении* θ_v^{-1} *— декартово произведение* M *(евклидовых) шаров, диаметры которых равны* $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.

Свойство 1.8. *С помощью свойства* 1.7 *непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы* $\mathbb{G}$ *относительно* d_2 *равна*

$$\nu = \sum_{j=1}^M j \dim V_j.$$

Определение 1.9. Определим функцию множества $\mathscr{H}^\nu$ для $A \subset \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i, r_i) \supset A,\ y_i \in A,\ r_i < \delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Здесь и далее символ ω_l обозначает объем евклидова шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^l$.

Замечание 1.10. Определение 1.9 отличается от классического тем, что центры шаров покрытия берутся на самом множестве. Однако для исследуемых в статье множеств такое отличие не является принципиальным в силу абсолютной непрерывности по мере $\mathscr{H}^N$ (см. ниже свойство 1.11).

Из [11, разд. 1] следует

Свойство 1.11. *Функция множества $\mathscr{H}^\nu$ является мерой (в частности, она обладает свойством счетной аддитивности на σ-алгебре борелевских множеств). Кроме того, меры $\mathscr{H}^\nu$ и $\mathscr{H}^N$, где мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^N$ построена по метрике вида $\sqrt{\langle\cdot, g\cdot\rangle}$, определяемой римановым тензором g на $\mathbb{G}$, абсолютно непрерывны одна относительно другой и восстанавливаются по соответствующим производным. Производная $\mathscr{H}^N$ по $\mathscr{H}^\nu$ в точке $x \in \mathbb{G}$ равна $\sqrt{\det(g(x))}$.*

Замечание 1.12. То, что $\mathscr{H}^\nu$ является мерой, можно доказать из абсолютной непрерывности $\mathscr{H}^\nu$ относительно $\mathscr{H}^N$ и квазиаддитивности $\mathscr{H}^\nu$ (см. подробности и схему доказательства в [12]).

Определение 1.13. Функция множества $\mathscr{H}^\nu$ называется *субримановой мерой*.

Обозначение 1.14. Пусть $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группа Карно. Обозначим ее размерность и размерности составляющих алгебру Ли подпространств, глубину, определенную аналогично d_2 квазиметрику, хаусдорфову размерность относительно этой квазиметрики теми же символами, что и для $\mathbb{G}$, только со знаком $\widetilde{\ }$. Построенную по $\widetilde{d}_2$ меру Хаусдорфа размерности $\widetilde{\nu}$ обозначим символом $\mathscr{H}^{\widetilde{\nu}}$.

Предположение 1.15. *Будем рассматривать отображения $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество группы Карно $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно глубины M и $\widetilde{M}$ и топологических размерностей N и $\widetilde{N}$ соответственно, $N \geq \widetilde{N}$.*

Также будем предполагать, что ранг $D\varphi$ всюду равен $\widetilde{N}$ (т. е. он максимален), и $D\varphi$ строго отделен от нуля всюду на Ω: иными словами, существует такое $t > 0$, что $\|D\varphi(x)\langle w\rangle\| \geq t$ для всех $x \in \Omega$ и $w \in (\ker D\varphi(x))^\perp$, где $\|w\| = 1$.

Кроме того, будем считать, что существуют такие $0 < c < C < \infty$, что $c \leq \sqrt{\det(g(x))} \leq C$ всюду на Ω, где g — риманов тензор на $\mathbb{G}$.

Замечание 1.16. Подчеркнем, что не требуется выполнения ни одного из условий

1) $M \geq \widetilde{M}$;

2) хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \widetilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \widetilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$.

2. Соотношение размерностей

Из результатов [1, 2] следует, что для корректного определения хаусдорфовой размерности множеств уровня необходимо вычислить минимально возможную сумму степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей в прообразе. Далее будем рассматривать точки, в которых дифференциал отображения невырожденный на каждом из таких векторов. Такой выбор обоснован тем, что в этом случае меры пересечений субриманова шара и проходящего через его центр множества уровня и субриманова шара и касательной плоскости к такому множеству уровня будут совпадать с точностью до множителя $1 + o(1)$.

Обозначение 2.1. Положим

$$\widehat{M} = \min\left\{m : \sum_{k=1}^{m} \dim V_k \geq \widetilde{N}\right\}.$$

Из определения следует, что $\widehat{M} \leq M$. Если хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, \widetilde{M}]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \widetilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \widetilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, то $\widehat{M} \leq \widetilde{M}$.

Перейдем к определению характеристической точки.

Определение 2.2. Точка $x \in \Omega$ называется *характеристической*, если минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго больше, чем

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} k \cdot \dim V_k + \widehat{M} \cdot \left(\widetilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k\right). \tag{1}$$

Замечание 2.3. Определение характеристической точки, приведенное в [2], является частным случаем определения 2.2. Действительно, если, например, $\widetilde{M} = 2$ и $\dim \widetilde{V}_1 \leq \dim V_1 \leq \widetilde{N} = \dim \widetilde{V}_1 + \dim \widetilde{V}_2$, то минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, равна $\dim V_1 + 2(\widetilde{N} - \dim V_1)$.

Определение 2.4 (см., например, [13]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что φ — *контактное отображение класса* C^1_H, если производные вдоль горизонтальных полей $X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi$ существуют и непрерывны и $V_1\varphi \subset \widetilde{V}_1$. Здесь $V_1\varphi$ обозначает линейную оболочку векторных полей, полученных в результате действия горизонтальных полей на φ.

Замечание 2.5. Если отображение φ является непрерывно дифференцируемым в классическом смысле и контактным, то минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго равна (см. [14])

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{M}} k \dim \widetilde{V}_k. \tag{2}$$

Как видно из (2), эта сумма строго больше значения (1), если хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, \widetilde{M}]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \widetilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \widetilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, не превосходящих $\widetilde{M}$. Данное различие обусловлено свойством контактности отображения.

Замечание 2.6. Если $M \geq \widetilde{M}$ и $\dim V_k = \dim \widetilde{V}_k$ для всех $k = 1, \ldots, \widetilde{M}$, то минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, будет такая же, как в контактном случае.

Обозначение 2.7. Положим

$$\widehat{N} = \sum_{k=1}^{\widehat{M}} \dim V_k.$$

По определению $\widetilde{N} \leq \widehat{N} \leq N$.

Обозначение 2.8. Положим $n_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \dim V_k$ для всех $m = 1, \ldots, M$ и $n_0 = 0$. Также положим $\widetilde{n}_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dim \widetilde{V}_k$ для всех $p = 1, \ldots, \widetilde{M}$ и $\widetilde{n}_0 = 0$.

Обозначение 2.9. Для произвольного отображения $\psi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$, обозначим символом $D_m\psi$ часть матрицы дифференциала $D\psi$, состоящую из первых n_m столбцов.

Таким образом, часть матрицы дифференциала $D\psi$, состоящая из первых $\widehat{N}$ столбцов, обозначается символом $D_{\widehat{M}}\psi$.

Обозначение 2.10. Положим $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$.

Теорема 2.11. *В условиях предположения* 1.15 *для неконтактных отображений $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, точка является характеристической тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- *ранг $D_{\widehat{M}}\varphi$ в этой точке не превосходит $\widetilde{N} - 1$;*
- *существует $1 \leq m < \widehat{M}$ такое, что ранг $D_m\varphi$ в этой точке не превосходит $n_m - 1$, тогда как ранг $D_{\widehat{M}}\varphi$ максимален.*

Доказательство. Фиксируем точку $x \in \Omega$ и перейдем в нормальные координаты относительно x. Тогда вид матрицы дифференциала отображения φ_x в нуле в стандартном базисе будет таким же, как вид матрицы дифференциала φ в точке x в базисе $\{X_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$. Так как точка $x \in \Omega$ фиксирована, далее в доказательстве при рассмотрении матриц или элементов матриц дифференциалов мы не будем указывать аргумент, чтобы избежать загромождения текста. Каждому столбцу матрицы $D\varphi_x$ с номером i сопоставим число, равное степени векторного поля с таким же номером $\deg X_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим матрицу $D_{\widehat{M}}\varphi$, которая совпадает с матрицей, составленной из первых $\widehat{N}$ столбцов $D_{\widehat{M}}\varphi_x$, размера $\widetilde{N} \times \widehat{N}$, и проанализируем ее свойства. Так как результат действия $D_{\widehat{M}}\varphi_x$ на стандартный вектор $\mathbf{e}_i$ — это столбец с номером i, $i = 1, \ldots, \widehat{N}$, будем исследовать свойства столбцов.

Пусть ранг $D_{\widehat{M}}\varphi$ строго меньше $\widetilde{N}$. В этом случае в $D_{\widehat{M}}\varphi_x$ можно выбрать не более чем $\widetilde{N} - 1$ линейно независимых столбцов. Минимально возможная сумма степеней, соответствующая этим столбцам, равна

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} k \dim V_k + \widehat{M} \cdot \left(\widetilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k - 1\right). \tag{3}$$

Так как $\operatorname{rank} D\varphi = \widetilde{N}$, существует хотя бы один столбец матрицы $D\varphi_x$ с номером $j > \widehat{N}$, которому сопоставлена степень $\deg X_j > \widehat{M}$. Эта степень в сумме с (3) будет строго больше, чем (1).

Предположим теперь, что ранг $D_{\widehat{M}}\varphi$ равен $\widetilde{N}$, но при этом существует $1 \leq m < \widehat{M}$ такое, что ранг $D_m\varphi$ в этой точке не является максимальным. Выберем наибольшее из таких чисел $m < \widehat{M}$; тогда ранги матриц $D_l\varphi$ и $D_l\varphi_x$, $l = m+1, \dots, \widehat{M}$, максимальны. В этом случае рассмотрим матрицу $D_m\varphi$, которая совпадает с матрицей $D_m\varphi_x$, и применим к ней приведенную ранее схему.

Действительно, по определению числа $\widehat{M}$ имеем $n_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \dim V_k < \widetilde{N}$ для $m < \widehat{M}$, поэтому максимально возможный ранг $D_m\varphi_x$ равен n_m. В свою очередь, минимально возможная сумма степеней линейно независимых векторов равна

$$\sum_{k=1}^{m} k \dim V_k,$$

а если ранг $D_m\varphi_x$ равен $n_m - s$, $s > 0$, то эта сумма больше либо равна

$$\sum_{k=1}^{m-1} k \dim V_k + m(\dim V_m - s).$$

По условию ранг $D_{m+1}\varphi$ максимален. Предположим, что $m+1 < \widehat{M}$. Тогда количество линейно независимых столбцов в матрице $D_{m+1}\varphi_x$ равно $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \dim V_k$, т. е. $D_{m+1}\varphi_x$ отличается от $D_m\varphi_x$ на $\dim V_{m+1} + s$ линейно независимых столбцов, что невозможно, так как эти матрицы различаются только на $\dim V_{m+1}$ столбцов. Значит, $m+1 = \widehat{M}$. Тогда минимально возможная сумма степеней, соответствующая этим линейно независимым столбцам, больше либо равна

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-2} k \dim V_k + (\widehat{M}-1)(\dim V_{\widehat{M}-1} - s) + \widehat{M}\left(\widetilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k + s\right),$$

что совпадает с значением

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} k \dim V_k + \widehat{M} \cdot \left(\widetilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k\right) + s.$$

Пусть теперь точка x характеристическая, т. е. минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго больше чем (1). В терминах введенных в начале доказательства обозначений это эквивалентно тому, что минимально возможная сумма степеней, соответствующая всем линейно независимым столбцам, строго больше чем (1). В свою очередь, это означает, что или у какой-либо матрицы $D_m\varphi_x$ (и $D_m\varphi$) ранг не максимальный, $m < \widehat{M}$, или ранг $D_{\widehat{M}}\varphi_x$ (и $D_{\widehat{M}}\varphi$) не максимальный. Теорема доказана.

Следствие 2.12. *Множество χ замкнуто.*

Доказательство. Действительно, каждое из отображений $x \mapsto D_m\varphi(x)$ непрерывно и

$$\chi = \bigcup_{m=1}^{\widehat{M}} \{x : \det(D_m\varphi(x) D_m\varphi(x)^*) = 0\}.$$

Следствие доказано.

3. Дифференциал субриманова типа

В данном разделе опишем преобразования в нехарактеристических точках дифференциала отображения φ, которое приведет его к виду, аналогичному структуре субриманова дифференциала для контактных отображений. Чтобы пояснить, о чем идет речь, приведем некоторые классические определения и результаты теории субримановой дифференцируемости.

Определение 3.1 ([10]; см. также [13]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Известно [13], что контактные C_H^1-отображения (см. определение 2.4), определенные на открытых множествах, непрерывно дифференцируемы в субримановом смысле всюду на области определения. Если контактное C_H^1-отображение принадлежит и классу C^1, то (см., например, [14]) его классический дифференциал имеет «блочно-верхнетреугольный» вид, а субриманов — «блочно-диагональный». Здесь термины взяты в кавычки, так как в общем случае матрицы дифференциала и субриманова дифференциала не являются квадратными и размерность аналогов диагональных блоков равна $\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k$, а расположены они на пересечениях столбцов с номерами от $n_{k-1}+1$ до n_k и строк с номерами от $\widetilde{n}_{k-1}+1$ до $\widetilde{n}_k$ соответственно. Здесь $k = 1, \dots, \min\{M, \widetilde{M}\}$.

Наша цель далее — привести матрицу классического дифференциала к «блочно-верхнетреугольному» виду, не меняя значение $\sqrt{\det(D\varphi D\varphi^*)}$, и построить аналог матрицы субриманова дифференциала, рассмотрев ее «диагональные» блоки.

Обозначение 3.2. Здесь и далее символ $0_{q\times p}$ обозначает нуль-матрицу размера $q \times p$, а E_l — единичную матрицу размера l.

Обозначение 3.3. Символ $D_m^c\varphi$ здесь и далее обозначает матрицу, составленную из $\dim V_m$ столбцов $D\varphi$ с номерами $n_{m-1}+1, \dots, n_m$.

Символ $D^c\varphi$ здесь и далее обозначает матрицу, составленную из $N - n_{\widehat{M}} = N - \widehat{N}$ столбцов $D\varphi$ с номерами $n_{\widehat{M}}+1, \dots, N$.

Если Q — произвольная матрица, то для нее справедливы аналогичные обозначения, если они имеют смысл.

Далее будем использовать метод, подробно описанный в [2], индукцией по $m = \widehat{M}, \dots, 1$.

Пусть x — фиксированная нехарактеристическая точка. Рассмотрим матрицу $D\varphi = D\varphi(x)$ (построенную в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$). Тогда ранги матриц $D_{\widehat{M}}\varphi$ и входящей в нее $D_{\widehat{M}-1}\varphi$ максимальные. Так как x — фиксированная точка, значение аргумента, как и ранее, указывать не будем.

Опишем основные шаги преобразования.

Аналогично методу [2] подействуем слева на $D\varphi$ ортогональным преобразованием $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}$ таким образом, чтобы первые $n_{\widehat{M}-1}$ столбцов матрицы

$O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}}\varphi$ (составляющие $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi$) лежали в $\mathbb{R}^{n_{\widehat{M}-1}}\times 0^{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}$. Тогда матрица $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D\varphi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} [O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi] & & \\ & O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi) & O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c\varphi) \\ 0_{(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})\times n_{\widehat{M}-1}} & & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где символ $[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]$ обозначает блок $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi$, представляющий собой квадратную невырожденную матрицу размера $n_{\widehat{M}-1}$.

Далее, для блока $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi)$ ранг матрицы, составленной из его строк с номерами $n_{\widehat{M}-1}+1,\dots,\widetilde{N}$, максимален и равен $\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}$ (это следует из приведенных в [2] аргументов, примененных почти дословно с очевидными изменениями). Обозначим такую матрицу символом $\big(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}\big(D^c_{\widehat{M}}\varphi\big)\big)_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}$. По построению ее размер равен

$$(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})\times(\widehat{N}-n_{\widehat{M}-1});$$

напомним, что $\widehat{N}=n_{\widehat{M}}\geq\widetilde{N}$.

Подействуем на (4) справа ортогональным преобразованием $O_{\widehat{M}}$, матрица которого равна

$$\begin{pmatrix} E_{n_{\widehat{M}-1}} & 0_{n_{\widehat{M}-1}\times\dim V_{\widehat{M}}} & 0_{n_{\widehat{M}-1}\times(N-n_{\widehat{M}})} \\ 0_{\dim V_{\widehat{M}}\times n_{\widehat{M}-1}} & \mathbf{O}_{\widehat{M}} & 0_{\dim V_{\widehat{M}}\times(N-n_{\widehat{M}})} \\ 0_{(N-n_{\widehat{M}})\times n_{\widehat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\widehat{M}})\times\dim V_{\widehat{M}}} & E_{N-n_{\widehat{M}}} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathbf{O}_{\widehat{M}}$ — ортогональное преобразование, поворачивающее $\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}$ строк $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi)_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}$ в пространство $\mathbb{R}^{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}\times 0^{\widehat{N}-\widetilde{N}}$, матрица которого имеет размер $\dim V_{\widehat{M}}$. Получим матрицу $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D\varphi O_{\widehat{M}}$, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} [O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi] & A_{\widehat{M}-1} & B_{\widehat{M}-1} & \\ & & & O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c\varphi) \\ 0_{(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})\times n_{\widehat{M}-1}} & [(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi))_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}\mathbf{O}_{\widehat{M}}] & 0_{(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})\times(\widehat{N}-\widetilde{N})} & \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $[(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi))_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}\mathbf{O}_{\widehat{M}}]$ — часть матрицы $(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}(D^c_{\widehat{M}}\varphi))_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}\mathbf{O}_{\widehat{M}}$, равная невырожденной квадратной матрице размера $\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}$, а $A_{\widehat{M}-1}$ и $B_{\widehat{M}-1}$ — блоки размера $n_{\widehat{M}-1}\times(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})$ и $n_{\widehat{M}-1}\times(\widehat{N}-\widetilde{N})$ соответственно.

Таким образом, получили базу индукции. Для шага индукции от $\widehat{M}$ к $\widehat{M}-1$ достаточно применить слева ортогональное преобразование $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}$ такое, что первые $n_{\widehat{M}-2}$ столбцов результирующей матрицы $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi)O_{\widehat{M}}$ лежат в $\mathbb{R}^{n_{\widehat{M}-2}}\times 0^{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-2}}$, а остальные элементы, номер строки которых строго больше $n_{\widehat{M}-1}$, остаются без изменений. Следовательно, матрица $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2} & 0_{n_{\widehat{M}-1}\times(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})} \\ 0_{(\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1})\times n_{\widehat{M}-1}} & E_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}$ — ортогональная матрица размера $n_{\widehat{M}-1}$. Далее остается рассмотреть квадратную матрицу $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]$ и применить к ней все приведенные выше (после описания (4)) для $O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}}\varphi$ рассуждения с заменой $\widehat{M}-1$ на $\widehat{M}-2$ и $\widehat{M}$ на $\widehat{M}-1$ в аргументах. А именно, получим следующее.

1. Для блока $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}Q^c_{\widehat{M}-1}$, где $Q=[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]$, ранг матрицы $(\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]^c_{\widehat{M}-1})_{\dim V_{\widehat{M}-1}}$, составленной из его строк с номерами $n_{\widehat{M}-2}+1,\dots,n_{\widehat{M}-1}$, максимален и равен $\dim V_{\widehat{M}-1}$.
2. По построению размер этой матрицы равен $\dim V_{\widehat{M}-1}$.

По определению преобразования $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}$, у строк $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}Q$ с номерами $n_{\widehat{M}-2}+1,\dots,n_{\widehat{M}-1}$ первые $n_{\widehat{M}-2}$ элементов нулевые. Следовательно, в применении преобразования вида (5) нет необходимости.

Дальнейшие преобразования на следующем шаге коснутся только блока $[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi)O_{\widehat{M}}]$, являющегося квадратной невырожденной матрицей размера $n_{\widehat{M}-2}$.

Переход от произвольного $m=2,\dots,\widehat{M}-2$ к $m-1$ осуществляется аналогично.

Таким образом, получили матрицу $D^{\triangle}\varphi(x)$, равную

$$O_{\widetilde{N},1}\cdot\ldots\cdot O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D\varphi O_{\widehat{M}} = \begin{pmatrix} D_1^{\triangle}\varphi(x) & * & \dots & * & * & * \\ 0 & D_2^{\triangle}\varphi(x) & \dots & * & * & * \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & D^{\triangle}_{\widehat{M}-1}\varphi(x) & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D^{\triangle}_{\widehat{M}}\varphi(x) & * \end{pmatrix}. \tag{7}$$

По построению здесь

$$D^{\triangle}_{\widehat{M}}\varphi(x)=\bigl[\bigl(O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}\bigl(D^c_{\widehat{M}}\varphi\bigr)\bigr)_{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}\mathbf{O}_{\widehat{M}}\bigr]$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}$, а

$$D^{\triangle}_{\widehat{M}-1}\varphi(x)=\bigl(\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]^c_{\widehat{M}-1}\bigr)_{\dim V_{\widehat{M}-1}}$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_{\widehat{M}-1}$. Напомним, что $[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]^c_{\widehat{M}-1}$ — часть матрицы $[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]$, составленная из столбцов с номерами $n_{\widehat{M}-2}+1,\dots,n_{\widehat{M}-1}$, а

$$(\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]^c_{\widehat{M}-1})_{\dim V_{\widehat{M}-1}}$$

— часть матрицы $\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]^c_{\widehat{M}-1}$, составленная из строк с номерами $n_{\widehat{M}-2}+1,\dots,n_{\widehat{M}-1}$. Далее, по индукции

$$D^{\triangle}_{\widehat{M}-k}\varphi(x)=\bigl(\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-k-1}[\dots[\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]]\dots]^c_{\widehat{M}-k}\bigr)_{\dim V_{\widehat{M}-k}},$$

где символ $(\cdot)_{\dim V_{\widehat{M}-k}}$ обозначает взятие строк с номерами $n_{\widehat{M}-k-1}+1,\dots,n_{\widehat{M}-k}$, — блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_{\widehat{M}-k}$, и окончательно

$$D_1^{\triangle}\varphi(x)=[\mathbf{O}_{\widetilde{N},1}[\dots[\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-3}[\mathbf{O}_{\widetilde{N},\widehat{M}-2}[O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}D_{\widehat{M}-1}\varphi]]]\dots]]$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_1$.

Так как матрицы дифференциалов $D\varphi(x)$ и $D(\varphi\circ\theta_x)(0)$ совпадают, то и матрица $D^{\triangle}(\varphi\circ\theta_x)(x)$, построенная аналогично (7) для отображения $\varphi\circ\theta_x$, совпадет с (7).

В силу особенностей построения $D^{\triangle}\varphi(x)$ справедлива

Теорема 3.4. *Матрица $D^{\triangle}\varphi(x)$ обладает следующими свойствами.*

1. *Верно*
$$\det\bigl(D\varphi D\varphi^*\bigr) = \det\bigl(D^{\triangle}\varphi(x)(D^{\triangle}\varphi(x))^*\bigr).$$
2. *Справедливо равенство*
$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0))\cap \mathrm{Box}_2(0,r)) \\ = \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker(D^{\triangle}(\varphi\circ\theta_x)(0))\cap \mathrm{Box}_2(0,r)). \quad (9)$$

Доказательство. Первое свойство проверяется непосредственно раскрытием скобок (см. (7)).

Докажем второе свойство. По построению преобразования $O_{\widetilde{N},1},\dots,O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1}$ не влияют на ядро, а повлиять может только ортогональное преобразование $O_{\widehat{M}}$. По построению $O_{\widehat{M}}$ ортогонально преобразовывает базис $V_{\widehat{M}}$ в фиксированной точке (см. (5)), а остальные векторы оставляет без изменений. Тогда
$$O_{\widehat{M}}(\mathrm{Box}_2(0,r)) = \mathrm{Box}_2(0,r).$$
Кроме того,
$$\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)) = O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})).$$
Отсюда выводим
$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0))\cap \mathrm{Box}_2(0,r)) \\ = \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}}))\cap O_{\widehat{M}}\,\mathrm{Box}_2(0,r)) \\ = \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})\cap \mathrm{Box}_2(0,r))) \\ = \mathscr{J}(O_{\widehat{M}}|_{\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})},0)\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})\cap \mathrm{Box}_2(0,r)) \\ = 1\cdot\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})\cap \mathrm{Box}_2(0,r)),$$
а так как $\ker\bigl(D^{\triangle}(\varphi\circ\theta_x)(0)\bigr) = \ker(D(\varphi\circ\theta_x)(0)O_{\widehat{M}})$, теорема доказана.

Таким образом, мы привели вид классического дифференциала φ к виду, аналогичному структуре классического дифференциала контактного отображения. Он определяется однозначно с точностью до ортогонального отображения.

Построим аналог субриманова дифференциала для неконтактного отображения, используя (7).

Определение 3.5. В нехарактеристической точке x рассмотрим матрицу $\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)$, равную
$$\begin{pmatrix} D_1^{\triangle}\varphi(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & D_2^{\triangle}\varphi(x) & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & 0_{\widetilde{N}\times(N-\widehat{N})} \\ 0 & 0 & \dots & D_{\widehat{M}-1}^{\triangle}\varphi(x) & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{\widehat{M}}^{\triangle}\varphi(x) & \end{pmatrix}, \quad (8)$$
где блоки $D_k^{\triangle}\varphi(x)$ совпадают с таковыми в (7), $k=1,\dots,\widehat{M}$. Эту матрицу будем называть *дифференциалом φ субриманова типа* в точке x.

Из построения видно, что (8) имеет «блочно-диагональный» вид. Докажем следующее свойство однозначности определения.

Лемма 3.6. *Пусть x — нехарактеристическая точка. Дифференциал φ субриманова типа* (8) *определяется однозначно с точностью до некоторого ортогонального преобразования. Кроме того, определители вида*

$$\det(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)^*)$$

всех матриц этого класса совпадают.

Доказательство. Фиксируем нехарактеристическую точку x и проведем индукцию по номеру V_k, $k = \widehat{M}, \dots, 1$.

База индукции для $k = \widehat{M}$ доказывается аналогично [2, лемма 4.13] почти дословно с очевидными изменениями. А именно, достаточно повторить рассуждения для второго множителя с заменой $D_1\varphi$ на $D_{\widehat{M}-1}\varphi$ и $D_{\widehat{M}}\varphi \setminus D_1\varphi$ на $D^c_{\widehat{M}}\varphi = D_{\widehat{M}}\varphi \setminus D_{\widehat{M}-1}\varphi$.

При переходе от k к $k-1$ при $k > 2$ рассуждения аналогичны: достаточно заменить в предыдущих рассуждениях $D_{\widehat{M}-1}\varphi$ на

$$O_{\widetilde{N},k-1} \cdot \ldots \cdot O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1} D_{k-2}\varphi \tag{9}$$

и $D^c_{\widehat{M}}\varphi$ на

$$(O_{\widetilde{N},k-1} \cdot \ldots \cdot O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1} D\varphi)^c_{k-1} \tag{10}$$

и рассмотреть матрицы, составленные из первых n_{k-1} строк (9) и (10), к которым будет применяться преобразование $\mathbf{O}_{\widetilde{N},k-2}$. Если же $k = 2$, то рассуждения при переходе к $k = 1$ аналогичны таковым из [2, лемма 4.13] для первого множителя. Лемма доказана.

4. Меры на уровнях и формула коплощади

Цель данного раздела — описать риманову и субриманову меры на множествах уровня в окрестностях нехарактеристических точек. Для этого будут сравнены структуры ядер дифференциала и дифференциала субриманова типа, а также меры пересечения этих ядер с субримановыми шарами. Так как базис $\ker D\varphi$ отличается от базиса $\ker D^{\triangle}\varphi$ только ортогональным преобразованием внутри $V_{\widehat{M}}$ и на метрические свойства эта разница не влияет в силу п. 2 теоремы 3.4 (т. е. сами ядра как множества точек совпадают), то без ограничения общности будем описывать $\ker D^{\triangle}\varphi$ и сравнивать его структуру со структурой $\ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi$. Если x — нехарактеристическая точка, то будем сравнивать структуры $\ker D^{\triangle}\varphi_x$ и $\ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x$, где $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$.

Обозначение 4.1 (ср. [2]). Обозначим символом $\mathscr{B}_{\widetilde{N}}$ набор базисных векторов, сумма степеней которых равна значению (1), а символом μ — сумму степеней $N - \widetilde{N}$ базисных векторов, не входящих в $\mathscr{B}_{\widetilde{N}}$. Она равна

$$\mu = \widehat{M}(\widehat{N} - \widetilde{N}) + \sum_{k=\widehat{M}+1}^{M} k \dim V_k.$$

Введем следующее вспомогательное понятие.

Определение 4.2. Рассмотрим окрестность нуля как прообраз окрестности точки $x \in \mathbb{G}$ при отображении нормальных координат θ_x. Если $w = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — стандартный вектор, совпадающий со значением $\left(\theta_x^{-1}\right)_*\langle X_i\rangle$ в нуле, $i = 1, \dots, N$, то *степень* w равна $\max\limits_{i=1,\dots,N}\bigl\{\deg X_i : w_i \neq 0\bigr\}$.

Обозначение 4.3. Положим

$$\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} = \omega_{\widehat{N}-\widetilde{N}} \prod_{k=\widehat{M}+1}^{M} \omega_{\dim V_k}.$$

Теорема 4.4. *Пусть точка x не является характеристической; рассмотрим отображение $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$. Верны следующие утверждения.*

1. *Ядро $D^{\triangle}\varphi_x(0)$ состоит из $\widehat{N} - \widetilde{N}$ векторов степени $\widehat{M}$, равных*
$$\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k,$$
где степень w_k строго меньше $\widehat{M}$, $k = \widetilde{N}+1, \dots, \widehat{N}$, и $N - \widehat{N}$ векторов степеней $\widehat{M}+1, \dots, M$, равных
$$\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k,$$
где степень w_k строго меньше $\deg X_k$, $k = \widehat{N}+1, \dots, N$.
2. *Вычисляемая через значение риманова тензора $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$-мера пересечения $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и $\mathrm{Box}_2(x, r)$ равна*
$$\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \frac{\sqrt{\det D\varphi(x)D\varphi(x)^*}}{\sqrt{\det(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)^*)}} \cdot \sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(x)})} \cdot r^{\mu} \cdot (1 + o(1)), \quad (11)$$
где $g|_{\ker D\varphi(x)}$ — ограничение риманова тензора на $\ker D\varphi(x)$, а $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно в некоторой окрестности точки x.

Замечание 4.5. В [2, теорема 4.14] дано явное описание векторов ядра. В рассматриваемом здесь случае можно сделать аналогично с использованием аргументов [2] почти дословно.

Доказательство теоремы 4.4. Для доказательства первого утверждения и описания структуры ядра $D\varphi$ рассмотрим матрицу $D^{\triangle}\varphi(x) = O_{\widetilde{N},1} \cdot \ldots \cdot O_{\widetilde{N},\widehat{M}-1} D\varphi O_{\widehat{M}}$, совпадающую с матрицей $D^{\triangle}\varphi_x(0)$, и адаптируем под нее идею доказательства [2, теорема 4.14]. Опишем сначала $\widehat{N} - \widetilde{N}$ векторов степени $\widehat{M}$, лежащих в ядре $D^{\triangle}\varphi_x(0)$. Прежде всего, напомним вид этой матрицы:

$$\begin{pmatrix} D_1^{\triangle}\varphi(x) & * & \dots & * & * & * \\ 0 & D_2^{\triangle}\varphi(x) & \dots & * & * & * \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & D_{\widehat{M}-1}^{\triangle}\varphi(x) & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{\widehat{M}}^{\triangle}\varphi(x) & * \end{pmatrix}.$$

Пусть $\widetilde{N}+1 \leq k \leq \widehat{N}$. По построению $D^{\triangle}\varphi(x)$ вектор $D^{\triangle}\varphi(x)\langle\mathbf{e}_k\rangle$ лежит в $\mathbb{R}^{n_{\widehat{M}-1}} \times 0^{\widetilde{N}-n_{\widehat{M}-1}}$ (см. (6)). Рассмотрим его проекцию $[D^{\triangle}\varphi(x)\langle\mathbf{e}_k\rangle]$ на $\mathbb{R}^{n_{\widehat{M}-1}}$ и подействуем на результат матрицей $-\mathscr{D}_{\widehat{M}-1}^{-1}$ размера $n_{\widehat{M}-1}$, где (квадратная) матрица $\mathscr{D}_{\widehat{M}-1}$ равна

$$\mathscr{D}_{\widehat{M}-1} = \begin{pmatrix} D_1^{\triangle}\varphi(x) & * & \dots & * \\ 0 & D_2^{\triangle}\varphi(x) & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & D_{\widehat{M}-1}^{\triangle}\varphi(x) \end{pmatrix}.$$

Получим
$$\widehat{w}_k = -\mathscr{D}^{-1}_{\widehat{M}-1}[D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle]. \tag{12}$$
Рассмотрим далее вектор w_k, полученный в результате вложения $\widehat{w}_k$ в $\mathbb{R}^N$, где первые $n_{\widehat{M}-1}$ координат совпадают с таковыми вектора $\widehat{w}_k$, а остальные равны нулю. Положим
$$\mathscr{D}^{-1,0}_{\widehat{M}-1} = \begin{pmatrix} \mathscr{D}^{-1}_{\widehat{M}-1} & 0_{n_{\widehat{M}-1}\times(N-n_{\widehat{M}-1})} \\ 0_{(N-n_{\widehat{M}-1})\times n_{\widehat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\widehat{M}-1})\times(N-n_{\widehat{M}-1})} \end{pmatrix}$$
и
$$[D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle]^0 = \begin{pmatrix} D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle \\ 0^{N-\widetilde{N}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$
Тогда, во-первых, $w_k = -\mathscr{D}^{-1,0}_{\widehat{M}-1}[D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle]^0$, и, во-вторых, из (12) и аргументов, аналогичным приведенным выше, следует, что
$$-[D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle]^0 = \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{\widehat{M}-1} & 0_{n_{\widehat{M}-1}\times(N-n_{\widehat{M}-1})} \\ 0_{(N-n_{\widehat{M}-1})\times n_{\widehat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\widehat{M}-1})\times(N-n_{\widehat{M}-1})} \end{pmatrix}\langle w_k\rangle, \tag{14}$$
а так как в силу построения у w_k ненулевыми могут быть только первые $n_{\widehat{M}-1}$ координат, то правая часть (14) совпадает с вектором
$$\begin{pmatrix} D^{\triangle}\varphi(x)\langle w_k\rangle \\ 0^{N-\widetilde{N}} \end{pmatrix}. \tag{15}$$
Следовательно, для суммы $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k$ в силу (14), (13) и (15) имеем
$$D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{w}_k\rangle = D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle + D^{\triangle}\varphi(x)\langle w_k\rangle = 0.$$
Подчеркнем, что степень w_k строго меньше, чем $\widehat{M}$.

Пусть теперь $k > \widehat{N}$. Тогда $\deg X_k > \widehat{M}$. Рассмотрим (квадратную) матрицу
$$\mathscr{D}_{\widehat{M}} = \begin{pmatrix} D^{\triangle}_1\varphi(x) & * & \dots & * \\ 0 & D^{\triangle}_2\varphi(x) & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & D^{\triangle}_{\widehat{M}}\varphi(x) \end{pmatrix}$$
размера $\widetilde{N}$, вектор $\widehat{w}_k = -\mathscr{D}^{-1}_{\widehat{M}}[D^{\triangle}\varphi(x)\langle \mathbf{e}_k\rangle]$, а также вектор w_k, полученный в результате вложения $\widehat{w}_k$ в $\mathbb{R}^N$, где первые $\widetilde{N}$ координат совпадают с таковыми вектора $\widehat{w}_k$, а остальные равны нулю.

Далее для этого случая остается применить рассуждения, аналогичные приведенным выше (ср. [2, теорема 4.14]). Мы получим, что $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k$ будет принадлежать ядру $D^{\triangle}\varphi(x)$, при этом степень w_k не будет превосходить $\widehat{M}$, что строго меньше, чем $\deg X_k$. Первое утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2 и вычисление меры $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$ для нехарактеристической точки x следует схеме, приведенной в [2, теорема 4.14] с очевидными изменениями (например, что в рассматриваемом общем случае $\widehat{M} \geq 2$). Чтобы избежать повторов, опишем здесь основные идеи доказательства.

Прежде всего для отображения φ_x строим линейное отображение
$$\psi : \ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x \to \ker D^{\triangle}\varphi_x$$

следующим образом:

$$\sum_{k=\widetilde{N}+1}^{N} u_k \mathbf{e}_k \overset{\psi}{\mapsto} \sum_{k=\widetilde{N}+1}^{N} u_k \mathbf{w}_k, \tag{16}$$

и методами, аналогичными примененным в [14], находим его коэффициент искажения, равный

$$\mathscr{J}(\psi, 0) = \frac{\sqrt{\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*)}}{\sqrt{\det(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x))^*)}}. \tag{17}$$

Кроме того, из выбора набора $\{w_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$ (и соответственно $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$) будет следовать, что

$$\psi(\ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r)) = S,$$

где

$$\ker D^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r(1 - o(1))) \subset S \subset \ker D^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r(1 + o(1))), \tag{18}$$

и $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно в некоторой компактной окрестности $x = \theta_x(0)$.

Из (18) вытекает, что коэффициент искажения отображения

$$\psi : \ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r) \to S = \psi(\ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r))$$

можно искать стандартно как коэффициент искажения линейного отображения. Следовательно [14], он равен правой части (17). При этом

$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker \widehat{D}^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r)) = \omega_{\widehat{N}-\widetilde{N}} \prod_{k=\widehat{M}+1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot r^{\mu} = \omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot r^{\mu}. \tag{19}$$

Далее, для перехода от $\ker D^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$ к $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$ рассмотрим C^1-гладкую проекцию пересечения $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$ на множество Q такое, что

$$\ker D^{\triangle}\varphi_x(0) \cap \mathrm{Box}_2(0, r(1 - o(1))) \subset Q \subset \ker D^{\triangle}\varphi_x(0) \cap \mathrm{Box}_2(0, r(1 + o(1))),$$

построенную, как в доказательстве теоремы 4.14 в [2], локальное искажение меры в нуле у которой равно единице, где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на некоторой компактной окрестности $x = \theta_x(0)$. Аргументы используют свойство степеней векторов $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$ и образов этих векторов при $O_{\widehat{M}}$; см. доказательство второго утверждения теоремы 3.4, а именно то, что их степени не меньше $\widehat{M}$, тогда как существует $\widetilde{N}$ линейно независимых некасательных векторов, степени которых не превосходят $\widehat{M}$. Кроме того, используется вспомогательная квазиметрика d_2^0, равная для точек с координатами $(v_1, \dots, v_N)$ и $(w_1, \dots, w_N)$ относительно нуля значению

$$\max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg X_j=1} (w_j - v_j)^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg X_j=2} (w_j - v_j)^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \\ \dots, \Big(\sum_{j:\deg X_j=M} (w_j - v_j)^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Big\},$$

а в рассуждениях используются соответственно степени $\widehat{M}$ и $1/\widehat{M}$ вместо 2 и 1/2. Из свойства построенной проекции вытекает, что

$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}\big(\varphi_x^{-1}(\varphi(x))\cap \mathrm{Box}_2(0,r)\big) = (1+o(1))\cdot \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\ker D^{\triangle}\varphi_x \cap \mathrm{Box}_2(0,r)),$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно в некоторой компактной окрестности нуля. Из этого соотношения с учетом (19) и (17) при переходе с окрестности нуля на окрестность точки x следует (11). Второе утверждение и вся теорема доказаны.

Замечание 4.6. Отображение $\xi = \psi^{-1}$, равное

$$\sum_{k=\widetilde{N}+1}^{N} u_k \mathbf{w}_k \overset{\xi}{\mapsto} \sum_{k=\widetilde{N}+1}^{N} u_k \mathbf{e}_k$$

и обратное к (16), является проекцией на $\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$ вдоль $\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$. Это следует из того, что $(\psi(u)-u)\perp u$ (доказательство аналогично схеме для [2, теорема 4.14]), или, иными словами, если $v=\psi(u)$, то $(v-\xi(v))\perp\xi(v)$. Так как ξ принимает значения на $\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$, то ортогональным к области значений пространством является $\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$. Иными словами, на $\mathbb{R}^N$ при помощи некоторого ортогонального отображения можно поменять базис таким образом, что отображение ξ в нем будет иметь вид

$$(w_1,\dots,w_{\widetilde{N}},w_{\widetilde{N}+1},\dots w_N)\overset{\xi}{\mapsto}(0,\dots,0,w_{\widetilde{N}+1},\dots,w_N).$$

Следовательно, коэффициент искажения ξ не превосходит единицы.

Введем понятие субримановой меры Хаусдорфа на множествах уровня.

Определение 4.7. Пусть φ удовлетворяет условиям предположения 1.15. Значение *субримановой меры* для $A\subset\varphi^{-1}(t)\subset\mathbb{G}$ равно

$$\mathscr{H}^{\mu}(A)=\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}}\cdot\lim_{\delta\to 0}\inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\mu} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}_2(x_i,r_i)\supset A,\ x_i\in A,\ r_i<\delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Фактически $\mathscr{H}^{\mu}$ является функцией множества, так как ее определение не является стандартным определением меры Хаусдорфа в силу условия $x_i\in A$, $i\in\mathbb{N}$. Поэтому утверждение о том, что и такая функция является мерой (в частности, обладает свойством счетной аддитивности) необходимо доказывать. Один из вариантов доказательства — установить квазиаддитивность [16, 17] функции множества

$$\Phi : A\mapsto \mathscr{H}^{\mu}(A\setminus\chi), \tag{20}$$

где $A\subset\varphi^{-1}(t)$, и показать, что она абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$ на множествах уровня. Отсюда будет следовать дифференцируемость и восстанавливаемость по производной относительно (счетно-аддитивной) меры $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$, откуда, в свою очередь, получится счетная аддитивность $\mathscr{H}^{\mu}$.

Аналогичное утверждение установлено в [12] для функций множества, определенных для классов поверхностей-образов. Так как схема доказательства квазиаддитивности $\mathscr{H}^{\mu}$ на множествах уровня не так очевидна, как в случае меры $\mathscr{H}^{\nu}$ на $\mathbb{G}$, приведем ниже основные аргументы доказательства. Кроме того, некоторые идеи из [15] будут использованы при получении основных результатов. Прежде всего, напомним определения.

Определение 4.8 (см., например, [16, 17]). Функция множества Φ называется *квазиаддитивной*, если для любого конечного набора попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$, лежащих в некотором открытом шаре B_0, справедливо

$$\sum_{j=1}^{J} \Phi(B_j) \leq \Phi(B_0).$$

Теорема 4.9. *Пусть x — нехарактеристическая точка. Тогда для множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$, лежащих в некоторой окрестности x, функция множества* (20) *квазиаддитивна.*

Доказательство. В силу следствия 2.12 множество $\Omega \setminus \chi$ открыто. Поэтому множество $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ открыто в топологии $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и для точки x существует такая окрестность $U(x)$, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \overline{U}(x)$ не содержит точек χ, где $\overline{U}(x)$ — замыкание окрестности $U(x)$.

Рассмотрим $B_0 \Subset U(x)$ и конечный набор попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^{J} B_j \subset B_0.$$

Наша задача — показать, что для каждого покрытия $\{\mathrm{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ из определения 4.7, соответствующая которому сумма S достаточно близка к точной нижней грани таких сумм, существуют покрытия множеств $B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, $j = 1, \dots, J$, такие, что, сложив соответствующие им суммы, получим значение, которое может превосходить S не более, чем на малую величину, взятую произвольным образом.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $j = 1, \dots, J$ рассмотрим замкнутый шар $\widehat{B}_j \subset B_j$ такой, что $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) < \varepsilon$. Для данного набора $\{\widehat{B}_j\}_{j=1}^J$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим такое $\delta > 0$, что если $w \notin B_j$, то $\mathrm{Box}_2(w, r) \cap \widehat{B}_j = \varnothing$ при $r < \delta$. Так как $B_0 \Subset U(x)$, также можно считать, что

$$\mathrm{Box}_2(w, r) \subset U(x) \text{ при } w \in B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \text{ и } r < \delta. \tag{21}$$

Далее доказательство проходит по следующей схеме.

1. Для данных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ рассматриваем покрытие $\{\mathrm{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ из определения 4.7, соответствующая которому сумма отличается от величины

$$\mathscr{H}_\delta^\mu(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) = \omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\mu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset (B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))),\ x_i \in B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)),\ r_i < \delta\Big\}$$

не более, чем на $\varepsilon > 0$.

2. Для каждого $j = 1, \dots, J$ рассмотрим набор $\{\mathrm{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ из тех шаров покрытия $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, центры x_{j_i} которых лежат в $B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Эти наборы не пересекаются, а по выбору $\delta > 0$ верно

$$\widehat{B}_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}).$$

3. Для каждого множества $(B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, $j = 1, \dots, J$, построим новые покрытия, используя теорему Витали. По этой теореме выберем дизъюнктные наборы $\{\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $w_{j_k} \in (B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ и

$$\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset (B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)), \quad k \in \mathbb{N},$$

такие, что

$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}\Big((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\Big) = 0$$

и

$$(B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})$$

для некоторого $K < \infty$, зависящего от структуры группы $\mathbb{G}$, $j = 1, \dots, J$. Без ограничения общности можно считать, что $K\rho_{j_k} < \delta$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, J$.

4. Заменим наборы $\{\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ на наборы $\{\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, J$. Так как $K\rho_{j_k} < \delta$, то $\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k}) \Subset U(x)$ в силу (21), $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, J$. Из (11) следует, что

$$\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \rho_{j_k}^{\mu} = \frac{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)))}{\sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(w_{j_k})})}} \times \frac{\sqrt{\det(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(w_{j_k})\widehat{D}^{\triangle}\varphi(w_{j_k})^*)}}{\sqrt{\det D\varphi(w_{j_k})D\varphi(w_{j_k})^*}}, \qquad (22)$$

с точностью до множителя $1 + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $\rho_{j_k} \to 0$ равномерно на $U(x)$. Это следует из равномерности на $\overline{U}(x)$ величин $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) (по выбору $\overline{U}(x) \Subset \Omega \setminus \chi$), а также из равномерной непрерывности и отделенности от нуля на $\overline{U}(x)$ входящих в (22) величин. Тогда имеем

$$\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{N}} (K\rho_{j_k})^{\mu} = K^{\mu} \cdot \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot (\rho_{j_k})^{\mu}$$
$$\leq \widehat{K} \cdot K^{\mu} \cdot \sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) < J \cdot \widehat{K} \cdot K^{\mu} \cdot \varepsilon,$$

где $\widehat{K} < \infty$, так как

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(\mathrm{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) \leq \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))),$$

а величина

$$\frac{\sqrt{\det(\widehat{D}^{\triangle}\varphi(w_{j_k})\widehat{D}^{\triangle}\varphi(w_{j_k})^*)}}{\sqrt{\det D\varphi(w_{j_k})D\varphi(w_{j_k})^*}} \cdot \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(w_{j_k})})}}$$

ограничена равномерно на $U(x)$ (см. замечание 4.6 и предположение 1.15).

5. Таким образом, для каждого B_j построены покрытия

$$\{\mathrm{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}), \mathrm{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})\}_{i,k\in\mathbb{N}}$$

такие, что

$$B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k}),$$

$j = 1, \dots , J$, и

$$\omega_{\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \sum_{j=1}^{J}\Bigl(\sum_{i\in\mathbb{N}} r_{j_i}^{\mu} + \sum_{k\in\mathbb{N}}\bigl(K\rho_{j_k}\bigr)^{\mu}\Bigr) \le \mathscr{H}^{\mu}_{\delta}(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) + \varepsilon\bigl(1 + J \cdot \widehat{K} \cdot K^{\mu}\bigr).$$

При переходе к точным нижним граням в левой и правой частях и при $\delta \to 0$, в силу того, что $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, выводим

$$\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{\mu}(B_j) \le \mathscr{H}^{\mu}(B_0).$$

Иными словами, функция множества (20), определяемая значением $\mathscr{H}^{\mu}$, квазиаддитивна.

Теорема доказана.

Установим абсолютную непрерывность $\mathscr{H}^{\mu}$ относительно $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$ на $(\Omega \setminus \chi) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, а также оценку сверху $\mathscr{H}^{\mu}$ через $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$.

Теорема 4.10. *Пусть $x \in \Omega \setminus \chi$, а $B \Subset \Omega$ такой шар, что $x \in B$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *На $(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi) \cap B$ функция множества $\mathscr{H}^{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$.*

2. *Существует зависящее только от структуры $\mathbb{G}$ значение $T < \infty$ такое, что для $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi) \cap B$ верно $\mathscr{H}^{\mu}(A) \le T \cdot \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)$.*

Доказательство. Напомним, что так как дифференциал φ всюду невырожденный, а само отображение принадлежит классу C^1 в классическом смысле, то, во-первых, поверхности уровня являются поверхностями класса C^1, и, во-вторых, величина $o(1)$ из определения дифференцируемости равномерна на компактных подмножествах. Кроме того, так как $B \Subset \Omega$, существует такой шар $B' \supset \overline{B}$, что $B' \Subset \Omega$, где $\overline{B}$ — замыкание B.

Докажем первое утверждение. Пусть $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x))\setminus\chi)\cap B$ и $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем покрытие множества A шарами $\{B(x_i, r_i)\}$, построенными по метрике, определяемой римановым тензором g на $\mathbb{G}$, такими, что $B(x_i, r_i) \Subset B'$ и

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{N-\widetilde{N}} < \varepsilon.$$

Это возможно в силу определения меры Хаусдорфа. Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и пересечение $A_i = B(x_i, r_i) \cap A$. Представим его в виде

$$A_i = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{i,m},$$

где $A_{i,m} = \{w \in A_i : d_2(w, \chi) \ge 1/m\}$. Тогда $A_{i,m} \subset B_{i,m}$, где

$$B_{i,m} = \{w \in B(x_i, r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) \ge 1/m\}.$$

По определению $B_{i,m}$ является подмножеством компактного множества

$$\widetilde{B}_{i,m} = \{w \in \overline{B(x_i, r_i)} \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) \ge 1/m\},$$

где $\overline{B(x_i, r_i)}$ — замыкание $B(x_i, r_i)$. На таком компактном множестве величина $o(1)$ из соотношения (18) равномерна, так как $\widetilde{B}_{i,m} \cap \chi = \varnothing$, векторы $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\widetilde{N}+1}^{N}$ из теоремы 4.4 зависят непрерывно от точек $\widetilde{B}_{i,m}$ в силу того, что все определяющие их величины непрерывны, невырожденны и ограничены на $\widetilde{B}_{i,m}$. Следовательно, величина $o(1)$ из соотношения (18) равномерна и на каждом $B_{i,m}$, $i, m \in \mathbb{N}$.

По определению верно $A_{i,m} \subset A_{i,m+1}$ и

$$B_{i,m} \subset \{w \in B(x_i, r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) > 1/(m+1)\} \subset B_{i,m+1}, \tag{23}$$

$m \in \mathbb{N}$. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим семейство

$$\{\mathrm{Box}_2(w, s) : w \in A_{i,m},\ s > 0, \mathrm{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,m+1}\}.$$

Оно покрывает множество $A_{i,m}$ в силу включения (23). Пусть $\delta > 0$ таково, что если $s < \delta$, $w \in A_{i,m}$ и $v \in \mathrm{Box}_2(w, s)$, то $d_2(v, \chi) > 1/(m+1)$, т. е. $\mathrm{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,m+1}$. Кроме того, будем считать, что $\delta > 0$ выбрано таким образом, что величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) достаточно малы на $B_{i,m+1}$. Подчеркнем, что с ростом m значение $\delta = \delta(m)$ будет уменьшаться. Применим к этому семейству теорему Витали и выберем такой дизъюнктный набор $\{\mathrm{Box}_2(w_{i,m,j}, s_{i,m,j}) : w_{i,m,j} \in A_{i,m},\ s_{i,m,j} < \delta/L\}_{j \in \mathbb{N}}$, где $1 \leq L < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$, что

$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}\Big(A_{i,m} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{i,m,j}, s_{i,m,j})\Big) = 0 \quad \text{и} \quad A_{i,m} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{i,m,j}, Ls_{i,m,j}).$$

Тогда аналогично п. 4 доказательства теоремы 4.9 выводим (см. (22))

$$L^\mu \sum_{j \in \mathbb{N}} s_{i,m,j}^\mu \leq \widehat{L} \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(B_{i,m+1}), \tag{24}$$

где константа $\widehat{L} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$. Здесь, в частности, использована равномерность величины $o(1)$ из определения дифференцируемости на $B' \supset B(x_i, r_i)$ и величины $o(1)$ из соотношения (18) на $B_{i,m+1}$.

Далее, имеем

$$A_i = A_{i,m} \cup \bigcup_{p \in \mathbb{N}, p > m} (A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}).$$

Тогда $A_{i,p} \setminus A_{i,p-1} \subset B_{i,p} \setminus B_{i,p-1}$, что следует из определения этих множеств. Фиксируем $p \in \mathbb{N}$, $p > m$, рассмотрим покрывающее множество $A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}$ (см. (23)) семейство

$$\{\mathrm{Box}_2(w, s) : w \in A_{i,p} \setminus A_{i,p-1},\ s > 0, \mathrm{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,p+1} \setminus B_{i,p-1}\}$$

и применим к нему теорему Витали. В результате получим набор

$$\{\mathrm{Box}_2(w_{i,p,j}, s_{i,p,j}) : w_{i,p,j} \in A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}, s_{i,p,j} < \delta/L\}_{j \in \mathbb{N}}$$

такой, что

$$\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}\Big((A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{i,p,j}, s_{i,p,j})\Big) = 0$$

и

$$A_{i,p} \setminus A_{i,p-1} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(w_{i,p,j}, Ls_{i,p,j}),$$

где $L < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$, а $\delta = \delta(p) > 0$ выбрано таким образом, что величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) достаточно малы на $B_{i,p+1}$. Тогда верно аналогичное (24) соотношение

$$L^\mu \sum_{j\in\mathbb{N}} s^\mu_{i,p,j} \leq \widehat{L}\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(B_{i,p+1} \setminus B_{i,p-1}),$$

где константа $\widehat{L} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$. Повторяя построения для всех $p > m$, окончательно выводим

$$L^\mu \cdot \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} s^\mu_{i,m,j} + \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} s^\mu_{i,p,j}\Big) \leq 2\widehat{L}\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(B(x_i,r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))).$$

Суммируя по всем $i \in \mathbb{N}$, получаем, что построено покрытие множества A из определения $\mathscr{H}^\mu$ такое, что соответствующая ему сумма не превосходит $\widehat{C}\varepsilon$, где $\widehat{C} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$ (с учетом предположения 1.15 на отделенность от нуля и ограниченность значения $\sqrt{\det(g(x))}$, и его абсолютной непрерывности). Следовательно, первое утверждение доказано.

Перейдем к второму утверждению. Если $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) = 0$, то все доказано в первом утверждении. Пусть теперь $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем покрытие множества A шарами $\{B(x_i,r_i)\}$ такими, что $B(x_i,r_i) \Subset B'$ и

$$\Big|\omega_{N-\widetilde{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{N-\widetilde{N}} - \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)\Big| < \varepsilon\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)$$

(утверждение имеет смысл, когда $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) < \infty$; в противном случае оценка $\mathscr{H}^\mu(A) \leq \infty$ тривиальна). Далее остается повторить рассуждения доказательства утверждения об абсолютной непрерывности. Теорема доказана.

Следствие 4.11. *Функция множества $\mathscr{H}^\mu$ абсолютно непрерывна относительно $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$ на $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$.*

Доказательство. Пусть $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) = 0$. Рассмотрим покрытие Витали этого множества шарами $\{B(x,r) : x \in A,\ B(x, L_{\mathbb{G}}r) \Subset \Omega\}$, где $L_{\mathbb{G}}$ — зависящая только от структуры группы $\mathbb{G}$ константа из теоремы Витали: если выбрана дизъюнктная система $\{B(x_i,r_i)\}$, покрывающая A с точностью до множества нулевой меры, то $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, L_{\mathbb{G}}r_i) \supset A$. Далее остается выбрать такую систему и применить рассуждения доказательства п. 1 теоремы 4.10 для каждого из шаров $B(x_i, L_{\mathbb{G}}r_i)$ и величины $\varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$. Следствие доказано.

Следствие 4.12. *Существует $T < \infty$ такое, что для $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi)$ верно $\mathscr{H}^\mu(A) \leq T \cdot \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)$.*

Доказательство. Пусть $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) > 0$. Рассмотрим покрытие Витали этого множества шарами $\{B(x,r) : x \in A,\ B(x,r) \Subset \Omega\}$. Далее остается выбрать дизъюнктную систему, покрывающую множество A с точностью до множества меры нуль, применить рассуждения доказательства п. 2 теоремы 4.10 для каждого из шаров $B(x_i,r_i)$ и величины $\varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$ (с учетом того, что константа $T < \infty$ зависит только от группы), и аргументы доказательства следствия 4.11 для оставшегося множества меры нуль, где вместо $\varepsilon > 0$ взята величина $\varepsilon \cdot \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)$ (утверждение имеет смысл, когда $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) < \infty$; в противном случае оценка $\mathscr{H}^\mu(A) \leq \infty$ тривиальна). Получим покрытие, которое оценивается сверху величиной $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A)$, а при переходе к пределу выведем требуемую оценку. Следствие доказано.

Из доказанных результатов и [16, 17] вытекает

Теорема 4.13. *Пусть $x \in \Omega \setminus \chi$. Если множество конечной $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$-меры $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и*

$$d_2(w, \chi) > \sigma > 0 \text{ для всех } w \in A \text{ и некоторого } \sigma > 0, \tag{25}$$

то производная $D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^{\mu}(w)$ существует для всех $w \in A$ и

$$\mathscr{H}^{\mu}(A) = \int\limits_A D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^{\mu}(w)\, d\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(w).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теорем 4.9, 4.10 и [16, 17]. Так как мы установили квазиаддитивность для наборов $\{B_j\}_{j=0}^{J}$, $J \in \mathbb{N}$, не содержащих точки множества χ, то это же свойство будет верно и для пересечений шаров с множеством

$$\Omega_\sigma = \{w \in \Omega : d_2(w, \chi) > \sigma > 0\}.$$

Действительно, это следует из того, что каждое пересечение $B_j \cap \Omega_\sigma$, $j = 0, \dots, J$, является открытым множеством, находящимся на положительном расстоянии от множества χ. Поэтому для них почти дословно применимы аргументы доказательства теоремы 4.9, где при подборе радиусов шаров покрытия учитывается условие, что эти шары должны также лежать на положительном расстоянии от χ. Это возможно, так как $\sigma > 0$ фиксировано. Кроме того, $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$-мера пересечения множества A с рассматриваемыми шарами по условию конечна. По этой причине замкнутые шары, свойства которых используются в доказательстве теоремы 4.9, существуют. Действительно, если $B(x, R)$ — произвольный шар, $R > 0$, и $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A \cap B(x, R)) < \infty$, то это значение совпадает с пределом $\lim\limits_{k\to\infty} \mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A \cap \overline{B(x, R - 1/k)})$, где $\overline{B(x, R - 1/k)}$ — замыкание шара $B(x, R - 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, так как

$$A \cap B(x, R) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A \cap \overline{B(x, R - 1/k)}.$$

Далее остается воспользоваться результатами [16, 17] и следствием 4.11. Теорема доказана.

Справедлив следующий локальный результат.

Теорема 4.14. *Для шаров $\mathrm{Box}_2(x, r)$ таких, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(x, r) \Subset \Omega \setminus \chi$, верно*

$$\mathscr{H}^{\mu}(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(x, r)) = \omega_{\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}}} \cdot r^{\mu} \cdot (1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по x на компактных подмножествах $\Omega \setminus \chi$.

Доказательство. Для вывода утверждения теоремы достаточно применить схему, основанную на непосредственном определении $\mathscr{H}^{\mu}$ и свойстве (11), установленном в теореме 4.4, с учетом равномерности величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и величины $o(1)$ из соотношения (18) на компактных подмножествах $\Omega \setminus \chi$. В частности, так как $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_2(x, r) \Subset \Omega \setminus \chi$, существует компактная окрестность $U \Subset \Omega\setminus\chi$ такая, что $\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_2(x,r) \Subset U$. Тогда при построении покрытий из определения $\mathscr{H}^\mu$ достаточно выбрать такое $\delta > 0$, что если $w \in \varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_2(x,r)$ и $\rho < \delta$, то $\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_2(w,\rho) \subset U$. См. схему и детали в [14, теорема 3.17; 15]; см. также [1]. Теорема доказана.

Замечание 4.15. Если $x \in \Omega\setminus\chi$, то существует такое $r > 0$, что $\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap \mathrm{Box}_2(x,r) \Subset \Omega \setminus \chi$.

Отсюда следует

Теорема 4.16. *Производная* $D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^\mu(x)$ *равна*

$$D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^\mu(x) = \frac{\sqrt{\det \widehat{D}^\triangle\varphi(x)\widehat{D}^\triangle\varphi(x)^*}}{\sqrt{\det D\varphi(x)D\varphi(x)^*}\sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}},$$

для всех $x \in \Omega \setminus \chi$.

Замечание 4.17. В силу замечания 4.6 верно

$$D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^\mu(x) \le \frac{1}{\sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}}.$$

Справедливо утверждение, усиливающее теорему 4.13.

Теорема 4.18. *Теорема* 4.13 *верна для любых множеств* $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))\setminus\chi$ *конечной* $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$*-меры без условия* (25).

Доказательство. Заметим, что так как $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) < \infty$, где $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))\setminus \chi$, то для таких множеств интеграл

$$\int\limits_A \frac{d\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(x)}{\sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}}$$

всегда сходится в силу предположения 1.15.

Аналогично тому, как сделано в доказательстве теоремы 4.10, представим

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m,$$

где $A_m = \{w \in A : d_2(w,\chi) \ge 1/m\}$. Так как $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A) < \infty$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(A\setminus A_m) < \varepsilon$ при $m > m_0$. По доказанному (см. теорему 4.13)

$$\mathscr{H}^\mu(A_m) = \int\limits_{A_m} D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}}\mathscr{H}^\mu(w)\, d\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(w),$$

$m \in \mathbb{N}$. Кроме того, в силу следствия 4.12 верно $\mathscr{H}^\mu(A \setminus A_m) < T\varepsilon$, $T < \infty$. Фиксируем $m > m_0 + 1$ и покажем, что

$$|\mathscr{H}^\mu(A) - \mathscr{H}^\mu(A_m)| < Q\varepsilon \tag{26}$$

для некоторого $Q < \infty$. Подчеркнем, что данное свойство необходимо доказывать, так как аддитивность $\mathscr{H}^\mu$ в общем случае еще не установлена.

Из определения 4.7 вытекает, что

$$\mathscr{H}^\mu(A) \le \mathscr{H}^\mu(A_m) + \mathscr{H}^\mu(A \setminus A_m) < \mathscr{H}^\mu(A_m) + T\varepsilon.$$

Действительно, достаточно рассмотреть покрытия множеств A_m и $A \setminus A_m$ из этого определения, соответствующие которым суммы близки к точной нижней грани. Тогда, с одной стороны, объединение этих покрытий образует покрытие A, а с другой — соответствующая ему сумма может не быть близка к точной нижней грани. Установим обратное неравенство. Рассмотрим представление

$$A_m = A_{m-1} \cup (A_m \setminus A_{m-1}).$$

Тогда $A_{m-1} \cap (A \setminus A_m) = \varnothing$ и $m - 1 > m_0$ по выбору m, поэтому $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}\big(A_m \setminus A_{m-1}\big) < \varepsilon$. Рассмотрим такое $\delta > 0$, что если $w \in A \setminus A_m$, то $\operatorname{Box}_2(w, s) \cap A_{m-1} = \varnothing$ при $s < \delta$, и построим покрытие $\{\operatorname{Box}_2(w_i, s_i)\}$ множества A из определения 4.7 для данного $\delta > 0$. Тогда объединение шаров $\{\operatorname{Box}_2(w_i, s_i) : w_i \in A_m\}$ является покрытием A_{m-1}. Рассмотрим

$$\{\operatorname{Box}_2(w_i, s_i) : w_i \in A_m\} \cup \{\operatorname{Box}_2(v_i, t_i) : v_i \in A_m \setminus A_{m-1}\},$$

где $\{\operatorname{Box}_2(v_i, t_i) : v_i \in A_m \setminus A_{m-1}\}$ — покрытие множества $A_m \setminus A_{m-1}$, соответствующая которому сумма не превосходит $T\varepsilon$ (см. следствие 4.12). Отсюда вытекают оценка

$$\mathscr{H}^{\mu}(A_m) \leq \mathscr{H}^{\mu}(A) + T\varepsilon$$

и соотношение (26). Следовательно, $\mathscr{H}^{\mu}(A) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathscr{H}^{\mu}(A_m)$, а в силу сходимости интегралов

$$\int\limits_{A_m} D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}} \mathscr{H}^{\mu}(w)\, d\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(w)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, которая следует из предположения 1.15 и замечаний 4.6 и 4.17, и непрерывности интеграла Лебега, утверждение теоремы 4.13 верно без условия (25) для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ конечной $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$-меры. Теорема доказана.

Из теоремы 4.18 следует усиление теоремы 4.9. В свою очередь, этот результат вместе со следствием 4.11 усиливает и саму теорему 4.18 (т. е. снимается требование конечности меры).

Теорема 4.19. *Пусть $x \in \Omega$. Тогда*

1. *Функция множества* (20) *квазиаддитивна на* $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)$.
2. *Для любых множеств* $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ *верно*

$$\mathscr{H}^{\mu}(A) = \int\limits_{A} D_{\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}} \mathscr{H}^{\mu}(w)\, d\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}(w).$$

Доказательство. Для доказательства п. 1 рассмотрим произвольный конечный набор попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^{J}$, лежащих в некотором открытом шаре B_0. Тогда пересечения каждого из этих шаров с множеством $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)$ будет иметь конечную $\mathscr{H}^{N-\widetilde{N}}$-меру. Действительно, так как $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ замкнуто, то его пересечение с любым замкнутым шаром компактно. В силу предположения 1.15 по теореме о неявной функции для всякой точки множества уровня существует окрестность, на которой она параметризуется окрестностью в $\mathbb{R}^{N-\widetilde{N}}$. Следовательно, можно выбрать конечное подпокрытие такими окрестностями. Далее осталось применить теорему 4.18, из которой следует квазиаддитивность функции (20):

$$\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{\mu}(B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)) \leq \mathscr{H}^{\mu}(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)).$$

П. 2 следует из п. 1, следствия 4.11 об абсолютной непрерывности для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и результатов [16, 17]. Теорема доказана.

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 4.20. *Функция множества $\mathscr{H}^\mu$ является мерой на подмножествах $A \subset \varphi^{-1}(t) \cap (\Omega \setminus \chi)$. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности.*

В качестве следствия выводим формулу коплощади.

Определение 4.21. Пусть выполнены условия предположения 1.15. Величина

$$\sqrt{\det \widehat{D}^\triangle \varphi(x) \widehat{D}^\triangle \varphi(x)^*},$$

где $x \in \Omega \setminus \chi$, называется *субримановым коэффициентом коплощади.*

Теорема 4.22. *Пусть выполнены условия предположения* 1.15. *Тогда для любых измеримых множеств $A \subset \Omega \setminus \chi$ справедлива формула коплощади*

$$\int\limits_A \sqrt{\det \widehat{D}^\triangle \varphi(x) \widehat{D}^\triangle \varphi(x)^*}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{G}}} d\mathscr{H}^{\widetilde{\nu}}(t) \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap A} d\mathscr{H}^\mu(u). \tag{27}$$

Доказательство. Соотношение (27) следует из теорем 4.4, 4.14, 4.16 и 4.19, а также из аргументов, примененных при доказательстве аналогичных результатов в [14, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* Субримановы свойства множеств уровня неконтактных отображений групп Гейзенберга // Мат. тр. 2022. Т. 25, № 2. С. 107–125.
2. *Карманова М. Б.* Классы неконтактных отображений групп Карно и метрические свойства // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1199–1223.
3. *Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F.* Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group // Math. Ann. 2001. V. 321, N 3. P. 479–531.
4. *Басалаев С. Г.* Одномерные поверхности уровня hc-дифференцируемых отображений пространств Карно — Каратеодори // Вестн. НГУ. 2013. Т. 13, № 4. С. 16–36.
5. *Kozhevnikov A.* Propriétés métriques des ensembles de niveau des applications différentiables sur les groupes de Carnot. Géométrie métrique. Paris XI: Université Paris Sud, 2015.
6. *Franchi B., Serapioni R.* Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups // J. Geometric Anal. 2016. V. 26, N 3. P. 1946–1994.
7. *Карманова М. Б.* О локальных метрических характеристиках множеств уровня C^1_H-отображений многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1291–1309.
8. *Карманова М. Б.* Множества уровня классов отображений двуступенчатых групп Карно в неголономной интерпретации // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 391–400.
9. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
10. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
11. *Карманова М. Б.* Липшицевы образы открытых множеств на сублоренцевых структурах // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 2. С. 138–161.
12. *Карманова М. Б.* Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.
13. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemporary Mathematics; V. 424).
14. *Karmanova M., Vodopyanov S.* A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Caratheodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.

15. *Карманова М. Б.* Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 298–325.
16. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
17. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

Поступила в редакцию 1 августа 2024 г.
После доработки 1 августа 2024 г.
Принята к публикации 25 июня 2025 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com