

ХОПФОВОСТЬ ВЕРШИННО-ТРАНЗИТИВНЫХ
ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП
БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА

Н. В. Гуськов, Ф. А. Дудкин

Аннотация. Конечно порожденная группа G , которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага — Солитера* (GBS группой). Если G действует транзитивно на вершинах, то будем называть ее *вершинно-транзитивной GBS группой* ($VTGBS$ группой). Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя является изоморфизмом. В этой работе получены некоторые достаточные условия нехопфовости $VTGBS$ групп и описаны эпиморфизмы таких групп.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.407

Ключевые слова: обобщенная группа Баумслага — Солитера, хопфова группа, вершинно-транзитивное действие.

Введение

Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются так:

$$BS(m, n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^mt = a^n \rangle, \quad m \neq 0, n \neq 0,$$

и называются группами Баумслага — Солитера. Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т. д. Известно [1, 2], что $BS(m, n)$ хопфова тогда и только тогда, когда либо $|m| = 1$, либо $|n| = 1$, либо $\pi(m) = \pi(n)$, где $\pi(x)$ — множество всех простых делителей числа x .

Группы Баумслага — Солитера действуют на дереве $T_{BS(m, n)}$ левых смежных классов по подгруппе $\langle a \rangle$ так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы. Поэтому всякая группа $BS(m, n)$ является GBS группой. GBS группы являются естественными обобщениями групп Баумслага — Солитера. Эти группы активно изучались в последнее время с различных позиций (см., например, обзор [3]).

Отметим, что действие $BS(m, n)$ на $T_{BS(m, n)}$ является вершинно-транзитивным. Значит, группы Баумслага — Солитера являются $VTGBS$ группами. Вопрос о хопфовости GBS групп весьма естественный, он сформулирован в списке открытых проблем для GBS групп в работе [4] Левиттом.

Второй автор выполнил работу в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002 (теорема 1).

По теореме Басса — Серра [5] всякую $VTGBS$ группу можно представить в виде фундаментальной группы графа групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами. Опуская ненужные и громоздкие определения (подробности можно прочитать, например, в [3]), отметим, что всякая $VTGBS$ группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ может быть задана с помощью копредставления

$$G(\overline{m}, \overline{n}) = \langle a, t_1, \dots, t_r \mid t_i^{-1} a^{m_i} t_i = a^{n_i}, i = 1, 2, \dots, r \rangle,$$

где $\overline{m}, \overline{n}$ — наборы из r ненулевых целых чисел. Если $|m_i| = |n_i|$, $i = 1, 2, \dots, r$, то $G(\overline{m}, \overline{n})$ содержит [6] подгруппу конечного индекса, изоморфную $F \times \mathbb{Z}$, где F — свободная группа конечного ранга. Поэтому в этом случае $G(\overline{m}, \overline{n})$ финитно аппроксимируема и, следовательно, хопфова. Далее будем рассматривать случай, когда $|m_i| \neq |n_i|$ для некоторого i .

Будем использовать обозначение $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ для нормального замыкания элемента a в группе $G(\overline{m}, \overline{n})$ и $C(a^{n_i})$ для централизатора a^{n_i} в группе $G(\overline{m}, \overline{n})$.

Основные результаты этой работы о хопфовости $VTGBS$ групп следующие.

Теорема 1. Пусть $r \geq 2$ и для некоторых $k \neq l$ верно, что $|m_k| \neq |n_k|$ и $m_k \mid n_k, n_l, m_l$. Тогда группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Следствие 2. Пусть $r \geq 2$ и для некоторого k верно, что $|m_k| = 1$ и $|n_k| \neq 1$. Тогда группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Теорема 2. Если $r \geq 2$ и существует такое k , что $\pi(m_k) \neq \pi(n_k)$, то группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Отметим, что доказательства теорем 1 и 2 не используют конечность множества проходных букв. Кроме того, получено описание эпиморфизмов $VTGBS$ групп в оставшихся случаях.

Теорема 3. Если $|m_1| \neq |n_1|$ и $\pi(m_i) = \pi(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, то произвольный эпиморфизм χ группы $G(\overline{m}, \overline{n})$ представляется в виде композиции некоторого внутреннего автоморфизма и эпиморфизма ψ вида

$$\psi(a) = a^{\pm 1}, \quad \psi(t_i) = w_i T_i, \quad w_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle,$$

$$T_i \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})} \cap C(a^{n_i}), \text{ для } i = 1, 2, \dots, r.$$

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенными подгруппами $K \subseteq A$ и $L \subseteq B$, т. е.

$$G \cong A \underset{K=L}{*} B.$$

Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n$, $n \geq 0$, элементов из G называется *приведенной* (см. [7, гл.4, § 2]), если

- (1) каждое c_i лежит в одном из множителей A или B ,
- (2) последовательные c_i, c_{i+1} лежат в разных множителях,
- (3) если $n > 1$, то никакое c_i не лежит ни в K , ни в L ,
- (4) если $n = 1$, то $c_1 \neq 1$.

Там же доказано, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ произведения элементов некоторой приведенной последовательности $c_1, c_2, \dots, c_n$, и если $n \geq 1$, то $g \neq 1$ в группе G . Число n называется *длиной элемента g относительно данного разложения группы G в свободное*

произведение с объединением и обозначается $|g|$. Длина единичного элемента группы G равна 0. Заметим, что если $1 \neq g \in A *_{K=L} B$ представлен приведенной последовательностью, то $|g \cdot h| = |g|$ для всех $h \neq g^{-1}$, $h \in K = L$.

Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n$, $n \geq 0$, называется *циклически приведенной*, если любая ее циклическая перестановка приведена. Любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведенном виде $g = u \cdot v \cdot u^{-1}$, где $v = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$, для подходящей циклически приведенной последовательности $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Так как группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ является итерированным HNN -расширением циклической группы $\langle a \rangle$, то (см., например, [8, теорема 17.1]) $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ является фундаментальной группой бесконечного дерева групп T , вершинные группы которого имеют вид $\langle a^w \rangle$, $w \in \langle t_1, \dots, t_r \rangle$, а реберные соответствуют реберным группам $G(\overline{m}, \overline{n})$. Всякое ребро $e \in E(T)$ задает разложение $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ в виде $A *_{K=L} B$, где A и B — фундаментальные группы поддеревьев групп, на которые распадается $T \setminus \{e\}$. Подгруппа $K = L \cong \mathbb{Z}$ задана ребром e , будем обозначать ее через $\langle e \rangle$.

Для каждого элемента $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ будем обозначать через T_X минимальное поддерево групп дерева групп T такое, что $X \in \pi_1(T_X)$. В дальнейшем для элементов $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ и ребер $e \in E(T)$ будем использовать e -приведенную запись X , а соответствующую длину X будем называть e -длиной и обозначать через $|X|_e$.

Будем называть элементы $(a^\alpha)^w$, $w \in \langle t_1, \dots, t_r \rangle$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, *вершинными*. Заметим, что $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ вершинный тогда и только тогда, когда $|X|_e < 2$ для всех $e \in E(T)$.

Для любых $X, Y \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ выполнены следующие утверждения:

- 1) $|X^{-1}|_e = |X|_e$ для всех $e \in E(T)$;
- 2) $|XY|_e \leq |X|_e + |Y|_e$ для всех $e \in E(T)$;
- 3) если X, Y — неединичные вершинные элементы, то XY — вершинный элемент тогда и только тогда, когда $XY = YX$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть x_i , $i = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 2$, — неединичные вершинные элементы. Если $X = \prod_{i=1}^l x_i \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ — вершинный элемент, то найдется k такое, что $x_k x_{k+1}$ — вершинный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по l . Если $l = 2$, то замечание очевидно.

Пусть $l > 2$ и для всякого k найдется ребро e такое, что $|x_k x_{k+1}|_e = 2$. Фиксируем ребро f такое, что $|x_1 x_2|_f = 2$. Из условий замечания вытекает, что

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y|_f,$$

где $y = x_2 \dots x_l$. По определению f -длины $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ разлагается в свободное произведение подгрупп A и B с объединением по $K = L = \langle f \rangle$. Пусть $x_1 \in A \setminus K$, $4x_2 \in B \setminus L$. Представим y в f -приведенном виде:

$$y = y_1 y_2 \dots y_m.$$

Пусть $m \geq 2$. Если $y_1 = x_2 \dots x_q \in A \setminus K$ для некоторого $q \geq 2$, то $|x_2^{-1} y_1|_f = |x_3 \dots x_q|_f = 2$. Значит, найдется такое $3 \leq p \leq q - 1$, что $x_3 \dots x_p \in B \setminus L$, $x_{p+1} \dots x_q \in A \setminus K$. Так как $x_2 \in B \setminus L$, то такое может быть, только если $x_2 \dots x_p \in \langle f \rangle$ или $x_{p+1} \dots x_q \in \langle f \rangle$. В этом случае можно использовать индукционное предположение для одного из этих подслов.

Значит, $y_1 \in B \setminus L$, тогда $y_2 \in A \setminus K$ и т. д. В этом случае

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y_1 \dots y_m|_f = m + 1 \geq 3.$$

Противоречие. Значит, $m = 1$ и $y = y_1 = x_2 \dots x_l \in B$.

Если $y \notin L$, то

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y|_f = 2.$$

Поэтому $y \in L$. Отсюда вытекает, что y — вершинный элемент, а значит, можно использовать предположение индукции. Замечание 1 доказано.

Следствие 1. В условиях замечания 1 найдется последовательность сокращений слова X до записи в виде вершинного элемента. На каждом шаге такой последовательности некоторые два соседних вершинных элемента предыдущей записи объединяются в один вершинный элемент и получается следующая запись X в произведение вершинных элементов, число элементов которой на 1 меньше.

Лемма 1. Пусть x_i , $i = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 2$, — неединичные вершинные элементы. Если $X = \prod_{i=1}^l x_i \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ — вершинный элемент, то для любых номеров $p \neq k$ найдется подстановка σ на множестве $\{1, 2, \dots, l\}$ такая, что $\{\sigma(s), \sigma(s+1)\} = \{p, k\}$ для подходящего $s < l$ и

$$X = \prod_{i=1}^l x_{\sigma(i)}.$$

Доказательство. Пусть последнее сокращение из следствия 1 для X объединяет два вершинных элемента u и v так, что

$$X = u \cdot v, \quad u = x_1 x_2 \dots x_j, \quad v = x_{j+1} x_{j+2} \dots x_l.$$

Если $p, k \leq j$ или $p, k \geq j+1$, то лемма доказывается индукцией по l .

Если $p \leq j$, $k \geq j+1$, то будем доказывать индукцией по $k - p$. База индукции при $k = p+1$ очевидна. Будем считать, что $p < j$, случай $k > j+1$ аналогичен. Зафиксируем такой этап сокращений u , на котором вершинный элемент z_m , оканчивающийся в начальной записи на x_p , сокращается с z_{m+1} , начинающимся на x_{p+1} , т. е.

$$u = z_1 \dots z_{m-1} \underline{z_m z_{m+1}} z_{m+2} \dots z_n,$$

$z_m = x_{p_1} \dots x_p$, $z_{m+1} = x_{p+1} \dots x_{p_2}$ и z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — вершинные элементы. Тогда $z_m z_{m+1} = z_{m+1} z_m$ и соответствующая перестановка $x_1, \dots, x_j$ не изменит u и X , но в новой записи X расстояние между x_k и x_p уменьшится. Лемма 1 доказана.

Определим отображения E и Z из множества приведенных слов $W \subseteq \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ в $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ с помощью индукции. Если w — пустое слово, то $E(w) = 1 = Z(w)$. Пусть $E(t_i) := Z(t_i^{-1}) := m_i$ и $Z(t_i) := E(t_i^{-1}) := n_i$ для всех i . Если $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, то для приведенного слова $wt_i^\varepsilon \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ положим

$$E(wt_i^\varepsilon) := \frac{E(w)E(t_i^\varepsilon)}{\gcd(Z(w), E(t_i^\varepsilon))}, \quad Z(wt_i^\varepsilon) := \frac{Z(w)Z(t_i^\varepsilon)}{\gcd(Z(w), E(t_i^\varepsilon))}.$$

Легко показать, что для приведенного слова $w_1 w_2 \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$

$$E(w_1 w_2) = \frac{E(w_1)E(w_2)}{\gcd(Z(w_1), E(w_2))}, \quad Z(w_1 w_2) = \frac{Z(w_1)Z(w_2)}{\gcd(Z(w_1), E(w_2))}.$$

§ 2. Основные результаты

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Очевидно, что данная группа изоморфна группе с $m'_l = \frac{n_k m_l}{m_k}$ и $n'_l = \frac{n_k n_l}{m_k}$. После применения такого изоморфизма будем считать, что $E(t_l) = m'_l$ и $Z(t_l) = n'_l$.

Рассмотрим эпиморфизм α , заданный следующим образом:

$$\alpha(a) = a, \quad \alpha(t_l) = t_k t_l t_k^{-1}, \quad \alpha(t_i) = t_i \text{ при } i \neq l.$$

Заметим, что $E(\alpha(t_l)) = m_l$ и $Z(\alpha(t_l)) = n_l$.

Элемент $X = (a^{m_l})^{t_l} \cdot a^{-n_l}$ по лемме Бриттона не равен 1. При этом

$$\alpha(X) = (a^{m_l})^{\alpha(t_l)} \cdot a^{-n_l} = 1.$$

Следовательно, группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ с таким набором параметров нехопфова. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду следствия 2 можно считать, что для всех i либо оба $|m_i|, |n_i|$ не равны 1, либо $|m_i| = |n_i| = 1$. Так как $\pi(m_k) \neq \pi(n_k)$, без потери общности можно считать, что существует такое простое число d , что $d \mid m_k$ и $d \nmid n_k$.

Построим неинъективный эпиморфизм. Пусть α — эндоморфизм группы $G(\overline{m}, \overline{n})$ такой, что

$$\alpha(a) = a^d, \quad \alpha(t_i) = t_i.$$

Так как $d \perp n_k$, существуют такие $p, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что

$$pn_k + ld = 1,$$

причем $n_k \nmid l$ и $d \nmid p$. Пусть

$$P = (a^{pm_k/d})^{t_k} \cdot a^l, \quad Q = a^{-1}P^d.$$

Заметим, что $E(t_k) = m_k \nmid (pm_k/d)$ и $Z(t_k) = n_k \nmid l$. Вновь по лемме Бриттона получаем, что $Q \neq 1$, при этом

$$\alpha(P) = (a^{pm_k})^{t_k} \cdot a^{ld} = a^{pn_k+ld} = a, \quad \alpha(Q) = a^{-d}\alpha(P)^d = 1.$$

Следовательно, α — неинъективный эпиморфизм и группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ не хопфова. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\chi(a) = w_0 A$ и $\chi(t_i) = v_i T_i$ для $w_0, v_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $A, T_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ для всех i .

Так как χ — эндоморфизм, для любого $i = 1, 2, \dots, r$ верно, что

$$T_i^{-1} \cdot ((w_0 A)^{m_i})^{v_i} \cdot T_i = (w_0 A)^{n_i}. \quad (1)$$

Если применить к обеим частям (1) канонический гомоморфизм

$$G(\overline{m}, \overline{n}) \rightarrow G(\overline{m}, \overline{n}) / \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})},$$

то при $i = 1$ получим

$$v_1^{-1} w_0^{m_1} v_1 = w_0^{n_1}.$$

Ясно, что при $|m_1| \neq |n_1|$ это возможно только тогда, когда $w_0 = 1$.

Докажем, что A — вершинный элемент. Если A сопряжен с a^α , то композиция χ и подходящего внутреннего автоморфизма даст эндоморфизм желаемого

типа. Предположим теперь, что A не сопряжен с a^α . Тогда найдется такое ребро e дерева T , что

$$A = X^{-1}A_0X,$$

A_0 — e -циклически приведен и $|A_0|_e \geq 2$.

Из (1) при $i = 1$ для всякого целого k следует, что

$$S_k^{-1} \cdot (A_0^{u_1^k})^{m_1^k} \cdot S_k = A_0^{n_1^k}, \quad (2)$$

где $S_k = X \cdot \bar{T}_{1,k} \cdot X^{-1}$, $u_1 = X \cdot v_1 \cdot X^{-1}$, а $\bar{T}_{1,k} \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ такой элемент, что $(v_1 T_1)^k = v_1^k \cdot \bar{T}_{1,k}$.

Заметим, что $u_1 \neq 1$, иначе χ не может быть сюръективно. Элемент u_1 гиперболический относительно действия свободной группы $X \cdot F(t_1, t_2, \dots, t_r) \cdot X^{-1}$ на дереве T и его трансляционная длина (см., например, [8]) положительна. Поэтому найдется такое k , что $T_{A_0^{u_1^k}}$ не пересекается с T_{A_0} . Обозначим $u_1^k e$ через

f . Тогда $A_0^{u_1^k}$ f -циклически приведен и $|A_0^{u_1^k}|_f \geq 2$. При этом $|A_0|_f = 1$. Тогда f -длина правой части (2) равна 1 и

$$|S_k^{-1} \cdot (A_0^{u_1^k})^{m_1^k} \cdot S_k|_f \geq |(A_0^{u_1^k})^{m_1^k}|_f = |m_1|^k |A_0^{u_1^k}|_f \geq 2.$$

Это противоречие показывает, что можно выбрать внутренний автоморфизм так, что в композиции с ним χ даст эпиморфизм ψ , для которого $\psi(a) = a^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Далее будем изучать ψ и переобозначим v_i , T_i так, что $\psi(t_i) = v_i T_i$ для $v_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $T_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ для всех i .

Докажем, что $|\alpha| = 1$. Предположим, что это не так. Так как ψ — сюръекция, можно взять элемент $w_0 P \in G(\bar{m}, \bar{n})$ такой, что $\psi(w_0 P) = a$, причем $w_0 \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $P \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$. Факторизуя $G(\bar{m}, \bar{n})$ по $\langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$, получаем свободную группу $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$. Эта факторизация индуцирует эпиморфизм $\bar{\psi}$ группы $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$, для которого

$$\bar{\psi}(t_i) = w_i.$$

Но группа $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ хопфова как конечно порожденная свободная группа, а потому $\bar{\psi}$ — автоморфизм $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$. Теперь заметим, что $\psi(w_0 P) = \bar{\psi}(w_0) P'$, где $P' \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$. Опять перейдем к фактор-группе и получим, что $\bar{\psi}(w_0) = 1$, откуда следует, что $w_0 = 1$, т. е. произвольный прообраз a лежит в $\langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$.

Представим P в виде

$$P = \prod_{i=1}^l (a^{\beta_i})^{\nu_i},$$

где $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\nu_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда $\psi(P)$ можно представить в виде

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l C_i^{-1} (a^{\alpha \beta_i})^{\bar{\psi}(\nu_i)} C_i,$$

где $C_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$.

Применяя многократно лемму 1, получаем, что существует такая перестановка σ множества $\{1, 2, \dots, l\}$, что

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l (a^{\alpha \beta_{\sigma(i)}})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})}.$$

Так как $\alpha \notin \{\pm 1\}$, зафиксируем какой-нибудь простой делитель d числа α . Существуют такие $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, что $\alpha\beta_{\sigma(i)} = d\gamma_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l (a^{d\gamma_i})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})}. \quad (3)$$

Заметим, что так как $\pi(m_i) = \pi(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, то если и верно, что

$$t_i^{-\varepsilon} a^{kd} t_i^{\varepsilon} = a^{k'},$$

для некоторых $k, k' \in \mathbb{Z}$, то обязательно $d \mid k'$. Перепишем (3) в виде

$$\prod_{i=1}^l (a^{d\gamma_i})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})} \cdot a^{-1} = 1.$$

Пользуясь леммой Бриттона, будем сокращать выражение слева и следить за суммой степеней a . Изначально она сравнима с -1 по модулю d . Если в сокращении участвуют любые буквы, кроме самой правой a^{-1} , согласно сделанному выше замечанию это свойство сохраняется. Если в какой-то момент рядом с a^{-1} оказалось a^α , то сопряжением переведем ее в левую часть выражения так, что слева от элемента a^{-1} вновь окажется какой-то t_i^ε . Ясно, что в конце всех сокращений слева не должно остаться букв t_i . Получаем, что $a^{-1+\lambda \cdot d} = 1$ для $\lambda \in \mathbb{Z}$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что $|\alpha| = 1$.

Пусть $\alpha = 1$ (случай с $\alpha = -1$ рассматривается аналогично). Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, r$ верно, что

$$T_i^{-1}(a^{m_i})^{v_i} T_i = a^{n_i}.$$

Представим T_i в виде произведения вершинных элементов:

$$T_i = \prod_{j=1}^{|T_i|} u_{ji},$$

так, что произведение соседей $u_{ji}u_{j+1i}$ не может быть вершинным элементом. Тогда из замечания 1 следует, что $(a^{m_i})^{v_i} u_{1i}$ — вершинный элемент, откуда следует, что $u_{1i}^{-1}(a^{m_i})^{v_i} u_{1i} = (a^{m_i})^{v_i}$. Продолжая далее по индукции, получаем, что $T_i^{-1}(a^{m_i})^{v_i} T_i = (a^{m_i})^{v_i}$ и

$$(a^{m_i})^{v_i} = a^{n_i}.$$

Поэтому $T_i \in C(a^{n_i})$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Am. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.
2. Collins D., Levin F. Automorphisms and Hopficity of certain Baumslag–Solitar groups // Arch. Math. (Basel). 1983. V. 40, N 5. P. 385–400.
3. Дудкин Ф. А. Групповые и алгоритмические свойства обобщенных групп Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 3. С. 341–352.
4. Levitt G. On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. & Topol. 2007. V. 11, N 1. P. 473–515.
5. Serre J. P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
6. Levitt G. Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 1. P. 1–43.
7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

8. Bogopolski O. Introduction to group theory. European Mathematical Society, 2008.

Поступила в редакцию 18 декабря 2024 г.

После доработки 24 мая 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Гуськов Никита Викторович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
N.Guskov@ng.su.ru

Дудкин Федор Анатольевич (ORCID 0000-0002-4775-7962)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
DudkinF@gmail.com