Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ВДОЛЬ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ В ОКРЕСТНОСТИ СИММЕТРИЧНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

А. А. Голубков

Аннотация. Пусть G — выпуклая область, в которой имеется ровно одна особая точка z_s аналитической функции Q, симметричной относительно этой точки. В работе при больших значениях модуля спектрального параметра ρ изучена асимптотика передаточной матрицы P уравнения Штурма — Лиувилля с потенциалом Q вдоль произвольной кривой, лежащей в области G и не проходящей через точку z_s. Сформулированы необходимые и достаточные условия того, что матрица P не зависит от параметра ρ, и найден ее вид во всех таких случаях. Доказано, что в остальных случаях все элементы передаточной матрицы являются целыми функциями ρ вполне регулярного роста порядка $1/2$ с одинаковыми кусочно тригонометрическим индикатором и угловой плотностью нулей, формулы для трех возможных типов которых получены в работе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.406

Ключевые слова: уравнение Штурма — Лиувилля на комплексной плоскости, симметричная особая точка, передаточная матрица.

1. Введение и основные результаты

При больших значениях модуля спектрального параметра $\rho := \lambda^2$ асимптотика решений уравнения Штурма — Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

с голоморфным потенциалом Q в произвольной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$ переменной z подробно изучена (см., например, монографии [1, 2] и библиографические ссылки в них). В частности, известно, что в точке $z_f \in G \setminus \{z_0\}$ непрерывно дифференцируемые решения u_1 и u_2 уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1 \quad (z_0 \in G), \tag{2}$$

являются целыми функциями параметра ρ порядка $1/2$ и типа $|z_f - z_0|$. Они имеют одинаковый кусочно тригонометрический индикатор (9) и вполне регулярный рост на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемого формулой (12) (о характеристиках целых функций, включая регулярность их роста, см. [3, гл. 1–3]). Такой же результат справедлив, если область G является звездной относительно точки z_0.

Однако если потенциал Q имеет особые точки и уравнение (1) рассматривается в области его аналитичности, не звездной относительно z_0, то в общем случае известно лишь, что решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), являются целыми функциями ρ порядка не выше $1/2$. Более точные результаты для их порядка, типа, индикатора, распределения нулей получены только при наличии дополнительных ограничений на потенциал, расположение точек z_0 и z_f относительно особых точек, форму связывающего их пути интегрирования уравнения (1) и (или) положение сектора на комплексной плоскости, в котором спектральный параметр стремится к бесконечности $[1, 2, 4–10]$.

Определение 1. Пусть потенциал $Q(z)$ голоморфен в области $G \subset \mathbf{C}$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1) вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset G$, удовлетворяющие условиям (2). Назовем *передаточной матрицей уравнения* (1) *между точками* z_0 *и* z *кривой* γ матрицу

$$P(\gamma, z, z_0) \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}.$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками этой кривой.

Заметим, что в силу вида уравнения Штурма — Лиувилля (1) и выбора начальных условий (2) определитель передаточной матрицы не зависит от z и равен единице.

В настоящей работе изучены асимптотические свойства (при $\varphi_\rho := \arg \rho = \mathrm{const}$ и $|\rho| \to \infty$) элементов передаточной матрицы P уравнения (1) вдоль произвольной спрямляемой кривой, лежащей в области $G \setminus \{z_s\}$ голоморфности потенциала Q. При этом предполагается, что G — выпуклая область, а функция $Q(z)$ имеет особую точку z_s, относительно которой она и область G симметричны:

$$Q(\widetilde{z}) = Q(z), \quad \widetilde{z} := 2z_s - z \quad (z \in G). \tag{3}$$

Здесь и далее $\widetilde{z}$ — точка, симметричная точке z относительно точки z_s. Поскольку $\widetilde{\widetilde{z}} = z$, условие (3) может выполняться только для особой точки однозначного характера.

В статье для упрощения записи формул, как правило, параметр ρ не указывается в наборе переменных различных функций. Например, вместо $u(z, \rho)$ пишется $u(z)$.

Обозначим: i — мнимая единица, $\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 2. Назовем *углом обхода* θ кривой γ точки $z_s \notin \gamma$ угол поворота вектора, соединяющего точку z_s с точкой z при движении последней вдоль всей кривой от ее начальной точки. Угол поворота вектора считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки.

Определение 3. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения (1) и точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$ различные. Назовем кривую $\gamma_{12} \subset G \setminus \{z_s\}$ с началом и концом в точках z_1 и z_2 *стандартизованной*, если она имеет следующий специальный вид. Кривая совпадает с отрезком L_{12}, соединяющим точки z_1 и z_2, если $z_s \notin L_{12}$. В противном случае она обходит точку z_s против часовой стрелки, совпадая с одной из ломаных семейства двухзвенных ломаных, угол между звеньями которых сколь угодно близок к развернутому, но не достигает его. Будем называть матрицу $R(z_2, z_1, z_s) := P(\gamma_{12}, z_2, z_1)$ *передаточной матрицей между точками* z_1 и z_2.

Существование семейства ломаных, описанного в определении 3, достаточно очевидно и, кроме того, следует из лемм 2.4 и 2.5 работы [10]. При этом независимость передаточной матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ от выбора конкретной такой ломаной вытекает из теоремы о монодромии, так как все они находятся в некоторой односвязной области аналитичности потенциала Q (см. также более общее утверждение леммы 3).

Во втором разделе статьи доказан ряд вспомогательных утверждений, ключевое из которых сформулировано в лемме 2, а в третьем разделе приведено, в частности, доказательство следующей теоремы, выражающей основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда передаточная матрица уравнения* (1) *между началом z_0 и концом z_f кривой $\gamma \subset G \setminus \{z_s\}$ с углом θ обхода точки z_s удовлетворяет следующему соотношению:*

$$P(\gamma, z_f, z_0) = \begin{cases} a_{2n} R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n-1} R(z_f, z_0, z_s), & \theta/\pi \in (2n-1, 2n] \\ a_{2n} R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n+1} R(z_f, z_0, z_s), & \theta/\pi \in (2n, 2n+1] \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

Здесь $\widetilde{z}_0 := 2z_s - z_0$,

$$a_0 = 0, \quad a_{-j} = (-1)^{j+1} a_j, \quad a_j = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{j-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} C_j^{2l+1} \frac{\left(\mu^2+4\right)^l}{\mu^{2l}} \quad (j \geq 1), \tag{5}$$

C_j^{2l+1} — *биноминальные коэффициенты и*

$$\mu(\rho) := \mathrm{Tr}\{\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s)\} \equiv r_{11}(\widetilde{z}_0, z_0, z_s) - r_{22}(\widetilde{z}_0, z_0, z_s). \tag{6}$$

Частным случаем передаточной матрицы является введенная в работе [10] регулярная циклическая матрица C изолированной особой точки.

Определение 4. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — ограниченная выпуклая область с границей δG, содержащая ровно одну особую точку z_s потенциала $Q(z)$, и во всех точках δG потенциал голоморфен. Тогда передаточную матрицу уравнения (1) вдоль кривой γ с началом и концом в точке $z_0 \in \delta G$, обходящей границу области G один раз против часовой стрелки, будем называть *регулярной циклической матрицей* $C(z_0, z_s)$ изолированной особой точки z_s уравнения (1) относительно точки z_0.

Пусть кривая γ_{12} соединяет точку z_1 с точкой z_2, а кривая γ_{21} — точку z_2 с точкой z_1 так, как это описано в определении 3. Тогда их объединение образует замкнутую кривую γ_0. Если отрезок L_{12} не содержит особой точки z_s, то кривая γ_0 обходит его туда и обратно и, следовательно, передаточная матрица $P(\gamma_0, z_1, z_1) = R(z_1, z_2, z_s)R(z_2, z_1, z_s) = I$. Если же отрезок L_{12} содержит особую точку z_s, то кривая γ_0 является замкнутой выпуклой ломаной из четырех звеньев, обходящей точку z_s один раз против часовой стрелки. Следовательно, в этом случае $P(\gamma_0, z_1, z_1) = R(z_1, z_2, z_s)R(z_2, z_1, z_s) = C(z_1, z_s)$.

Следствие 1. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда регулярную циклическую матрицу $C(z_0, z_s)$ особой* *точки z_s уравнения* (1) *относительно точки $z_0 \in G \setminus \{z_s\}$ и ее след c_0 можно представить в виде*

$$C(z_0, z_s) = I + \mu R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3 = I + \mu\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s), \tag{7}$$

$$c_0 := \mathrm{Tr}\{C(z_0, z_s)\} = 2 + \mu^2. \tag{8}$$

где $\widetilde{z}_0 := 2z_s - z_0$, а величина μ определена формулой (6).

Доказательство. Первое равенство в (7) следует из определения 4 матрицы C, соотношения (4) для матрицы P, использованного для случая $z_f = z_0$ и $\theta = 2\pi$ ($n = 1$), а также формул (5) или (29) для коэффициентов a_1 и a_2. Второе равенство в (7) получается с помощью соотношения (18), вытекающего из доказанной во втором разделе леммы 2. Формула (8) для следа c_0 — прямое следствие соотношений (6) и (7).

Лемма 1. *Введенная формулой* (6) *величина μ и след c_0 матрицы $C(z_0, z_s)$ не зависят от z_0 и обе величины либо одновременно не зависят от параметра ρ, либо являются целыми функциями ρ порядка 1/2 минимального типа.*

Доказательство. По теореме 24.1 работы [2] элементы передаточных матриц уравнения (1) являются целыми функциями параметра ρ. Поэтому в силу определения (6) след μ является целой функцией ρ. В теореме 1.1 статьи [10] было доказано, что c_0 не зависит от точки z_0 и либо не зависит от параметра ρ, либо является целой функцией ρ порядка $1/2$ минимального типа. Учитывая, что квадрат целой функции есть целая функция такого же порядка и удвоенного типа, пользуясь формулой (8) и методом от противного, получим все утверждения леммы.

В разд. 3 доказано также следующее следствие теоремы 1 и леммы 1.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *возможны четыре типа зависимости матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ от параметра ρ. Тип* 1*: $P \in \{\pm I, \pm i\sigma_3\}$. Типы* 2–4*: все элементы P являются целыми функциями ρ порядка $1/2$ с одинаковыми индикаторами*

$$h_- = |z_f - z_0||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_-)| \text{ для типа } 2, \tag{9}$$

$$h_+ = |z_f + z_0 - 2z_s||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_+)| \text{ для типа } 3, \tag{10}$$

$$h = |z_0 - z_s||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_0)| + |z_f - z_s||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_f)| \text{ для типа } 4 \tag{11}$$

и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме лучей

$$\rho_-(t) = -t\exp\{-2i\varphi_-\}\ (t \geq 0) \text{ для типа } 2, \tag{12}$$

$$\rho_+(t) = -t\exp\{-2i\varphi_+\}\ (t \geq 0) \text{ для типа } 3, \tag{13}$$

$$\rho_0(t) = -t\exp\{-2i\varphi_0\},\ \rho_f(t) = -t\exp\{-2i\varphi_f\}\ (t \geq 0) \text{ для типа } 4, \tag{14}$$

где $\varphi_\pm := \arg((z_f - z_s) \pm (z_0 - z_s))$, $\varphi_\rho := \arg\rho$, $\varphi_0 := \arg(z_0 - z_s)$, $\varphi_f := \arg(z_f - z_s)$. При типах 2 *и* 3 *зависимости элементов $P(\rho)$ с точностью до постоянных множителей такие же, как у соответствующих элементов передаточной матрицы вдоль отрезка.*

Типы 1–3 *имеют место в следующих случаях. Во-первых, в окрестности произвольной особой точки для кривых γ с $z_f = z_0$, $\theta = 0$ (тип* 1*, $P \equiv I$) или с $z_f \neq z_0$, $|\theta| < \pi$ (тип* 2*, $P = R(z_f, z_0, z_s)$). Во-вторых, для особых точек с*

$$\mu(\rho) \equiv \mu_{l,k} := 2i\cos(\pi k/l) \quad (l \geq 2,\ k \in \{1, \dots, l-1\}), \tag{15}$$

если выполнена одна из следующих совокупностей условий на число l и кривую γ:

1) $|z_f| = |z_0|$, $\theta = \pi n$, $l = |n| \geq 2$ — *тип* 1, $P \equiv (-1)^k (i\sigma_3)^n$.
2) $z_f \neq z_0$, $|\theta/\pi - 2n| < 1$, $l = 2|n| \geq 2$ — *тип* 2, $P = (-1)^{n-k} R(z_f, z_0, z_s)$.
3) $z_f \neq \widetilde{z}_0$, $|\theta/\pi - 2n - 1| < 1$, $l = |2n+1| \geq 2$ — *тип* 3, $P = i(-1)^{n-k} R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3$.

Тип 4 *имеет место во всех остальных случаях.*

Определение 5. Пусть $n(r, \varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ — число нулей функции $F(\rho)$ в секторе $|\rho| \leq r$, $0 < \varphi_{\rho 1} < \varphi_\rho < \varphi_{\rho 2} \leq 2\pi$ комплексной плоскости ρ и при некотором κ для всех значений $\varphi_{\rho 1}$ и $\varphi_{\rho 2}$ за исключением быть может счетного множества существует конечный предел

$$\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) := \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})}{r^\kappa}.$$

Тогда величину $\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ будем называть *угловой плотностью с показателем κ нулей функции F внутри угла $\varphi_{\rho 1} < \arg \rho < \varphi_{\rho 2}$* или, короче, внутри угла $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$.

Следствие 3. *Если в условиях следствия* 2 *матрица P зависит от параметра ρ, то ее элементы имеют следующие угловые плотности нулей с показателем* $1/2$:

$$\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \phi_-|z_f - z_0| & \text{для типа } 2, \\ \phi_+|z_f + z_0 - 2z_s| & \text{для типа } 3, \\ \phi_0|z_0 - z_s| + \phi_f|z_f - z_s| & \text{для типа } 4, \end{cases}$$

где $\phi_- = 1$ $(\phi_- = 0)$, $\phi_+ = 1$ $(\phi_+ = 0)$, $\phi_0 = 1$ $(\phi_0 = 0)$ *и* $\phi_f = 1$ $(\phi_f = 0)$, *если угол* $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ *содержит (не содержит) луч* $\rho_-(t)$, $\rho_+(t)$, $\rho_0(t)$ *и* $\rho_f(t)$ *соответственно.*

Доказательство. Пользуясь кусочной тригонометричностью индикатора элементов матрицы P, их вполне регулярным ростом, а также теоремой 3 гл. 3 работы [3] и следствием из нее, утверждения следствия 3 можно получить как частные случаи теоремы 4 статьи [11]. Дело в том, что индикаторы (9)–(11) совпадают с индикатором функции $D_0(\rho)$ из статьи [11], если в последней положить $N = 1$, $z_1 = z_s$ (для типа 4), $N = 0$ (для типов 2, 3) и заменить z_0 на $\widetilde{z}_0$ для типа 3.

Подчеркнем, что в силу определения 5 равенство нулю угловой плотности с показателем κ нулей целой функции в некотором угле означает лишь, что число нулей в секторах этого угла растет с ростом r не быстрее, чем $\varepsilon(r) r^\kappa$, причем $\varepsilon(r) \geq 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Следствие 4. *Регулярная циклическая матрица $C(z_0, z_s)$ симметричной особой точки z_s не зависит от параметра ρ, если и только если определенная формулой* (6) *величина $\mu \equiv 0$, т. е. у матрицы C след $c_0 \equiv 2$. При этом $C(z_0, z_s) \equiv I$. В остальных случаях все элементы матрицы $C(z_0, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ типа $2|z_0 - z_s|$ с кусочно тригонометрическим индикатором $2|z_0 - z_s||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_0)|$ и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча $\rho_0(t)$, задаваемого формулой* (14). *При этом множество нулей каждого из элементов матрицы C имеет угловую плотность с показателем* $1/2$:

$$\Psi_c(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) = 2\frac{\phi_0|z_0 - z_s|}{\pi},$$

где $\phi_0 = 1$ ($\phi_0 = 0$), *если угол* $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ *содержит* (*не содержит*) *луч* $\rho_0(t)$.

Доказательство. Все утверждения следуют из определения 4 матрицы C и следствий 1–3 при $z_f = z_0$ и угле обхода $\theta = 2\pi$ ($n = 1$).

Такая же формула для индикатора элементов матрицы $C(z_0, z_s)$ в случае, когда ее след c_0 не равен тождественно двум, была получена в работе [10] для произвольной изолированной особой точки однозначного характера. Однако при этом оставался открытым вопрос регулярности их роста, а значит, и существования угловой плотности их нулей, а также не был исследован случай $c_0 \equiv 2$. Следствия 1 и 4 восполняют эти пробелы в случае симметричных изолированных особых точек.

Матрица $C(z_0, z_s)$ особой точки однозначного характера является одной из ее матриц монодромии, которые подобны друг другу [4, гл. 1, § 2, п. 3; 12] и поэтому имеют одинаковый след, а также равны единичной матрице одновременно. Подобны между собой и любые их одинаковые степени. Если хотя бы одна матрица монодромии особой точки уравнения (1) равна I при всех значениях параметра ρ, то особую точку называют безмонодромной. Однозначные потенциалы с такими точками хорошо изучены (см. работы [5, 9] и библиографические ссылки в них). В [12] был впервые исследован более широкий класс квазибезмонодромных особых точек.

Определение 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbf{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Потенциал q и соответствующее уравнение Штурма — Лиувилля (1) будем называть *квазибезмонодромным* в «кольцеобразной» области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q, если существует такое натуральное число $\nu \geq 1$, что $M^{\nu}(\lambda) \equiv \pm I$, где M — одна из матриц монодромии области Ω_1.

Заметим, что безмонодромный потенциал является квазибезмонодромным с $\nu = 1$. Поскольку $M^{\nu}(\lambda) \equiv \pm I$, если и только если $M^{-\nu}(\lambda) \equiv \pm I$, то ограничение $\nu \geq 1$ в определении 6 несущественно. Важно только условие $\nu \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$.

Так как $(i\sigma_3)^2 = -I$, из следствия 2 получаем, что случаи, когда матрица P не зависит от параметра ρ, соответствуют (за исключением тривиальной ситуации $z_f = z_0$, $\theta = 0$) только квазибезмонодромным особым точкам (обратное следует из определения последних). На данный момент нет полного описания потенциалов с такими точками. Найдены лишь необходимые и достаточные условия квазибезмонодромности уравнения (1) и его потенциала в области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q через условия на матрицу монодромии области Ω_1 или ее след [12].

В разд. 4 сформулирован критерий принадлежности потенциала с регулярной изолированной особой точкой классу квазибезмонодромных. Там же обсуждаются возможности дальнейшего уточнения результатов настоящей работы.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть* z_s — *изолированная симметричная особая точка потенциала* $Q(z)$, *т. е. в некоторой симметричной относительно точки* z_s *области* $G \setminus \{z_s\}$ *функция* $Q(z)$ *голоморфна и удовлетворяет условию* (3). *Тогда если* $P(\gamma, z, z_0)$ — *передаточная матрица уравнения* (1) *между точками* z_0 *и* z *кривой* $\gamma \in G \setminus \{z_s\}$, *то передаточная матрица* $P(\widetilde{\gamma}, \widetilde{z}, \widetilde{z}_0)$ *уравнения* (1) *между точками*

$\widetilde{z}_0$ и $\widetilde{z}$ кривой $\widetilde{\gamma}$, симметричной кривой γ относительно особой точки z_s, может быть найдена из формулы

$$P(\widetilde{\gamma}, \widetilde{z}, \widetilde{z}_0) := \sigma_3 P(\gamma, z, z_0)\sigma_3 \quad (z, z_0 \in \gamma \subset G \setminus \{z_s\}). \tag{16}$$

Доказательство. При выполнении условия (3) уравнение (1) инвариантно относительно замены z на $\widetilde{z}$. Поэтому если функция $u(z)$ является решением (1) на некоторой кривой $\gamma \in G \setminus \{z_s\}$, то функция $\widetilde{u}(\varsigma) := \alpha u(\widetilde{\varsigma})$ ($\varsigma \in \widetilde{\gamma}$), где α — произвольное число, является решением (1) на кривой $\widetilde{\gamma}$. При этом, очевидно, $\widetilde{u}'(\varsigma) := -\alpha u'(x)|_{x=\widetilde{\varsigma}}$ и $\widetilde{\widetilde{\varsigma}} = \varsigma$. Полагая $\widetilde{u}_1(\varsigma) := u_1(\widetilde{\varsigma})$ и $\widetilde{u}_2(\varsigma) := -u_2(\widetilde{\varsigma})$, где решения u_1 и u_2 удовлетворяют условиям (2) в точке z_0, получим, что $\widetilde{u}_1(\varsigma)$ и $\widetilde{u}_2(\varsigma)$ удовлетворяют этим же условиям в точке $\widetilde{z}_0$, являются решениями (1) на кривой $\widetilde{\gamma}$ и при этом (после переобозначения ς на $\widetilde{z}$)

$$\widetilde{u}_1(\widetilde{z}) = u_1(z), \quad \widetilde{u}_1'(x)|_{x=\widetilde{z}} = -u_1'(z),$$
$$\widetilde{u}_2(\widetilde{z}) = -u_2(z), \quad \widetilde{u}_2'(x)|_{x=\widetilde{z}} = u_2'(z) \quad (z \in \gamma \subset G \setminus \{z_s\}),$$

что совпадает с формулой (16).

Лемма 3. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, спрямляемые кривые γ_1 и γ_2 лежат в области $G \setminus \{z_s\}$ голоморфности потенциала $Q(z)$, имеют общее начало z_0, общий конец z_f и одинаковый угол θ обхода точки z_s. Тогда $P(\gamma_1, z_f, z_0) \equiv P(\gamma_2, z_f, z_0)$.*

Доказательство. Лемма формализует в терминах настоящей работы известный факт, следующий из теоремы о монодромии (см., например, рассуждения, приведенные в [1, гл. 3, § 1]).

Лемма 4. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда регулярную циклическую матрицу $C(z_0, z_s)$ особой точки z_s уравнения* (1) *относительно точки $z_0 \in G \setminus \{z_s\}$ можно представить в виде*

$$C(z_0, z_s) = (\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s))^2 = (R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3)^2 \quad (z_0 \in G \setminus \{z_s\}). \tag{17}$$

Доказательство. Из определения 3, тождества $(\sigma_3)^2 = I$ и (16) имеем

$$\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s) = R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3. \tag{18}$$

Соотношение (17) получим, подставив формулу (18) в следующее из определений 3, 4 и леммы 3 равенство

$$C(z_0, z_s) = R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s) \equiv R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s).$$

Лемма 5. *Монотонность функции $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ на соединяющей точки z_0 и z_f кривой γ при всех лежащих на некотором луче β значениях параметра λ обеспечивает для элементов p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ передаточной матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ уравнения* (1) *при $|\lambda| \to \infty$ вдоль луча β асимптотики такого же вида, как для элементов передаточных матриц вдоль отрезков. В первом приближении по $1/|\lambda|$ они имеют вид*

$$p_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{2}\left\{\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(\lambda\Delta) + (-1)^{i+j}\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(-\lambda\Delta)\right\}, \tag{19}$$

где $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 1$, $\zeta_{12} = 1/\lambda$, $\zeta_{21} = \lambda$, $\Delta := z_f - z_0$, а символы $O(1)$ обозначают различные функции λ, ограниченные при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} — конечная величина.

Доказательство. Лемма следует из результатов монографий [1, 2]. Ее доказательство аналогично доказательствам лемм 8, 9 в работе [13], если в них заменить слово отрезок словом кривая и положить $N = 0$, $z_1 = z_f$ и $\theta_0 = 1$.

Лемма 6. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения* (1), *L_{12} — отрезок, соединяющий точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$. Тогда элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ, асимптотика которых при больших значениях $|\rho|$ имеет вид* (19), *если $z_s \notin L_{12}$ или/и* $\mathrm{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} \neq 0$.

Доказательство. Передаточные матрицы уравнения (1) — целые функции ρ [2, теорема 24.1]. Если $z_s \notin L_{12}$, то по определению 3 матрица $R(z_2, z_1, z_s) := P(L_{12}, z_2, z_1)$ и, значит, ее элементы имеют асимптотику (19). Если $z_s \in L_{12}$, $\mathrm{Re}\{\lambda(z_1 - z_s)\} \neq 0$, то в силу лемм 2.4 и 2.5 работы [10] существуют соединяющие точки z_1 и z_2 ломаные из определения 3, вдоль которых величина $\mathrm{Re}\{\lambda(z - z_1)\}$ меняется монотонно. Поскольку по лемме 3 выбор конкретной такой ломаной не меняет матрицу $R(z_2, z_1, z_s)$, элементы последней имеют асимптотику (19) по лемме 5.

Лемма 7. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения* (1), *$z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$. Тогда $R(z_2, z_1, z_s) \equiv I$, если $z_1 = z_2$. В остальных случаях элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ с индикатором*

$$h_{12} = |z_2 - z_1| |\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_{12})| \quad (\varphi_{12} := \arg(z_2 - z_1)) \tag{20}$$

и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча

$$\rho_{12}(t) = -t \exp\{-2i\varphi_{12}\} \quad (t \geq 0). \tag{21}$$

Доказательство. Условие $\mathrm{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} = 0$ можно записать в виде $\lambda(z_2 - z_1) = i\xi$, где ξ — действительное число. Это означает, что параметр $\rho := \lambda^2$ лежит на луче, задаваемом формулой

$$\rho_0(\xi) = -\xi^2/(z_2 - z_1)^2 = -\xi^2 \exp\{-2i\varphi_{12}\}/|z_2 - z_1|^2,$$

равносильной соотношению (21). В силу леммы 6 при $\mathrm{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} \neq 0$ элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции порядка $1/2$ типа $|z_2 - z_1|$ с кусочно-тригонометрическим индикатором (20) и вполне регулярным ростом. Из непрерывности индикатора [3, гл. I, § 16] следует, что формула (20) справедлива и при $\mathrm{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} = 0$.

В леммах 1 и 2 работы [12] было доказано, что если $m := \mathrm{Tr}\, M$ — след матрицы второго порядка M с единичным определителем и $\eta := \left(m + \sqrt{m^2 - 4}\right)/2$, то

$$M^n = \widetilde{a}_n M - \widetilde{a}_{n-1} I \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{22}$$

$$\widetilde{a}_n = m\widetilde{a}_{n-1} - \widetilde{a}_{n-2}, \tag{23}$$

$$\widetilde{a}_n = \frac{\eta^n - \eta^{-n}}{\eta - \eta^{-1}} \quad (\eta \neq \pm 1), \quad \widetilde{a}_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad (\eta = \pm 1). \tag{24}$$

Заметим, что особенность, возникающая при $\eta = \pm 1$ в первом из соотношений (24), устранима, а в формуле для η можно использовать любую фиксированную ветвь квадратного корня, при этом $1/\eta = (m - \sqrt{m^2 - 4})/2$.

Кроме того, лемма 3 работы [12] в обозначениях настоящей работы может быть сформулирована следующим образом.

Лемма 8. *При $n \neq 0$ коэффициент $\widetilde{a}_n$ в формуле* (22) *равен нулю, если и только если $|n| \geq 2$ и $m = 2\cos(\pi k/|n|)$, где $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом $\widetilde{a}_{n-1} = (-1)^{k+1}$.*

Леммы 9 и 10 обобщают приведенные выше результаты работы [12] на случай матрицы с любым отличным от нуля определителем.

Лемма 9. *Пусть D — матрица второго порядка, $\mu := \operatorname{Tr} D$, $d := \det D \neq 0$. Тогда*

$$D^n = a_n D - d a_{n-1} I \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{25}$$

$$a_0 = 0, \quad a_{-n} = -\frac{a_n}{d^n}, \tag{26}$$

$$a_n = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \frac{\left(\mu^2 - 4d\right)^l}{\mu^{2l}} \quad (n \geq 1), \tag{27}$$

где C_n^{2l+1} — биноминальные коэффициенты.

Доказательство. Пусть $d := (d_0)^2$ и $M := D/d_0$. Тогда $m := \operatorname{Tr} M = \mu/d_0$, $\det M = 1$ и для целой степени матрицы M справедлива формула (22). Поэтому

$$D^n = (d_0)^n \left(\widetilde{a}_n \frac{D}{d_0} - \widetilde{a}_{n-1} I\right),$$

что совпадает с соотношением (25), если положить

$$a_n := (d_0)^{n-1} \widetilde{a}_n. \tag{28}$$

С другой стороны, из (24) следует, что $\widetilde{a}_0 = 0$ и $\widetilde{a}_{-n} = -\widetilde{a}_n$, откуда с учетом определения (28) получаем формулы в (26). Далее, заметим, что

$$\eta := \frac{1}{2d_0}(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4d}), \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2d_0}(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4d}).$$

Подставляя последние формулы в первое соотношение в (24) и учитывая определение (28) при $n \geq 1$ имеем

$$a_n = \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4d})^n - (\mu - \sqrt{\mu^2 - 4d})^n}{2^n \sqrt{\mu^2 - 4d}}.$$

Пользуясь формулами бинома Ньютона, получаем соотношение (27).

Таким образом, при любом $n \neq 0$ коэффициент a_n является полиномом μ степени $|n| - 1$. В частности,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \mu. \tag{29}$$

Лемма 10. *Пусть D — матрица 2×2, $\mu := \operatorname{Tr} D$, $d := \det D \neq 0$. Тогда в формуле (25) коэффициент $a_n = 0$, если и только если $n = 0$ или $|n| \geq 2$, $\mu = 2\sqrt{d} \cos(\pi k/|n|)$, где $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом во втором случае $a_{n+1} = -d a_{n-1} = (-1)^k (\sqrt{d})^n$.*

Доказательство. Случай $n = 0$ подходит в силу соотношения (26). Пусть $M := D/d_0$, где $d_0 = \sqrt{d}$. Тогда $m := \operatorname{Tr} M = \mu/d_0$, $\det M = 1$ и для целой степени матрицы M справедлива формула (22), а для коэффициентов $\widetilde{a}_n$ — лемма 8 и соотношение (23). В силу последнего $\widetilde{a}_{n+1} = -\widetilde{a}_{n-1}$, если $\widetilde{a}_n = 0$. Для завершения доказательства остается использовать формулу (28), связывающую коэффициенты a и $\widetilde{a}$.

Заметим, что поскольку $\cos(\pi k/|n|) = -\cos(\pi(|n| - k)/|n|)$, изменение знака d_0 не меняет набора значений следа μ, при которых в силу леммы 10 $a_n = 0$.

Лемма 11. *Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения* (1), *точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$, причем $z_1 \neq z_2$. Тогда если задаваемый формулой* (5) *коэффициент $a_n(\rho)$ не равен тождественно нулю, то элементы матрицы $a_n R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ с индикатором* (20) *и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемого соотношением* (21).

Доказательство. Для целой функции $f(\rho)$ функция $M_f(r) := \max\limits_{|\rho|=r} |f(\rho)|$ либо постоянна, либо неограниченно монотонно возрастает с ростом r [3, гл. 1, § 1]. Поэтому для целой функции f порядка κ минимального типа имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\kappa} = 0.$$

Значит, как доказано в [3, гл. 3, § 4], $f(\rho)$ имеет вполне регулярный рост и индикатор, равный нулю. В силу (5) при $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$ коэффициент a_n является полиномом μ степени $|n| - 1$, а $a_0 \equiv 0$. Поэтому, учитывая лемму 1, получаем, что коэффициент a_n либо не зависит от спектрального параметра ρ, либо является целой функцией ρ порядка $1/2$ минимального типа, и следовательно, регулярного роста с индикатором, равным нулю. Известно, что произведение двух целых функций вполне регулярного роста одного порядка есть целая функция вполне регулярного роста того же порядка с индикатором, равным сумме индикаторов сомножителей (см. теорему 5 и замечание после нее в [3, гл. 3, § 4]). Пользуясь далее леммой 7, получаем все доказываемые утверждения.

Лемма 12. *Пусть $\varphi_\rho = \arg\rho$, $z_j \neq 0$, $\varphi^{(j)} := \arg(z_1 + (-1)^j z_2)$ $(j \in \{1,2\})$ и $f_j(\rho)$ — целая функция порядка $1/2$ с индикатором $h_j(\varphi_\rho) = |z_1 + (-1)^j z_2||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi^{(j)})|$ и вполне регулярного роста на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча $\rho^{(j)}(t) = -t\exp\{-2i\varphi^{(j)}\}$ $(t \geq 0)$. Тогда $F := f_1 + f_2$ — целая функция порядка $1/2$ вполне регулярного роста на всех проходящих через нуль лучах, кроме лучей*

$$\rho_j(t) = -t\exp\{-2i\varphi_j\}\ (t \geq 0), \quad \varphi_j = \arg z_j\ (j \in \{1,2\}), \tag{30}$$

с индикатором

$$h_F = |z_1||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_1)| + |z_2||\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_2)|. \tag{31}$$

Доказательство. Индикаторы функций $f_j(\rho)$ $(j \in \{1,2\})$ можно представить в виде

$$h_j = |\operatorname{Re}\{\lambda(z_1 + (-1)^j z_2)\}|/|\lambda| = |\operatorname{Re}\{\lambda z_1\} + (-1)^j \operatorname{Re}\{\lambda z_2)\}|/|\lambda|.$$

Очевидно, что $h_1 = h_2$, если и только если $\operatorname{Re}\{\lambda z_1\} = 0$ или $\operatorname{Re}\{\lambda z_2\} = 0$, что имеет место на лучах, задаваемых формулой (30) (см. доказательство леммы 7). Сумма двух целых функций одного порядка с разными индикаторами есть целая функция того же порядка с индикатором, равным большему из двух [3, гл. 1, § 15]. При этом из определений индикатора и регулярности роста следует, что если на некотором луче целая функция с большим индикатором имеет вполне регулярный рост, то и сумма на этом луче имеет вполне регулярный рост. Если a и b — действительные числа, то $\max\{|a+b|, |a-b|\} = |a| + |b|$. Отсюда, пользуясь также непрерывностью индикатора, получаем формулу (31) и вполне регулярный рост функции F на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемых формулой (30).

3. Доказательство теоремы 1 и следствия 2

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим несколько случаев (везде ниже $n \in \mathbb{Z}$).

Случай 1: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n)$. В силу леммы 3, определений 3 и 4, а также формул (17) и (25) при $D := R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3$, $d = -1$ имеем

$$P(\gamma, z_f, z_0) = R(z_f, z_0, z_s)C^n(z_0, z_s) = R(z_f, z_0, z_s)(a_{2n}R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n-1}I), \tag{32}$$

причем соединяющий точки z_0 и z_f отрезок L_{0f} расположен справа от прямой $z_s z_0$, проходящей через точки z_s и z_0, т. е. там же, где описанная в определении 3 стандартизованная кривая $\gamma_{\widetilde{0}0}$, соединяющая точки $\widetilde{z}_0$ и z_0. Поэтому замкнутая область, ограниченная L_{0f}, $\gamma_{\widetilde{0}0}$ и отрезком $L_{\widetilde{0}f}$, соединяющим точки $\widetilde{z}_0$ и z_f, не содержит особых точек потенциала Q. Следовательно, $R(z_f, z_0, z_s)R(z_0, \widetilde{z}_0, z_s) = R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)$ по лемме 3, и формула (32) совпадает с первым соотношением в (4).

Случай 2: $\theta/\pi = 2n$. Единственное отличие от случая 1 — отрезок L_{0f} лежит на луче с началом в точке z_s, проходящем через точку z_0.

Случай 3: $\theta/\pi \in (2n, 2n+1)$. В силу леммы 3, определений 3 и 4 тождества $(\sigma_3)^2 = I$, а также формул (17) и (25) при $D := \sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s)$, $d = -1$ имеем

$$\begin{aligned} P(\gamma, z_f, z_0) = R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s)C^n(z_0, z_s) = R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3, \\ (\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s))^{2n+1} = R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3(a_{2n+1}\sigma_3 R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s) + a_{2n}I). \end{aligned} \tag{33}$$

При этом отрезок $L_{\widetilde{0}f}$ расположен слева от прямой $z_s z_0$, т. е. там же, где стандартизованная кривая $\gamma_{0\widetilde{0}}$. Следовательно, $R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)R(\widetilde{z}_0, z_0, z_s) = R(z_f, z_0, z_s)$ по лемме 3 (замкнутая область, ограниченная отрезками $L_{\widetilde{0}f}$, L_{0f} и кривой $\gamma_{0\widetilde{0}}$, не содержит особых точек потенциала Q). Значит, формула (33) совпадает со вторым соотношением в (4).

Случай 4: $\theta/\pi = (2n+1)$. Единственное отличие от случая 3 — отрезок $L_{\widetilde{0}f}$ лежит на луче с началом в точке z_s, проходящем через точку $\widetilde{z}_0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 заметим, что формулы (5) для коэффициентов a_j $(j \in \mathbb{Z})$ в соотношениях (4) получаются из формул (26) и (27) при $d = -1$.

Перейдем к доказательству следствия 2 (везде ниже $n \in \mathbb{Z}$).

Случай 1: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n]$ $(\theta/\pi \in (2n, 2n+1])$ и a_{2n}, a_{2n-1} (a_{2n}, a_{2n+1}) не равны тождественно нулю. Полагая в лемме 12 $z_1 = z_f - z_s$, $z_2 = z_0 - z_s$, пользуясь также формулой (4) и леммой 11, получим, что элементы матрицы P зависят от ρ по типу 4.

Случай 2: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n+1]$, $a_{2n} \equiv 0$ ($a_{2n} = 0$ при любых значениях ρ). По лемме 10 (при $d = -1$) $a_{2n} \equiv 0$, если и только если $n = 0$ или $n \neq 0$ и $\mu(\rho) \equiv \mu_{2|n|,k}$, где $k \in \{1, \dots, 2|n|-1\}$, а числа $\mu_{l,k}$ определены в (15). В силу леммы 10 и формул (4), (26), (29) в первом случае $P = R(z_f, z_0, z_s)$, а во втором — $P = (-1)^{n-k}R(z_f, z_0, z_s)$. По лемме 7 в обоих ситуациях элементы матрицы P либо не зависят от ρ, если $z_f = z_0$, либо их индикатор имеет тип 2, если $z_f \neq z_0$.

Случай 3: $\theta/\pi \in (2n, 2n+2]$, $a_{2n+1} \equiv 0$. По лемме 10 (при $d = -1$) $a_{2n+1} \equiv 0$, если и только если $n \notin \{-1; 0\}$ и $\mu \equiv \mu_{|2n+1|,k}$, где $k \in \{1, \dots, |2n+1|-1\}$, а числа $\mu_{l,k}$ определены в (15). При этом в силу леммы 10 и формулы (4) матрица

$P = i(-1)^{n-k}R(z_f, \widetilde{z}_0, z_s)\sigma_3$. Поэтому по лемме 7 ее элементы либо не зависят от ρ, если $z_f = \widetilde{z}_0$, либо их индикатор имеет тип 3, если $z_f \neq \widetilde{z}_0$.

Заметим, что лучи (12)–(14) совпадают, если $\theta = \pi n$. При этом совпадают также индикаторы типов 3 и 4, если $\theta = 2n\pi$, и индикаторы типов 2 и 4, если $\theta = (2n+1)\pi$. В этих случаях будем считать, что реализуется тип зависимости 4, так как при $\varphi_\rho = \pi - 2\varphi_0$ ($\mathrm{Re}\{\lambda(z_0 - z_s)\} = 0$) асимптотика передаточной матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ отличается от асимптотики передаточной матрицы вдоль отрезка (см определение 3 и лемму 6).

Объединяя рассмотренные случаи, получаем все утверждения следствия 2.

4. Заключение

В следствии 2 отмечалось, что при типах 2 и 3 зависимости $P(\rho)$ последняя по сути является такой же, как на отрезке с голоморфным потенциалом. Это означает, что в этом случае можно уточнить асимптотики и матрицы P, и распределения нулей ее элементов или их комбинаций, т. е. спектра краевых задач для уравнения (1), которые будут аналогичны классическим [1, 2]. Оказывается, что и в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 полученные выше результаты могут быть относительно легко уточнены для регулярных симметричных особых точек, так как в этом случае c_0 и μ не зависят от ρ. Действительно, уравнение (1) равносильно следующей системе уравнений первого порядка:

$$(z - z_s)y_1' = y_2, \quad (z - z_s)y_2' = (z - z_s)^2(\lambda^2 - Q(z))y_1 + y_2, \tag{34}$$

где $y_1(z) := u(z)$. Система (34) имеет в точке z_s регулярную особую точку, если потенциал $Q(z)$ в ее окрестности G может быть разложен в сходящийся ряд вида

$$Q(z) = -\frac{p(p-1)}{(z - z_s)^2} + \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_s)^n \quad \left(p \geq \frac{1}{2}\right), \tag{35}$$

где ограничение на значения p учитывает тот факт, что замена p на $1 - p$ не меняет вида потенциала (35). Пусть $y_1^{(n)} = u_n(z)$ ($n = 1, 2$), где $u_n(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1) вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset G \setminus \{z_s\}$, удовлетворяющие условиям (2). Тогда в силу определения 1 и соотношений (34)

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z - z_s \end{pmatrix} P(\gamma, z, z_0).$$

Поэтому матрица $C(z_0, z_s)$ совпадает с одной из матриц монодромии особой точки z_s системы (34). Пользуясь теоремами о виде решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности регулярной особой точки [14, гл. 15, § 10], можно получить следующую формулу для следа матрицы монодромии особой точки z_s системы (34) с потенциалом (35), а значит, и матрицы $C(z_0, z_s)$:

$$c_0 = 2\cos(2\pi p). \tag{36}$$

Формула (36) в сочетании с полученным в [12] критерием квазибезмонодромности изолированной особой точки голоморфного потенциала Q позволяет утверждать, что потенциал (35) квазибезмонодромный (с $\nu \geq 2$) тогда и только тогда, когда число p является рациональным, отличным от целого. Напомним, что случай целого p соответствует безмонодромным потенциалам при выполнении дополнительных условий [5, 9], которые для симметричного потенциала выполняются автоматически.

Таким образом, и в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 при $\theta \neq \pi n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ использование формул (4), (5), (8) и (36) позволяет достаточно детально исследовать асимптотику передаточной матрицы и спектры краевых задач для уравнения (1) в окрестности симметричной регулярной особой точки. При этом будем иметь дело с суммой умноженных на различные числа элементов передаточных матриц вдоль двух непараллельных отрезков. Возникающие при этом асимптотики ранее неоднократно исследовались, причем в более общих ситуациях (см. статьи [8, 11] и библиографические ссылки в них).

Уточнение результатов настоящей работы при $\theta = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ является существенно более сложной задачей даже для регулярных особых точек. Однако поскольку методика решений дифференциальных уравнений в окрестности таких точек хорошо известна [14, гл. 15, § 10], эта сложность носит в основном технический характер. Для $\theta = \pi$ и $Q = \alpha/z^2$ соответствующее исследование проведено в [7].

Для иррегулярных особых точек след матрицы монодромии системы (34) и уравнения (1) теоретически может быть найден с помощью абсолютно сходящегося ряда, полученного в прошлом веке Лаппо-Данилевским [15]. Однако этот ряд имеет очень громоздкий вид и такую возможность пока никому не удалось реализовать. Поэтому вопрос о возможности уточнения результатов настоящей работы в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 в окрестности иррегулярной особой точки остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568.
6. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма — Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 52–88.
7. *Ишкин Х. К., Давлетова Л. Г.* Регуляризованный след оператора Штурма — Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1291–1303.
8. *Ishkin K. K., Rezbayev A. V.* On the Davies formula for the distribution of eigenvalues of a non-self-adjoint differential operator // J. Math. Sci. 2021. V. 252. P. 374–383.
9. *Ishkin K. K., Marvanov R.* On the class of potentials with trivial monodromy // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 6. P. 1166–1174.
10. *Голубков А. А.* Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида // Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 4. Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ РАН, 2024. Т. 233. С. 3–13.
11. *Голубков А. А.* Краевая задача для уравнения Штурма — Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1005–1027.

12. *Голубков А. А.* Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1032–1038.

13. *Golubkov A. A.* Inverse problem for the Sturm — Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on the curve // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. V. 18. P. 951–974.

14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

15. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию 5 февраля 2025 г.
После доработки 18 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Голубков Андрей Александрович (ORCID 0000-0002-5265-1310)
Специализированный учебно-научный центр МГУ имени М. В. Ломоносова,
ул. Кременчугская, 11, Москва 121352
andrej2501@yandex.ru