

## НОВЫЕ ПРИМЕРЫ НЕПРОНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ

Ц. Го, В. Го, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

**Аннотация.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *пронормальной*, если для любого элемента  $g \in G$  подгруппы  $H$  и  $H^g$  сопряжены в подгруппе  $\langle H, H^g \rangle$ . Известно, что значительная часть конечных простых групп обладает свойством (\*): любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в группе. К настоящему времени конечные простые группы со свойством (\*), за исключением простых линейных и унитарных групп с некоторыми ограничениями на естественные арифметические параметры, классифицированы. В 2024 г. была начата классификация простых линейных и унитарных групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. План состоит в нахождении источников всех возможных примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов, а затем в доказательстве того, что других примеров нет. В 2024 г. найдены серии примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах над полем нечетной характеристики. В настоящей работе строится новая серия примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах над полем нечетной характеристики.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.405

**Ключевые слова:** конечная группа, простая группа, линейная простая группа, унитарная простая группа, пронормальная подгруппа, нечетный индекс.

### Введение

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *пронормальной* в  $G$  (обозначение  $H \text{ prn } G$ ), если для любого элемента  $g \in G$  подгруппы  $H$  и  $H^g$  сопряжены в подгруппе  $\langle H, H^g \rangle$ .

Понятие пронормальной подгруппы было введено Ф. Холлом [1] и оказалось весьма полезным. В терминах пронормальности допускают описание, а иногда могут быть полностью решены, некоторые важные вопросы теории групп, алгебраической комбинаторики и других областей. Пронормальность тесно связана с широко используемым в теории групп и алгебраической комбинаторике рассуждением, известным как аргумент Фраттини (см. [2, лемма 4]). О том, что изучение пронормальных подгрупп в теории групп вообще и теории конечных групп, в частности, является актуальной задачей, привлекающей внимание

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда естественных наук (NNSF) Китая, проекты 12361003 и 12171126, и Хайнаньского провинциального фонда естественных наук Китая (Hainan Provincial Natural Science Foundation of China), проект 122RC543. Часть исследований выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

исследователей и имеющей многочисленные приложения, свидетельствует, например, обзор [3] и недавние работы [4–9].

Хорошо известными примерами пронормальных подгрупп являются такие классические объекты теории групп, как нормальные или максимальные подгруппы, силовские подгруппы конечных групп, холловы подгруппы конечных разрешимых групп.

В простой конечной группе  $G$  максимальные подгруппы являются частным случаем максимальных  $\mathfrak{X}$ -подгрупп, где в качестве  $\mathfrak{X}$  берется класс всех конечных групп, у которых порядки неабелевых композиционных факторов строго меньше, чем порядок группы  $G$  (напомним, что подгруппу  $H$  группы  $G$  называют  $\mathfrak{X}$ -подгруппой, если  $H$  изоморфна некоторой группе из класса  $\mathfrak{X}$ ). Такой класс  $\mathfrak{X}$  оказывается полным в смысле Виланда, т. е. подобно классу разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. В свое время существовала гипотеза о том, что для любого полного класса групп  $\mathfrak{X}$  в любой конечной простой группе все максимальные  $\mathfrak{X}$ -подгруппы пронормальны [10, проблема 5.20]. Однако недавно [11] были построены примеры простых групп  $G$  и полных классов  $\mathfrak{X}$  таких, что  $G$  содержит непронормальную максимальную  $\mathfrak{X}$ -подгруппу.

В [12] было доказано, что холловы подгруппы, т. е. подгруппы, у которых порядок и индекс взаимно просты, пронормальны в конечных простых группах, и выдвинута гипотеза, согласно которой в любой конечной простой группе всякая подгруппа нечетного индекса (т. е. надгруппа силовской 2-подгруппы) пронормальна. Эта гипотеза инициировала серию работ [2, 13–20]. Вначале в [13] гипотезу удалось подтвердить для большого массива конечных простых групп. Однако в работе [14] гипотеза была опровергнута.

В настоящее время существует гипотеза (см., например, [11, проблема 2]), являющаяся ослаблением обеих упомянутых выше гипотез и состоящая в том, что в конечных простых группах максимальные  $\mathfrak{X}$ -подгруппы нечетных индексов пронормальны для любого полного класса  $\mathfrak{X}$ . Существует также программа классификации конечных простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. Эта программа основана на описании нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах, полученном А. С. Кондратьевым [21], а также на классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах, полученной Либекком и Сакслон [22], Кантором [23] и Н. В. Масловой [24–26]. Выполнение этой программы, представляющей самостоятельный интерес, позволило бы продвинуться и в изучении только что сформулированной гипотезы.

На момент публикации программа выполнена [2, 15–17] для всех конечных простых групп за исключением групп  $PSL_n^\pm(q)$ , где  $PSL_n^+(q) = PSL_n(q)$  и  $PSL_n^-(q) = PSU_n(q)$ , а  $q$  и  $n$  не являются степенями двойки. Разбор этих случаев начат в работе [19]. План состоит в нахождении сначала всевозможных примеров непронормальных подгрупп нечетного индекса, определении, при каких  $\varepsilon \in \{+, -\}$ ,  $n$  и  $q$  эти примеры возникают в группе  $PSL_n^\varepsilon(q)$ , а затем в доказательстве с помощью техники, разработанной в статьях [2, 13, 14], того, что при всех оставшихся значениях указанных параметров всякая подгруппа нечетного индекса в группе  $PSL_n^\varepsilon(q)$  пронормальна. Уже найденные в [19] примеры показывают, что случай групп  $PSL_n^\varepsilon(q)$  наиболее сложный.

В данной работе будут указаны новые источники примеров непронормальных подгрупп нечетного индекса в линейных и унитарных группах. Цель работы — доказать приведенную ниже теорему 1. В ее формулировке используется

понятие  $r$ -части числа: если  $m$  — натуральное, а  $r$  — простое число, то  $r$ -частью  $m_r$  числа  $m$  называется наибольшая степень числа  $r$ , на которую делится  $m$ .

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $\varepsilon \in \{+, -\}$  и  $q$  является степенью простого нечетного числа. Допустим,  $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$  и  $(q - \varepsilon 1)_r > n_r > 1$  для некоторого нечетного простого числа  $r$ . Тогда группа  $PSL_n^\varepsilon(q)$  содержит непрономальную подгруппу нечетного индекса.

Условия теоремы реализуются, скажем, для группы  $PSL_3(37)$  и  $r = 3$ . Стабилизатор  $K$  в группе  $PSL_3(37)$  разложения пространства  $V$  в прямую сумму трех одномерных подпространств

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

является подгруппой нечетного индекса в  $PSL_3(37)$ , и наибольшая нормальная 3-подгруппа  $O_3(K)$  группы  $K$  обладает дополнением  $H_0$  в  $K$ . Подгруппа  $H_0$  также имеет нечетный индекс в  $PSL_3(37)$  и не пронормальна в  $K$  и в  $PSL_3(37)$ , как следует из доказательства теоремы 1.

Авторы надеются, что теорема 1 вместе с результатами работы [19] исчерпывает источники примеров непрономальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах.

## 1. Вспомогательные результаты

**Лемма 1** [13, лемма 3]. Пусть  $H$  — подгруппа,  $N$  — нормальная подгруппа конечной группы  $G$  и  $\pi: G \rightarrow G/N$  — естественный эпиморфизм. Справедливы следующие утверждения:

- (1) если  $H \text{ prn } G$ , то  $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$ ;
- (2) если  $N \leq H$  и  $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$ , то  $H \text{ prn } G$ .

В частности, подгруппа  $H$  нечетного индекса пронормальна в группе  $G$  тогда и только тогда, когда ее образ  $H/O_2(G)$  пронормален в факторгруппе  $G/O_2(G)$ .

**Лемма 2** [14, теорема 1]. Пусть  $H$  и  $V$  — подгруппы конечной группы  $G$  такие, что  $V$  — абелева нормальная подгруппа в  $G$  и  $G = HV$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) подгруппа  $H$  пронормальна в  $G$ ;
- (2)  $U = N_U(H)[H, U]$  для любой  $H$ -инвариантной подгруппы  $U \leq V$ .

## 2. Доказательство теоремы 1

Далее всюду считаем, что параметры  $q$ ,  $n$  и  $\varepsilon$  группы  $PSL_n^\varepsilon(q)$  и нечетное простое число  $r$  удовлетворяют условию теоремы 1, т. е.  $n \geq 3$ ,  $\varepsilon = \pm$ ,  $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$  и  $(q - \varepsilon 1)_r > n_r > 1$ .

Пусть  $(q - \varepsilon 1)_r = r^k$ . В группе  $PGL_n^\varepsilon(q)$  рассмотрим следующие подгруппы:

$D$  — проективный образ группы всех диагональных матриц;  $D \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1}^{n-1}$  — гомотопическая группа;

$D_0 = D \cap PSL_n^\varepsilon(q)$ ;  $D_0 \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)/(n, q-\varepsilon 1)}$ ;

$T$  — силовская 2-подгруппа группы  $D$ ;

$T_0 = T \cap PSL_n^\varepsilon(q)$  — силовская 2-подгруппа группы  $D_0$ ;

$R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $D$ ;  $R \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-1}$ ;

$R_0$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $D_0$ ;  $R_0 \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r/n_r}$ ;

$V = \Omega_1(R) = \{x \in R \mid x^r = 1\}$  — элементарная абелева подгруппа ранга  $n - 1$ ;

$U = \mathcal{U}^{k-1}(R_0) = \langle x^{r^{k-1}} \mid x \in R_0 \rangle$  — элементарная абелева подгруппа ранга  $n - 2$ .

**Лемма 3.** В сделанных предположениях  $V \leq PSL_n^\varepsilon(q)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что  $R_0 = R \cap D_0 = R \cap PSL_n^\varepsilon(q)$  и, как указано выше,

$$R_0 \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r/n_r}.$$

Пусть  $V_0 = \Omega_1(R_0)$ . Тогда, поскольку  $(q - \varepsilon 1)_r > n_r$ , подгруппа  $V_0$  — элементарная абелева  $r$ -группа ранга  $n - 1$ . Кроме того,  $V_0 \leq V$ . Сравнивая ранги элементарных абелевых групп  $V$  и  $V_0$ , заключаем, что  $V = V_0 \leq PSL_n^\varepsilon(q)$ . Лемма 3 доказана.  $\square$

Пусть  $S$  — образ в  $PGL_n^\varepsilon(q)$  подгруппы

$$\langle h(ij) \mid i, j = 1, \dots, n, i \neq j \rangle \quad (1)$$

из  $GL_n^\varepsilon(q)$ , порожденной всеми  $n \times n$  мономиальными матрицами  $h(ij)$ , элементы которых равны нулю, за исключением

$$h(ij)_{ij} = -1, \quad h(ij)_{ji} = 1 \quad \text{и} \quad h(ij)_{kk} = 1 \quad \text{при} \quad k \neq i, j.$$

Заметим, что  $S \leq PSL_n^\varepsilon(q)$ , поскольку  $\det h(ij) = 1$ . Существует естественный эпиморфизм подгруппы мономиальных матриц группы  $GL_n^\varepsilon(q)$  на  $S_n$ , ядро которого — подгруппа диагональных матриц, содержащая  $Z(GL_n^\varepsilon(q))$ . Образ элемента  $h(ij)$  при этом — транспозиция  $(ij) \in S_n$ . Отсюда следует, что  $S$  нормализует как саму подгруппу  $D$ , так и ее характеристические подгруппы  $T, T_0, R, U$  и  $V$ , причем  $SD/D \cong S_n$ . Кроме того, группа, заданная (1), как легко видеть, состоит из мономиальных матриц, у которых все ненулевые элементы равны  $\pm 1$ . Поэтому ядро сужения на группу (1) эпиморфизма группы мономиальных матриц на группу  $S_n$  состоит из диагональных матриц с диагональными элементами  $\pm 1$ . Отсюда следует, что пересечение  $S \cap D$  является группой периода 2 и  $S \cap D \leq T$ . Значит,

$$ST/T \cong S/(S \cap T) = S/S \cap D \cong S_n.$$

Рассмотрим подгруппы

$$H = ST \quad \text{и} \quad H_0 = ST_0.$$

Пользуясь [26, основная теорема, утверждение (6)], легко показать, что  $SD$  — подгруппа нечетного индекса в  $PGL_n^\varepsilon(q)$ , откуда вытекает, что  $H$  и  $H_0$  — подгруппы нечетных индексов в группах  $PGL_n^\varepsilon(q)$  и  $PSL_n^\varepsilon(q)$  соответственно. С учетом тождества Дедекинда имеем

$$H_0 = ST_0 = S(T \cap PSL_n^\varepsilon(q)) = ST \cap PSL_n^\varepsilon(q) = H \cap PSL_n^\varepsilon(q).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H/T & \longrightarrow & HV/T \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_0/T_0 & \longrightarrow & H_0V/T_0. \end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки — естественные вложения. Вертикальная стрелка справа — изоморфизм, вытекающий из соотношений  $S, V \leq PSL_n(q)$  и

$$\begin{aligned} HV/T &= SVT/T \cong SV/(SV \cap T) = SV/(SV \cap PSL_n^\varepsilon(q) \cap T) \\ &= SV/(SV \cap T_0) \cong SVT_0/T_0 = H_0V/T_0. \end{aligned}$$

Вертикальная стрелка слева — изоморфизм групп  $H/T$  и  $H_0/T_0$ , возникающий при сужении предыдущего изоморфизма на подгруппу  $H/T$ .

Докажем теорему 1, установив, что подгруппа  $H_0$  не пронормальна в  $PSL_n^\varepsilon(q)$ . Для этого достаточно показать, что  $H_0$  не пронормальна в  $H_0V$ . Последнее, в свою очередь, по лемме 1 равносильно тому, что  $H_0/T_0$  не пронормальна в  $H_0V/T_0$ , и в силу сделанных замечаний тому, что подгруппа  $H/T$  не пронормальна в  $HV/T$ . Последнее утверждение и будем доказывать.

Напомним, что  $H/T \cong S_n$ . Действие подгруппы  $H$  сопряжениями на  $V$  таково, что  $T$  содержится в ядре этого действия. Таким образом, на  $V$  возникает структура  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля. Из следующей леммы<sup>1)</sup> можно понять, что это за модуль.

**Лемма 4.** *Примем введенные выше обозначения и предположения. Пусть также  $W = \mathbb{F}_r^n$  — естественный подстановочный  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуль. Рассмотрим его подмодули*

$$W^+ = \{(\alpha, \dots, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}_r\}, \quad W^- = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}.$$

(i) *Полный список подмодулей  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля  $W$  следующий:  $0$ ,  $W^+$ ,  $W^-$  и  $W$ . В сделанных выше предположениях ( $n_r > 1$ ) имеют место включения*

$$0 < W^+ < W^- < W. \quad (2)$$

*Фактормодуль  $W^-/W^+$  неприводим и отличен от главного модуля.*

(ii) *Действие группы  $H$  на  $V$  сопряжениями индуцирует на  $V$  структуру  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, изоморфного  $W/W^+$ . При этом подгруппа  $U$  соответствует подмодулю  $W^-/W^+$ .*

(iii)  $N_V(H) \leq U$ ,  $[H, V] \leq U$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действие элемента  $g \in S_n$  на векторах из  $W$  задается правилом

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)g = (\alpha_{1g^{-1}}, \dots, \alpha_{ng^{-1}}). \quad (3)$$

Пусть  $M$  — собственный подмодуль модуля  $W$ . Зададим  $M$  системой уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n \beta_{ik} x_i = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Так как  $M \neq W$ , среди коэффициентов  $\beta_{ik}$  системы найдется ненулевой. Если для каждого данного  $k$  все  $\beta_{ik}$  одинаковы, то  $M = W^-$ . Допустим, что  $\beta_{ik} \neq \beta_{jk}$  для некоторых  $k \in \{1, \dots, m\}$  и различных  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Все векторы из  $M$  удовлетворяют уравнению

$$\dots + \beta_{ik} x_i + \dots + \beta_{jk} x_j + \dots = 0. \quad (4)$$

Согласно (3) множество векторов  $M$  инвариантно относительно любых перестановок координат, в частности, относительно перестановки  $i$ -й и  $j$ -й координат. Следовательно, все векторы из  $M$  будут удовлетворять также уравнению

$$\dots + \beta_{jk} x_i + \dots + \beta_{ik} x_j + \dots = 0, \quad (5)$$

где все невыписанные коэффициенты те же, что и в (4). Тогда все векторы из  $M$  удовлетворяют также разности уравнений (4) и (5), которая эквивалентна

<sup>1)</sup>Отметим, что значительная часть утверждений леммы хорошо известна, ср., например, с [27, лемма 5.3.4]. Мы приводим ее здесь для полноты изложения.

уравнению  $x_i = x_j$ . Те же соображения инвариантности относительно перестановок переменных показывают, что вместо  $x_i$  и  $x_j$  в равенстве  $x_i = x_j$  можно поставить любую пару различных переменных. Тем самым все векторы из  $M$  удовлетворяют равенствам  $x_1 = \dots = x_n$  и  $M$  содержится в одномерном подмодуле  $W^+$ , т. е.  $M \in \{0, W^+\}$ . Часть утверждения (i), касающаяся списка подмодулей, доказана.

Отсюда, в частности, следует неприводимость фактормодуля  $W^-/W^+$ . Для завершения доказательства утверждения (i) осталось установить, что модуль  $W^-/W^+$  не главный. Его размерность равна  $n - 2$ . Если бы он был главным, оказалось бы, что  $n = 3$ . Так как  $n_r > 1$ , это означало бы, что  $r = 3$ . Известное свойство симметрических групп состоит в том, что любое поле является для них полем разложения [28, теорема 2.1.12]. Группа  $S_3$  обладает ровно двумя классами сопряженности 3-регулярных элементов: тождественная подстановка и транспозиции. Два обыкновенных линейных характера группы  $S_3$ , главный и знакопеременный, целочисленны. После редукции по модулю 3 они остаются характерами (абсолютно) неприводимых представлений, отвечающих 3-брауэровым характерам  $\phi_1$  и  $\phi_2$  в табл. 1.

Таблица 1

|          | 1 | (ij) |
|----------|---|------|
| $\phi_1$ | 1 | 1    |
| $\phi_2$ | 1 | -1   |
| $\pi$    | 3 | 1    |

В этой же таблице приведено значение 3-брауэрова характера  $\pi$ , отвечающего естественному подстановочному  $\mathbb{F}_3 S_3$ -модулю. Видно, что  $\pi = 2\phi_1 + \phi_2$ . Ряд (2) композиционный, и его факторы  $W^+$  и  $W/W^-$  изоморфны главному модулю. Значит, фактор  $W^-/W^+$  соответствует знакопеременному характеру  $\phi_2$ . Утверждение (i) доказано полностью.

Пусть  $\hat{G} = GL_n(q)$  при  $\varepsilon = +$  и  $\hat{G} = GL_n(q^2)$  при  $\varepsilon = -$ . Рассмотрим в  $\hat{G}$  подгруппы  $\hat{Z} = Z(\hat{G})$ ;  $\hat{D}$ , состоящую из всех диагональных матриц;  $\hat{S}$ , заданную (1);  $\hat{K}$ , состоящую из всех подстановочных матриц;  $\hat{T}$  — силовскую 2-подгруппу в  $\hat{D}$ ;  $\hat{R}$  — силовскую  $r$ -подгруппу в  $\hat{D}$  и  $\hat{V} = \Omega_1(\hat{R})$ .

Легко видеть, что  $\hat{T}\hat{S} = \hat{T}\hat{K}$ . Рассмотрим действие сопряжениями группы  $\hat{T}\hat{S} = \hat{T}\hat{K}$  на элементарной абелевой группе  $\hat{V}$  ранга  $n$ . Ядро этого действия совпадает с подгруппой  $\hat{T}$ , причем

$$\hat{T}\hat{S}/\hat{T} = \hat{T}\hat{K}/\hat{T} \cong \hat{K} \cong S_n.$$

Группу  $\hat{V}$  можно рассматривать как векторное пространство, а указанное действие задает на  $\hat{V}$  структуру  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, который, как легко видеть, изоморфен естественному подстановочному  $\mathbb{F}_r S_n$ -модулю  $W$ . При таком отождествлении подгруппа  $\hat{V} \cap \hat{Z}$  совпадает с  $W^+$ . Значит,  $V = \hat{V}\hat{Z}/\hat{Z} \cong \hat{V}/(\hat{V} \cap \hat{Z})$  отождествляется с  $W/W^+$ . Напомним, что в  $V$  содержится элементарная абелева подгруппа  $U = \mathcal{U}^{k-1}(R_0)$  ранга  $n - 2$ , инвариантная относительно действия группы  $H = \hat{T}\hat{S}\hat{Z}/\hat{Z}$ . Согласно (i) при отождествлении  $V$  с  $W/W^+$  подгруппа  $U$  соответствует единственному  $(n - 2)$ -мерному подмодулю  $W^-/W^+$  модуля  $W/W^+$ . Утверждение (ii) доказано.

Ясно, что  $N_V(H)$  и  $[H, V]$  — подгруппы, инвариантные относительно сопряжений элементами из  $H$ , и, следовательно, в  $W/W^+$  им соответствуют подмодули. Также очевидно, что подгруппа  $[H, V]$ , содержащаяся в  $[\hat{T}\hat{S}\hat{Z}/\hat{Z}, \hat{V}\hat{Z}/\hat{Z}]$ ,

как подмодуль содержится в  $[W/W^+, S_n] = W^-/W^+$ , т. е.  $[H, V] \leq U$ . В силу того, что  $W^-/W^+$  — единственный максимальный (и единственный собственный ненулевой) подмодуль в  $W/W^+$  согласно (i), для доказательства включения  $N_V(H) \leq U$  достаточно установить, что  $N_V(H) \neq V$ . Предположение равенства  $N_V(H) = V$  означало бы, что  $H$  и  $V$  — нормальные подгруппы в  $HV$ . Но тогда

$$[H, V] \leq H \cap V = D \cap H \cap V \leq T \cap V = 1.$$

Это означало бы, что действие  $H$  на  $V$  тождественно вопреки тому, что это действие индуцирует на  $V$  структуру  $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, изоморфного неприводимому неглавному модулю  $W^-/W^+$ . Утверждение (iii) и с ним лемма 4 доказаны.  $\square$

В силу лемм 2 и 4 подгруппа  $H/T$  не пронормальна в  $HV/T$ . В силу сказанного выше подгруппа  $H_0$  не пронормальна в  $PSL_n^\varepsilon(q)$ . Теорема 1 также доказана.  $\square$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6 / Cambridge: Univ. of Cambridge, 1951–1967. URL: <http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788>.
2. Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О. О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 773–790.
3. de Giovanni F., Trombetti M. Pronormality in group theory // Adv. Group Theory Appl. 2020. V. 9, N 4. P. 123–149.
4. De Falco M., de Giovanni F., Musella C. Pronormality in uncountable groups // Commun. Algebra. 2025. V. 53, N 2. P. 901–908.
5. Brescia M., Ferrara M., Trombetti M. Groups whose subgroups are either Abelian or pronormal // Kyoto J. Math. 2023. V. 63, N 3. P. 471–500.
6. Brescia M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal // Commun. Algebra. 2023. V. 51, N 8. P. 3346–3353.
7. Ferrara M., Trombetti M. Groups with many pronormal subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2022. V. 105, N 1. P. 75–86.
8. Ferrara M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose nonnilpotent subgroups are pronormal // Bull. Austral. Math. Soc. 2024. V. 109, N 3. P. 512–521.
9. Ferrara M., Trombetti M. Periodic linear groups in which permutability is a transitive relation // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2024. V. 203, N 1. P. 361–383.
10. Guo W., Revin D. O. Pronormality and submaximal  $\mathfrak{X}$ -subgroups in finite groups // Commun. Math. Stat. 2018. V. 6, N 3. P. 289–317.
11. Ли Б., Ревин Д. О. Примеры непрономальных относительно максимальных подгрупп в конечных простых группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 140–145.
12. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
13. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383.
14. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. Критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 153–158.
15. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых симплектических группах // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 599–610.
16. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальных подгруппах в конечных простых группах // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 1. С. 7–11.
17. Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 6. P. 999–1016.
18. Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups // Groups St Andrews 2017 in Birmingham. Birmingham, 5th–13th August 2017. Eds C. M. Campbell, M. R. Quick, C. W. Parker, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2019. V. 455. P. 406–418. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.).

19. Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О. Непронормальные подгруппы нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 70–79.
20. Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups // J. Algebra Appl. 2023. V. 22, N 4. 20 p. 2150001.
21. Кондратьев А. С. Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
22. Liebeck M. W., Saxl J. The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. II Ser. 1985. V. 31, N 2. P. 250–264.
23. Kantor W. M. Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106, N 1. P. 15–45.
24. Маслова Н. В. Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
25. Maslova N. V. Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple classical socle // Groups St Andrews 2009 in Bath. Eds C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal, G. C. Smith, and G. Traustason. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2011. V. 387, N 2. P. 473–479. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.).
26. Maslova N. V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: addendum // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. V. 15. P. 707–718.
27. Kleidman P., Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990.
28. James G., Kerber A. The representation theory of the symmetric group. Reading, Massachusetts: Addison–Wesley Publ. Comp., 1981.

*Поступила в редакцию 27 декабря 2024 г.*

*После доработки 2 апреля 2025 г.*

*Принята к публикации 25 апреля 2025 г.*

Го Цзинь (Guo Jin, ORCID 0009-0003-5974-0484)  
School of Mathematics and Statistics, Hainan University,  
Haikou 570228, P.R. China  
guojinecho@163.com

Го Вэньбинь (Guo Wenbin, ORCID 0000-0002-6934-363X)  
School of Mathematics and Statistics,  
Nantong University, Nantong, Jiangsu 226019, P. R. China;  
Department of Mathematics,  
University of Science and Technology of China,  
Hefei, Anhui 230026, P. R. China  
wbguo@ustc.edu.cn

Маслова Наталья Владимировна (ORCID 0000-0001-6574-5335)  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620077;  
Уральский федеральный университет,  
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002  
butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович (ORCID 0000-0002-8601-0706)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
revin@math.nsc.ru