Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 517.518:517.54

НОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Получены эквивалентное описание гомеоморфизмов φ области Ω в римановом пространстве $\mathbb{M}$ на метрическое пространство $\mathbb{Y}$, гарантирующее ограниченность оператора композиции из пространства липшицевых функций $\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ в однородное пространство Соболева на $\mathbb{M}$ с первыми обобщенными производными, суммируемыми в степени $1 \leq q \leq \infty$, и другие новые свойства таких гомеоморфизмов. Новый подход позволяет эффективно доказать теорему о гомеоморфизмах областей в произвольном римановом пространстве $\mathbb{M}$, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств Соболева с первыми обобщенными производными. Новое доказательство, значительно более короткое сравнительно с первоначальным, базируется на минимальном наборе средств и позволяет получить новые свойства гомеоморфизмов в исследуемом вопросе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.404

Ключевые слова: риманово пространство, класс отображений Соболева со значениями в метрическом пространстве, аппроксимативная дифференцируемость, искажение отображения, обобщенное квазиконформное отображение, оператор композиции.

Введение

В работах последних лет [1–5] получено описание гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \Omega'$ областей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирующих ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty, \tag{1}$$

по правилу замены переменной: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ (здесь $L^1_p(\Omega')$ и $L^1_q(\Omega)$) — полунормированные однородные пространства Соболева, т. е. без основной нормы).

В работе [1] получен предварительный результат в этой задаче, в работах [2–4] доказаны утверждения 1–3 теоремы 1, а в [5] установлено равенство 4.

Окончательный результат в этой задаче сформулирован в следующем утверждении (см. [1–5]).

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект No FWNF-2022-0006).

Теорема 1. *Оператор* (1) *ограничен при* $1 \leq q \leq p < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$;

2) φ *обладает конечным искажением*: $D\varphi(x) = 0$ *п. вс. на множестве* $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ *нулей якобиана;*

3) $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$), *где внешняя функция искажения* $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, *определена по правилу*

$$\Omega \ni x \mapsto K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

4) $\|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|$.

Получено также описание, аналогичное теореме 1, для гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \Omega'$ групп Карно: $\Omega \subset \mathbb{G}$, а $\Omega' \subset \mathbb{G}'$ (см. [2–4], где доказаны аналоги утверждений 1–3 на группах Карно, и работу [6], в которой новым методом установлено равенство 4 на группах Карно).

В работе [7] исследованы гомеоморфизмы областей на римановых пространствах одинаковой размерности ≥ 2. Аналоги утверждений 1–3 теоремы 1 доказаны в теореме 3 из [7], в которой вместо равенства вида 4 доказана двусторонняя оценка:

$$\alpha_{q,p} \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|, \tag{2}$$

где $\alpha_{q,p} \in (0; 1)$ — константа. Аналитическая часть доказательства теоремы 1 в работе [7] базируется на статьях [2, 4].

В рамках работы [7] доказано, что $\alpha_{q,p} = (2n\mathscr{D}^{\frac{1}{q}})^{-1}$, где

$$\mathscr{D} = \sup_{y_0 \in \Omega'} \varlimsup_{r \to 0} \frac{\nu(B(y_0; 2r))}{\nu(B(y_0; r))} < \infty.$$

Глобальная ограниченность величины $\mathscr{D}$ сверху следует из неравенства

$$\nu(B(x, 2r)) \leq 2^n \exp(\sqrt{(n-1)K} 2r) \nu(B(x, r))$$

при условии, что кривизна Риччи многообразия $\mathbb{M}'$ ограничена снизу: $\mathrm{Ric} \geq -Kg$ для некоторого $K > 0$ [8]. Таким образом, оценка снизу постоянной $\alpha_{q,p}$, полученная в [7, теорема 3], зависит от геометрии многообразия и поэтому не является универсальной.

Ниже (см. разд. 4), приведено новое, более лаконичное доказательство необходимости условий 1–3, которое позволяет вместо двойного неравенства (2) получить равенство

$$\|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|. \tag{3}$$

Это означает, что наилучшая постоянная $\alpha_{q,p}$ равна 1 и не зависит от геометрии многообразия. В случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ равенство вида (3) другим методом получено в [5].

Отметим, что в теореме 1 не рассмотрен случай $1 \leq q \leq p = \infty$. Первая половина работы посвящена исследованию этого случая на римановых многообразиях (на группах Карно этот вопрос изучен в [6, теорема 4.1]), при этом вместо оператора композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p = \infty,$$

изучаются ограниченные операторы композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad 1 \le q < \infty, \tag{4}$$

для любой липшицевой функции $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$[1)] (Здесь Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ — гомеоморфизм.) Основные результаты о свойствах таких гомеоморфизмов установлены в теореме 2.

В теореме 2 и предложении 7 доказано также, что гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ порождает оператор композиции (4) (без предположения о его ограниченности) тогда и только тогда, когда он принадлежит классу Решетняка [9] (см. определение 3). В аналитической части доказательств теорем 2 и 3 применяются рассуждения из работ [4, 6, 7].

1. Предварительные сведения

1.1. Классы функций Соболева на римановом многообразии. Далее мы фиксируем связное полное риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ класса C^r, $3 \le r \le \infty$, т. е. C^r-гладкое многообразие $\mathbb{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ которого выбрана евклидова метрика g_x, C^r-гладко меняющаяся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ (здесь $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}$ — длина касательного вектора $\dot\gamma(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x, y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых с концевыми точками x и y.

Символом $B(x, r) = \{y \in \mathbb{M} \mid d(x, y) < r\}$ будем обозначать открытый шар в римановой метрике с центром в точке $x \in \mathbb{M}$ и радиусом $r \in (0, \infty)$.

Мера на многообразии $\mathbb{M}$ определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта в $\mathbb{M}$. Диффеоморфизм $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как изометрию между (U, g) и $(\varphi(U), \overline{g})$, если определить риманов тензор $\overline{g}$ на $\varphi(U)$ следующим образом: $\overline{g}_x(X, Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$. Меру множества $E \subset U$ в случае, когда образ $\varphi(E)$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^n$, определим по формуле

$$\omega(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det \overline{g}}\, dx.$$

Можно доказать, что определенная таким образом мера не зависит от выбора системы координат и совпадает с n-мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^n(E)$ множества E как подмножества метрического пространства $(\mathbb{M}, g)$ (см., например, [11]).

Мера $\omega(E)$ произвольного множества $E \subset \mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i), \quad \text{где } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

[1)] В случае $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задача описания гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$, для которых оператор композиции (4) ограничен, сформулирована в [10, замечание 6].

множества E_i дизъюнктны, измеримы и каждое содержится в одной карте. Можно показать, что и в этом случае справедливо равенство $\mathscr{H}^n(E) = \omega(E)$.

Далее будем исследовать свойства измеримых отображений $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$, где $(\mathbb{M}', g')$ — еще одно риманово многообразие с римановым тензором g', относительно которого определяются риманова метрика d' на $\mathbb{M}'$; риманова метрика d' определяет, в свою очередь, меру ν на $\mathbb{M}'$.

Пусть Ω — область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1. **1.** Пространство $L_p(\Omega)$ функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$, состоит из измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\omega \right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь ω — определенная выше мера на римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$.

2. Если измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит L_p на каждой компактной части области Ω, то она называется *локально суммируемой в степени* p (в этом случае пишем $u \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ или $u \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$).

3. Отображение $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ *принадлежит* $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда функция $[\varphi]_y : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, определенная по правилу $[\varphi]_y(x) = d(\varphi(x), y)$, принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ для любой точки $y \in \mathbb{M}'$.

Определение 2. Для функций $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ класса C^1 можно определить дифференциал $df : T\mathbb{M} \to T\mathbb{R}$. В каждой карте (U, φ) дифференциал задается с помощью частных производных: $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал над конечномерным пространством $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x, существует единственный вектор $\nabla f \in T_x\mathbb{M}$, называемый градиентом, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_x\mathbb{M}$.

В координатах градиент ∇f можно найти следующим образом:

$$\nabla f = g^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

где g^{-1} — обратная матрица к g, а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные.

Обобщенным градиентом локально-суммируемой функции $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ называется локально-суммируемое сечение $h : \mathbb{M} \to T\mathbb{M}$, удовлетворяющее интегральному тождеству $\int\limits_{\mathbb{M}} h\eta \, d\omega = -\int\limits_{\mathbb{M}} f \nabla\eta \, d\omega$ для любой гладкой финитной функции $\eta : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. (Здесь $\nabla\eta$ — градиент функции η на $\mathbb{M}$.)

Однородное пространство Соболева $L^1_p(\Omega)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(\Omega)$. Полунорма в $L^1_p(\Omega)$ определяется как величина

$$\left\| f \mid L^1_p(\Omega) \right\| = \|\nabla f \mid L_p(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^p \, d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь $\nabla f(x)$ — обобщенный градиент функции f в точке $x \in \Omega$, а $|\nabla f(x)|$ — длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x).

Пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\big\|f \mid W_p^1(\Omega)\big\| = \|f \mid L_p(\Omega)\| + \|\nabla f \mid L_p(\Omega)\|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит* $W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset \Omega$ такой, что $V \Subset \Omega$ (т. е. V ограничена и $\overline{V} \subset \Omega$).

1.2. Отображения классов Решетняка со значениями в метрическом пространстве. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ *измеримое*, если прообраз $\varphi^{-1}(T)$ всякого борелевского множества $T \subset \mathbb{Y}$ измерим по Лебегу.

Класс $L_p(\Omega; \mathbb{Y})$, $1 \le p \le \infty$, состоит из измеримых отображений[2)] $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$, для которых

$$\|\rho(\varphi(\cdot), z) \mid L_p(\Omega)\| < \infty,$$

где $z \in \mathbb{Y}$ — некоторая фиксированная точка. Класс $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$ состоит из измеримых отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ таких, что $\varphi \in L_p(U; \mathbb{Y})$ для каждой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Пространство $\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ состоит из липшицевых функций $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ с конечной полунормой

$$\mathrm{Lip}(u) = \sup_{y_1 \ne y_2} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{\rho(y_1, y_2)}.$$

В [9] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 3 [9]. Будем говорить, что отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит *классу Решетняка* $L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$ ($L_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega; \mathbb{Y})$), $1 \le p \le \infty$, если выполнены следующие условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}^1(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;

2) существует функция $g \in L_p(\Omega)$ ($g \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$) такая, что

$$|\nabla(u \circ \varphi)| \le g \,\mathrm{Lip}(u) \tag{5}$$

п. вс. в Ω для каждой функции $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$.

Класс $W_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$ состоит из отображений, принадлежащих $L_p(\Omega; \mathbb{Y}) \cap L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$. Отображение φ *принадлежит* $W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega; \mathbb{Y})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \mathbb{Y})$ для любой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Ясно, что из условия 1 вытекает принадлежность $\varphi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$, поскольку функции $\rho(\varphi(\cdot), z)$, $z \in \mathbb{Y}$, локально суммируемые. Известно [11, 12], что среди функций g, удовлетворяющих (5), существует минимальная, называемая *верхним градиентом* отображения φ и обозначаемая символом $|\nabla_0 \varphi|$. Минимальность $|\nabla_0 \varphi|$ означает, что если $g \in L_p(\Omega)$ удовлетворяет (5), то $|\nabla_0 \varphi| \le g$ п. вс.

Отметим, что в определении 3 не требуется, чтобы отображение было измеримым. Измеримость отображения φ можно получить из других его свойств.

[2)] Точнее, из классов таких отображений, отождествляемых при совпадении п. вс.

Лемма 1. *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y},\rho)$ — метрическое пространство, $\varphi:\Omega\to\mathbb{Y}$ — отображение, V — открытое множество в $\mathbb{Y}$.*

Если для любой функции[3] $u\in\operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$, $\operatorname{dist}(\operatorname{spt}u,\mathbb{Y}\setminus V)>0$, *композиция $u\circ\varphi$ измеримая, то $\varphi^{-1}(V)$ — измеримое множество, а $\varphi:\varphi^{-1}(V)\to V$ — измеримое отображение.*

Доказательство. Фиксируем произвольное открытое подмножество $W\subset V$. Функция $u_W(y)=\operatorname{dist}(y,Y\setminus W)$ является 1-липшицевой. Зададим еще 1-липшицеву функцию $u_W^\varepsilon(y)=\max\{u_W(y)-\varepsilon,0\}$. Поскольку $u_W^\varepsilon(y)>0$ в том и только том случае, когда $\operatorname{dist}(y,Y\setminus W)>\varepsilon$, то

$$\operatorname{dist}\bigl(\operatorname{spt}u_W^\varepsilon,Y\setminus W\bigr)\ge\operatorname{dist}\bigl(\operatorname{spt}u_W^\varepsilon,Y\setminus V\bigr)\ge\varepsilon>0.$$

По предположению леммы функции $u_W^\varepsilon\circ\varphi$ измеримые, а потому и множества $\{x\in\Omega\mid(u_W^\varepsilon\circ\varphi)(x)>0\}$ измеримые. Измеримость $\varphi^{-1}(W)$ следует из соотношений

$$\varphi^{-1}(W)=\{x\in\Omega\mid(u_W\circ\varphi)(x)>0\}=\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigl\{x\in\Omega\mid\bigl(u_W^{1/l}\circ\varphi\bigr)(x)>0\bigr\}.$$

Поскольку прообраз всякого открытого множества измерим, то измерим прообраз всякого борелевского подмножества V, что и означает измеримость отображения $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$.

Замечание 1. Рассуждая в точности так же, как в [9, следствие 1] и [14, предложение 4.1], где это свойство установлено для $W_p^1(\Omega;\mathbb{Y})$, нетрудно показать, что в случае сепарабельного пространства $\mathbb{Y}$ класс $L_p^1(\Omega;\mathbb{Y})$ не расширится, если предполагать условия 1 и 2 верными не для всех липшицевых функций, а только для 1-липшицевых функций расстояния $u=u_{z_i}=\rho(\cdot,z_i)$, где z_i пробегает счетное плотное в $\mathbb{Y}$ множество. При этом запас функций g, удовлетворяющих (5), также не изменится.

Если $\mathbb{Y}=\mathbb{M}'$ — еще одно риманово многообразие с расстоянием d', то получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс символом $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{M}')$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [14–16]).

Определение 4 [15, 16]. Измеримое отображение φ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_s(\mathbb{M},\mathbb{M}')$ $(\mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathbb{M}'))$, если выполняются три условия:

1) функция $\mathbb{M}\ni x\to[\varphi]_z(x)=d'(\varphi(x),z)$ принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z\in\mathbb{M}'$;

2) для любой координатной карты $\eta:U\to\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{M}$ отображение $\varphi:\mathbb{M}\to\mathbb{M}'$ можно изменить на множестве нулевой ω-меры так, чтобы φ стала *абсолютно непрерывной* на линиях в следующем смысле: функция[4]

$$(\overline{x}_i,x_i)\in\operatorname{Pr}_i(\varphi(U))\times\{x_i\in\mathbb{R}:\overline{x}_i+x_i\mathbf{e}_i\in\eta(U)\}\mapsto g_i(\overline{x}_i,x_i)=\varphi\circ\eta^{-1}(\overline{x}_i+x_i\mathbf{e}_i)\in\mathbb{M}'$$

абсолютно непрерывна относительно переменной x_i для всех i и почти всех $\overline{x}_i\in\operatorname{Pr}_i(\eta(U))$ (здесь $\mathbf{e}_i=(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots,n$, — стандартный базис $\mathbb{R}^n$);

[3] $\operatorname{spt}u=\overline{\{y\in\mathbb{Y}\mid u(y)\neq0\}}$ — носитель функции $u:\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$.

[4] Здесь $\operatorname{Pr}_i(A)$ — проекция множества $A\subset\mathbb{R}^n$ на $(n-1)$-мерную плоскость $\Pi_i=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_i=0\}$, ортогональную $\mathbf{e}_i$, т. е. $\operatorname{Pr}_i(x)=(x-x_i\mathbf{e}_i)$ для точки $x\in\mathbb{R}^n$. Если $\operatorname{Pr}_i(x)=\overline{x}_i$, то точку $x\in\mathbb{R}^n$ можно записывать в виде $x=(\overline{x}_i,x_i)$. Тогда $x=\overline{x}_i+x_i\mathbf{e}_i$.

3) производная

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{dg_i}{dx_i}(\overline{x}_i, x_i) = \lim_{t\to+0} \frac{g_i(\overline{x}, x_i + t)}{t},$$

существующая п. вс. в U, принадлежит $L_s(U)$ ($L_{s,\mathrm{loc}}(U)$) для всех i.

Предложение 1 [15, предложение 3.1]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\varphi \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$;

2) $\varphi \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$;

3) $\varphi \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ *и существует функция* $g \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ *такая, что для любой липшицевой функции* $f : \mathbb{M}' \to \mathbb{R}$ *функция* $h = f \circ \varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *принадлежит* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ *и* $|\nabla h(x)| \le g(x) \operatorname{Lip}(f)$ *п. в. в* $\mathbb{M}$;

4) *для любого изометрического вложения* $i : \mathbb{M}' \to \mathbb{R}^m$, $m \ge n^2 + 10n + 3$ [17, с. 319], *все координатные функции композиции* $i \circ f$ *принадлежат* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$.

В следующем предложении формулируется свойство локальной липшицевости соболевского отображения.

Предложение 2. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$. *Тогда существует представление* $\mathbb{M} = E_\varphi \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ *в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств таких, что* $\omega(E_\varphi) = 0$, A_i *измеримо для всех* i, *а ограничение* $\varphi|_{A_i}$ *липшицево.*

Доказательство. Применение сформулированных выше свойств отображений классов Соболева позволяет свести доказательство этого предложения к известной аппроксимационной теореме Уитни (см., например, [18–20]).

Предложение 1 позволяет по-другому определить дифференциал. Матрица, столбцы которой — это векторы $\frac{d}{dt} g_i(x + t\mathbf{e}_i)\big|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$, $i = 1, \dots, n$, определяет линейный оператор $D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ для почти всех x и называется (*формальным*) *дифференциалом* отображения φ в точке x. Пусть $|D\varphi|(x)$ — норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{M}'$ определитель матрицы $D\varphi(x)$ называется *якобианом* отображения φ в точке x.

В качестве следствия предложения 2 получаем следующий вариант формулы замены переменной в интеграле Лебега. Напомним, что символ χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{M}$. Ниже $d\nu$ — стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathbb{M}'$. Символом $\omega(E)$ ($\nu(F)$) обозначаем далее меру $\omega(E) = \int\limits_E \chi_E \, d\omega$ $\big(\nu(F) = \int\limits_F \chi_F \, d\nu\big)$ измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$ ($F \subset \mathbb{M}'$)

Предложение 3 [18, 20]. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ — *римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть еще* $U \subset \mathbb{M}$ — *открытое множество, а* $\varphi : U \to \mathbb{M}'$ — *любое* ACL-*отображение.*

Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ *нулевой* ω-*меры такое, что отображение* $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathbb{M}$ *удовлетворяет* $\mathscr{N}$-*условию Лузина.*

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *функции* $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ *и* $\mathbb{M} \ni y \mapsto \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ *измеримы;*

2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x)|\det D\varphi(x)|\,d\omega(x) = \int\limits_{\mathbb{M}} \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} u(x)\,d\nu(y); \tag{6}$$

3) *если дополнительно функция* $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ *интегрируема, то подынтегральная функция в правой части равенства* (6) *также интегрируема и верна формула* (6).

1.3. Квазиаддитивная функция множества. Функция множества $\Phi : \mathscr{O}(\Omega) \to [0;+\infty]$, заданная на системе $\mathscr{O}(\Omega)$ всех открытых подмножеств области $\Omega \subset \mathbb{M}$ называется *квазиаддитивной*, если

1) для всякой точки $x \in \Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что $\Phi(B(x,r)) < \infty$ при $r < \delta$;

2) для всякого конечного дизъюнктного набора $U_1,\dots,U_k \in \mathscr{O}(\Omega)$ такого, что $U_1 \cup \ldots \cup U_k \subset U \in \mathscr{O}(\Omega)$, выполняется

$$\sum_{j=1}^k \Phi(U_j) \le \Phi(U).$$

Предложение 4 [21, следствие 5]. *Пусть* $\Phi : \mathscr{O}(\Omega) \to [0;+\infty]$ — *квазиаддитивная функция, где* Ω — *область на римановом пространстве* $\mathbb{M}$. *Тогда*

(a) *для п. вс.* $x \in \Omega$ *существует конечная производная*

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta\to 0,\, B_\delta \ni x} \frac{|\Phi(B_\delta)|}{\omega(B_\delta)},$$

где B_δ — *произвольный шар в метрике* d *радиуса* δ, *содержащий точку* x;

(b) Φ' — *измеримая функция;*

(c) *для любого* $U \in \mathscr{O}(\Omega)$ *выполняется*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\,d\omega(x) \le \Phi(U).$$

Пример 1. Пусть $\varphi : \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм областей $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\Omega' \subset \mathbb{M}'$ в римановых пространствах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ одинаковых размерностей. Функция открытого множества

$$\mathscr{O}(\Omega) \ni U \mapsto \nu(\varphi(U))$$

(квази)аддитивная. По предложению 4 для п. вс. $x \in \Omega$ существует предел

$$J(x,\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(\varphi(U))|}{\omega(B(x,r))}, \tag{7}$$

называемый *объемной производной* φ. Если гомеоморфизм φ принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, то объемная производная совпадает с модулем якобиана: $J(\cdot,\varphi) = |\det D\varphi|$ п. вс. [4, лемма 2.1].

Пример 2. В условиях теоремы 2 для $1 \le q < p < \infty$ и $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ определим функцию открытого множества $V \subset \Omega'$, полагая

$$\Phi(V) = \left(\sup\left\{\frac{\|u\circ\varphi \mid L^1_q(\Omega)\|}{\|u \mid L^1_p(\Omega')\|}\middle| u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega'),\ \operatorname{spt} u \Subset V,\ \|u \mid L^1_p(\Omega')\| \ne 0\right\}\right)^\sigma. \tag{8}$$

Функция (8) *квазиаддитивная* (см. [4, лемма 3.1]), и $\Phi(\Omega') \le \|\varphi^*\|^\sigma$.

2. Вспомогательные свойства

I. Доказательство следующего известного факта, приводимое ниже, есть прямолинейное обобщение рассуждений для $\mathbb{M}=\mathbb{R}^n$ из [19, § 4.2, теорема 4]. Для функции $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{M}$, обозначим символами χ_+ и χ_- характеристические функции множеств $\{x\mid u(x)>0\}$ и $\{x\mid u(x)<0\}$ соответственно.

Предложение 5. *Пусть $u\in L^1_q(\Omega)$, где Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $1\le q<\infty$, а производная функции $F\in C^1(\mathbb{R})$ ограничена. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$F\circ u\in L^1_q(\Omega)$, причем $\nabla(F\circ u)(x)=F'(u(x))\nabla u(x)$ п. вс.*

2. *Функции $u^+=\max\{u,0\}$, $u^-=-\min\{u,0\}$, $|u|$ принадлежат $L^1_q(\Omega)$, причем*

$$\nabla u^+=\chi_+\nabla u,\quad \nabla u^-=-\chi_-\nabla u,\quad \nabla|u|=\operatorname{sgn}u\cdot\nabla u$$

п. вс. Отсюда следует, что $\nabla u=0$ п. вс. на множестве $\{x\mid u(x)=0\}$ и что $|\nabla u|=|\nabla|u||$ п. вс.

3. *Срезки*

$$u_M(x)=\operatorname{cut}_M u(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}u(x)\cdot M, & |u(x)|\ge M,\\ u(x), & |u(x)|<M,\end{cases}$$

функции и принадлежат $L^1_q(\Omega)$ и $\nabla u_M\to\nabla u$ в $L_q(\Omega)$ при $M\to+\infty$.

Доказательство. Поскольку результат локальный, переходя в компактную координатную окрестность, можно считать, что $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$, функция u принадлежат $L^1_q(\Omega)$ и имеет конечный интеграл Дирихле: $\int\limits_\Omega|\nabla u|^q(x)\,dx<\infty$. В силу предложения 1 (см. также [22, разд. 1.1.3, теорема 1]) функцию u можно переопределить на множестве нулевой меры так, что она станет абсолютно непрерывной на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Отсюда модуль $|u|$ обладает тем же свойством, тогда тем же свойством обладают u^+ и u^-. Отсюда выводим справедливость всех трех утверждений предложения 5.

II. В [14] и [23] установлены эквивалентные описания отображений класса Решетняка $W^1_p(\Omega;\mathbb{Y})$. Необходимые рассуждения без изменений переносятся и на случай класса $L^1_p(\Omega;\mathbb{Y})$.

Известно[5)], что у отображения $\varphi\in\mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{Y})$ п. вс. существуют *метрические частные производные*

$$\mathrm{m}X_j\varphi(x)=\lim_{h\to0}\frac{d(\varphi(\exp(hX_j)(x)),\varphi(x))}{|h|}=\lim_{h\to+0}\frac{\ell_{\varphi,j}(x,h)}{h},$$

где X_j — векторное поле в окрестности точки x, а $\ell_{\varphi,j}(x,h)$ — длина кривой $t\mapsto\varphi(\exp(tX_j)(x))$ на промежутке $[0;h]$.

Предложение 6 [23, § 5; 14, предложение 4.2]. *Пусть $(\mathbb{Y},d)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $1\le p\le\infty$, а $\varphi:\Omega\to\mathbb{Y}$ — отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\varphi\in L^1_p(\Omega;\mathbb{Y})$;

2) $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{Y})\cap\mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{Y})$ *и* $\mathrm{m}X_j\varphi\in L_p(\Omega)$, $j=1,\dots,n$.

---

5) См., например, [11, теорема 2.7.6], где это доказано для липшицевых кривых. В случае абсолютно непрерывных кривых и ACL-отображений рассуждения требуют лишь незначительных модификаций.

Если $X_1, \dots, X_n$ — ортонормированный базис на окрестности $U \subset \Omega$, то $\mathrm{m}X_j\varphi \le |\nabla_0\varphi| \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{m}X_i\varphi)^2\right)^{1/2}$ *п. вс.*

Если дополнительно $(\mathbb{Y}, \rho) = (\mathbb{M}', d')$ — риманово пространство с римановой метрикой d', то каждое из условий 1 и 2 эквивалентно следующему:

3) $\varphi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}') \cap \mathrm{ACL}(\Omega; \mathbb{M}')$ *и* $|D\varphi| \in L_p(\Omega)$.

При этом $\mathrm{m}X_j\varphi = |X_j\varphi|$ *п. вс.,* $j = 1, \dots, n$.

III. В заключение данного раздела покажем избыточность предположения об ограниченности оператора композиции.

Определение 5. Вещественное или комплексное линейное пространство X называется *F-пространством*, если на нем задана метрика ρ такая, что

1) $\rho(x_1 + x_3, x_2 + x_3) = \rho(x_1, x_2)$ для всех x_1, x_2, $x_3 \in X$;

2) (X, ρ) — полное метрическое пространство;

3) операции сложения и умножения на скаляр непрерывны в метрике ρ, т. е. если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ сходится к (конечному) числу α, а последовательности векторов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся по метрике ρ к $x \in X$ и $y \in X$ соответственно, то

$$\rho(\alpha_n x_n, \alpha x) \to 0, \quad \rho(x_n + y_n, x + y) \to 0.$$

Предложение 7 [6]. *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $1 \le q \le \infty$. Пусть отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ таково, что $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$ для любой $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$.*

Тогда оператор композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L_q^1(\Omega)$$

ограниченный.

Приведенное в [6] доказательство этого предложения для групп Карно успешно работает также и на римановых многообразиях.

3. Функциональное описание гомеоморфизмов класса Решетняка

Пусть, как и прежде, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Если отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит $L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$, $1 \le q \le \infty$, то оно индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L_q^1(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi. \tag{9}$$

Действительно, поскольку $|\nabla(u \circ \varphi)| \le |\nabla_0\varphi| \,\mathrm{Lip}(u) \in L_q(\Omega)$ п. вс., то

$$\left\| u \circ \varphi \mid L_q^1(\Omega) \right\| \le \| \, |\nabla_0\varphi| \mid L_q(\Omega) \| \cdot \mathrm{Lip}(u).$$

Отсюда $\|\varphi^*\| \le \| \, |\nabla_0\varphi| \mid L_q(\Omega)\|$ (здесь $\nabla_0\varphi$ — верхний градиент, см. определение перед леммой 1).

Предположим, что выполнено обратное: пусть какое-либо отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции (9), $1 \le q < \infty$. Верно ли, что φ является отображением класса $L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$? В этой работе получен положительный ответ на этот вопрос в случае, когда φ — гомеоморфизм.

Для открытого множества $V \subset \mathbb{Y}$ положим

$$\Psi(V) = \sup\Big\{ \int\limits_{\Omega} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \;\Big|\; u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}), \mathrm{Lip}(u) \leq 1,\, \mathrm{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0 \Big\}. \tag{10}$$

Замечание 2. Мы полагаем $\mathrm{dist}(A, \varnothing) = +\infty$. Поэтому при $V = \mathbb{Y}$ супремум в определении Ψ берется по всем 1-липшицевым функциям u. Значит, $\Psi(\mathbb{Y}) = \|\varphi^*\|^q$. Подчеркнем еще равенство $\Psi(\varnothing) = 0$ и монотонность Ψ по включению.

Теорема 2. *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, а гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Тогда $\varphi \in L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$. Более того,

$$\int\limits_U |\nabla_0 \varphi|(x)^q \, dx = \Psi(\varphi(U))$$

для каждого открытого множества $U \subset \Omega$. В частности[6]*,*

$$|\nabla_0 \varphi|^q = (\Psi \circ \varphi)' \quad \text{п. вс.} \quad \text{и} \quad \| \, |\nabla_0 \varphi| \mid L_q(\Omega) \| = \|\varphi^*\|.$$

По определению Ψ (см. (10)) для всех $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$, $\mathrm{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \leq \Psi(V) \, \mathrm{Lip}(u)^q. \tag{11}$$

Покажем, что в оценке (11) можно избавиться от условия на носитель функции u.

Лемма 2 (С. В. Павлов [6, лемма 4.2]). *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $1 \leq q < \infty$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ — отображение, $V \subset \mathbb{Y}$ — открытое множество, $A \geq 0$ — число.*

Предположим, что для всякой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ такой, что $\mathrm{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, выполняется $u \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \leq A. \tag{12}$$

Тогда (12) выполняется для каждой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ такой, что $u \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$.

С. В. Павлов сформулировал и доказал эту лемму для отображений, заданных на областях групп Карно (см. [6, лемма 4.2]). Однако «метрическая природа» этой леммы позволяет расширить ее применения на широкий класс метрических структур.

[6] Здесь $(\Psi \circ \varphi)'$ — производная квазиаддитивной функции $U \mapsto \Psi(\varphi(U))$ (см. лемму 3 и предложение 4).

Доказательство леммы 2. Здесь приведем только первый шаг доказательства этой леммы, на который далее будет ссылка в доказательстве леммы 3.

Шаг 1. Рассмотрим произвольную 1-липшицеву функцию $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ такую, что $u \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$. Предположим сначала, что u ограничена на V. Обозначим $M = \sup\limits_{y \in V} |u(y)| < \infty$. С помощью симметризации относительно линии уровня построим 1-липшицеву функцию $\overline{u}$ со следующими свойствами: $\overline{u} \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$, $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\overline{u} \circ \varphi)|$ п. вс. и $|\overline{u}| \leq \frac{M}{2}$ на V. Для этого рассмотрим непрерывную кусочно-линейную функцию вещественного аргумента $t \in [-M; M]$:

$$\operatorname{sym}_M(t) = \left| M - \left| t - \frac{M}{2} \right| \right| - \frac{M}{2}, \quad |t| \leq M.$$

Поскольку симметризующая функция представима в виде композиций модулей и сдвигов, то в силу п. 2 предложения 5 функция $\overline{u} = \operatorname{sym}_M \circ u$ удовлетворяет равенству $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\overline{u} \circ \varphi)|$ п. вс., так как $\overline{u} \circ \varphi = \operatorname{sym}_M \circ (u \circ \varphi)$, где $u \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$.

Итерируя этот процесс достаточное количество раз, приходим к 1-липшицевой на $\mathbb{Y}$ функции $\overline{u}$ такой, что $\overline{u} \circ \varphi \in L^1_q(\Omega)$, $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\overline{u} \circ \varphi)|$ п. вс. и $|\overline{u}| \leq \delta$ на V, где δ — произвольное наперед заданное положительное число. Получаемую таким образом функцию $\overline{u}$ будем называть Lip-*измельчением* (*липшицевым измельчением*) u.

Оставшиеся шаги 2 и 3 доказательства — почти дословное повторение аргументов работы [6, лемма 4.2].

Лемма 3. *Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство. Если отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : \operatorname{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi, \quad 1 \leq q < \infty,$$

то неравенство (11) *выполнено для всех $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$, а функция Ψ квазиаддитивная.*

Доказательство. Первая часть заключения непосредственно следует из неравенства (11), справедливого для всех $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$, $\operatorname{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, и леммы 2, в которой следует положить $A = \Psi(V)$.

Докажем квазиаддитивность Ψ, модифицируя аргументы в [4, лемма 3.1] и [6, теорема 4.1]. Пусть V_1 и V_2 — непустые непересекающиеся открытые множества в $\mathbb{Y}$. Рассмотрим 1-липшицевы функции u_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx \geq \Psi(V_i) - \varepsilon, \quad \operatorname{dist}(\operatorname{spt} u_i, \mathbb{Y} \setminus V_i) > 0.$$

Для достаточно большого $M > 0$ имеем (см. предложение 5)

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\widetilde{u}_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx \geq \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx - \varepsilon,$$

где $\widetilde{u}_i = \operatorname{cut}_M u_i$. Расстояние $r = \operatorname{dist}(\operatorname{spt} u_1, \operatorname{spt} u_2)$ положительное. Рассмотрим Lip-измельчения $\overline{u}_i$ функций $\widetilde{u}_i$ такие, что $|\overline{u}_i| \leq r/2$ на $\mathbb{Y}$ (см. шаг 1 доказательства леммы 2). Функция $u = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$ равна $\overline{u}_i$ на $\operatorname{spt} u_i$, $i = 1, 2$, и нулю в остальных точках, поэтому является 1-липшицевой в силу выбора уровня Lip-измельчения: если $y_i \in \operatorname{spt} u_i$, $i = 1, 2$, то

$$|u(y_1) - u(y_2)| = |\overline{u}_1(y_1) - \overline{u}_2(y_2)| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \operatorname{dist}(\operatorname{spt} u_1, \operatorname{spt} u_2) \le d(y_1, y_2)$$

(при остальных расположениях пары точек y_i такая же оценка приращений функции u очевидна). Требуемое теперь выводим из неравенств[7)]

$$\sum_{i=1}^{2} \Psi(V_i) - 4\varepsilon \le \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx - 2\varepsilon$$

$$\le \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\widetilde{u}_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\overline{u}_i \circ \varphi)(x)|^q \, dx$$

$$= \int\limits_{\varphi^{-1}(V_1 \cup V_2)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \le \Psi(V_1 \cup V_2).$$

Доказательство теоремы 2. Функция открытого множества $\Psi \circ \varphi : U \mapsto \Psi(\varphi(U))$ квазиаддитивная, поскольку Ψ является квазиаддитивной по лемме 3, а φ — гомеоморфизм. По лемме 2 неравенство (11) выполняется для всех $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$. Поэтому, полагая $V = \varphi(B(z, r))$, где $B(z, r) \Subset \Omega$ — шар, и деля (11) на $|B(z, r)|$, получаем неравенство

$$\frac{1}{|B(z, r)|} \int\limits_{B(z,r)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \le \frac{\Psi(\varphi(B(z, r)))}{|B(z, r)|} \operatorname{Lip}(u)^q$$

для всех $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$. Переходя к пределу при $r \to 0$, по теореме Лебега о дифференцировании интеграла и по предложению 4 выводим, что

$$|\nabla(u \circ \varphi)| \le ((\Psi \circ \varphi)')^{1/q} \operatorname{Lip}(u) \quad \text{п. вс.},$$

где мажоранта в правой части принадлежит $L_q(\Omega)$ (предложение 4). Отсюда $\varphi \in L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$ и $|\nabla_0 \varphi|^q \le (\Psi \circ \varphi)'$ п. вс. По предложению 4 имеем

$$\int\limits_U |\nabla_0 \varphi|(x)^q \, dx \le \int\limits_U (\Psi \circ \varphi)'(x) \, dx \le \Psi(\varphi(U)).$$

Для проверки обратного неравенства рассмотрим функцию $u \in \operatorname{Lip}(\mathbb{Y})$ со свойствами: $\operatorname{Lip}(u) \le 1$ и $\operatorname{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus \varphi(U)) > 0$. Тогда $\nabla(u \circ \varphi) = 0$ п. вс. вне U (см. п. 2 предложения 5) и поэтому

$$\int\limits_\Omega |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx = \int\limits_U |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q \, dx \le \int\limits_U |\nabla_0 \varphi|(x)^q \, dx.$$

В силу произвольности $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Lip}(u) \le 1$, $\operatorname{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{Y} \setminus \varphi(U)) > 0$, отсюда вытекает

$$\Psi(\varphi(U)) \le \int\limits_U |\nabla_0 \varphi|(x)^q \, dx.$$

Отметим крайнюю простоту случая $q = \infty$.

[7)] Отметим, что в силу п. 2 предложения 5 градиент $\nabla(u \circ \varphi)$ почти всюду совпадает с $\nabla(\overline{u}_i \circ \varphi)$ на $\varphi^{-1}(\operatorname{spt} \overline{u}_i)$, $i = 1$, 2, и равен нулю в почти всех остальных точках области Ω.

Предложение 8. *Пусть отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ области Ω в римановом пространстве $\mathbb{M}$ в метрическое пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_\infty(\Omega).$$

Тогда $\varphi \in L^1_\infty(\Omega; \mathbb{Y})$ *и* $\| \, |\nabla_0 \varphi| \mid L_\infty(\Omega)\| = \|\varphi^*\|$.

Доказательство. По условию для всех $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ имеем

$$|\nabla(u \circ \varphi)(x)| \leq \big\| u \circ \varphi \mid L^1_\infty(\Omega)\big\| \leq \mathrm{Lip}(u) \cdot \|\varphi^*\|$$

для п. вс. $x \in \Omega$. Это и означает, что $\varphi \in L^1_\infty(\Omega; \mathbb{Y})$ и $\| \, |\nabla_0 \varphi| \mid L_\infty(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\|$. Обратное неравенство устанавливается аналогично тому, как это сделано в случае $q < \infty$ в доказательстве теоремы 2.

4. Применения к теории операторов композиции однородных пространств Соболева

Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Отображение φ из класса $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathbb{M}')$ называется отображением *с конечным искажением*, если $D\varphi = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$. *Внешняя функция искажения* $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, определяется по правилу

$$K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ — римановы пространства одинаковой размерности, Ω — область в $\mathbb{M}$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{M}'$ — гомеоморфизм. Оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega) \tag{14}$$

ограничен при фиксированных $1 \leq q \leq p < \infty$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}')$;

2) φ *обладает конечным искажением*: $D\varphi(x) = 0$ *п. вс. на множестве* $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ *нулей якобиана;*

3) *внешняя функция искажения* (13) *принадлежит* $L_\sigma(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$): $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$;

4) $\|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|$.

Пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ состоит из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике риманова пространства $\mathbb{M}'$ на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Теорема 3 устанавливает тесную связь отображений с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

Доказательство теоремы 3. Пусть оператор (14) ограничен. Будем считать, что $q < p$, так как при $q = p$ доказательство лишь упрощается. В условиях теоремы 3 функция (10) открытого множества $\Omega' \supset V \mapsto \Phi(V)$ квазиаддитивная и $\Phi(\Omega') \leq \|\varphi^*\|^\sigma$ (см. [4, лемма 3.1]). Здесь $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Для 1-липшицевой функции u с компактным носителем в[8] $V \Subset \Omega'$ имеем

$$\big\| u \mid L^1_p(\Omega')\big\| \leq |V|^{1/p}.$$

[8] Для таких открытых множеств компактное включение $\operatorname{spt} u \Subset V$ равносильно тому, что $\operatorname{dist}(\operatorname{spt} u, \mathbb{G} \setminus V) > 0$.

Отсюда и по определению Φ для 1-липшицевой функции $u:\mathbb{M}'\to\mathbb{R}$, $\operatorname{spt} u\Subset V$, выполняются неравенства

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(V)}|\nabla(u\circ\varphi)(x)|^q\,dx\Bigg)^{1/q}\le\Phi(V)^{1/\sigma}\big\|u\mid L^1_p(\Omega')\big\|\le\Phi(V)^{1/\sigma}|V|^{1/p}.\tag{15}$$

По лемме 2 неравенство (15) верно для всех[9] 1-липшицевых функций $u:\mathbb{M}'\to\mathbb{R}$. Фиксируем 1-липшицеву функцию $u:\mathbb{M}'\to\mathbb{R}$. Подставим в (15) образ $V=\varphi(B(z,r))$ субриманова шара $B(z,r)\Subset\Omega$ и поделим обе части (15) на $|B(z,r)|^{1/q}$:

$$\Bigg(\frac{1}{|B(z,r)|}\int\limits_{B(z,r)}|\nabla(u\circ\varphi)(x)|^q\,dx\Bigg)^{1/q}\le\bigg(\frac{\Phi(\varphi(B(z,r)))}{|B(z,r)|}\bigg)^{1/\sigma}\bigg(\frac{|\varphi(B(z,r))|}{|B(z,r)|}\bigg)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $r\to0$, по теореме Лебега о дифференцировании интеграла и по предложению 4 получаем, что для любой 1-липшицевой функции $u:\mathbb{M}'\to\mathbb{R}$

$$|\nabla(u\circ\varphi)|\le((\Phi\circ\varphi)')^{1/\sigma}J(\cdot,\varphi)^{1/p}\quad\text{п. вс. в }\Omega,$$

где $\Phi\circ\varphi:U\mapsto\Phi(\varphi(U))$ — квазиаддитивная функция, $(\Phi\circ\varphi)'$ — ее производная, а $J(\cdot,\varphi)$ — объемная производная гомеоморфизма φ (см. (7)). Правая часть последнего неравенства принадлежит $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Действительно, поскольку $q/p+q/\sigma=1$, для $U\Subset\Omega$ выводим (см. п. (c) предложения 4)

$$\int\limits_U((\Phi\circ\varphi)'(x))^{q/\sigma}J(x,\varphi)^{q/p}\,dx\le\Bigg(\int\limits_U((\Phi\circ\varphi)'(x))\,dx\Bigg)^{q/\sigma}\Bigg(\int\limits_U J(x,\varphi)\,dx\Bigg)^{q/p}$$
$$\le(\Phi(\varphi(U)))^{q/\sigma}|\varphi(U)|^{q/p}<\infty.$$

Следовательно, $\varphi\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{M}')$ (см. предложение 1) и

$$|\nabla_0\varphi|\le((\Phi\circ\varphi)')^{1/\sigma}J(\cdot,\varphi)^{1/p}\quad\text{п. вс.}\tag{16}$$

Поскольку $J(\cdot,\varphi)=|\det D\varphi|$ п. вс. (см. п. 1.3) и[10]

$$|D\varphi|\le\Bigg(\sum_{j=1}^n|X_j\varphi|^2\Bigg)^{1/2}\le n^{1/2}|\nabla_0\varphi|\quad\text{п. вс.},$$

то φ обладает конечным искажением. Для отображений с конечным искажением $|\nabla_0\varphi|=|D\varphi|$ п. вс. [7, свойство 1, следствие 2]. Таким образом, можно записать (16) в виде

$$|D\varphi|\le((\Phi\circ\varphi)')^{1/\sigma}|\det D\varphi|^{1/p}.$$

Отсюда $K_p(\cdot,\varphi)^\sigma\le(\Phi\circ\varphi)'\in L_1(\Omega)$. По предложению 4 для любого открытого множества $U\subset\Omega$ имеем

$$\int\limits_U K(x,\varphi)^\sigma(x)\,dx\le\int\limits_U(\Phi\circ\varphi)'(x)\,dx\le\Phi(\varphi(U))\le\|\varphi^*\|^\sigma<\infty.$$

Обратные неравенства $\int\limits_U K_p(x,\varphi)^\sigma\,dx\ge\Phi(\varphi(U))$, а также неравенство $\|K_p(\cdot,\varphi)\mid L_\sigma(\Omega)\|\ge\|\varphi^*\|$, доказаны в [7, теоремы 2 и 3].

[9] Если подобласть $W\Subset\Omega$ содержит $\varphi^{-1}(V)$, то $u\circ\varphi\in L^1_q(W)$. Поэтому лемма 2 применима для любой 1-липшицевой функции $u:\mathbb{M}'\to\mathbb{R}$ с заменой Ω на W. Отметим, что в (15) область W не влияет на значение интеграла, поскольку существенная область интегрирования — открытое множество $\varphi^{-1}(V)\subset W$.

[10] Первое неравенство здесь можно получить из ортонормированности векторов X_j, а второе — из оценок $|X_j\varphi|\le|\nabla_0\varphi|$ (предложение 6).

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 при $q < p$ для всех открытых множеств $U \subset \Omega$ выполняется*

$$\int\limits_U K_p(x,\varphi)^\sigma \, dx = \Phi(\varphi(U)).$$

В частности, $K_p(x,\varphi)^\sigma = (\Phi \circ \varphi)'(x)$ для п. вс. $x \in \Omega$. Кроме того, для всех $1 \le q \le p < \infty$ справедливо равенство

$$\|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.
2. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
3. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 58–109.
4. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.
5. *Водопьянов С. К.* О совпадении функций множества в квазиконформном анализе // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 9. С. 3–33.
6. *Pavlov S. V., Vodop'yanov S. K.* Reshetnyak-class mappings and composition operators // Anal. Math. Physic. 2025. V. 15.
7. *Водопьянов С. К.* Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1128–1154.
8. *Cheeger J., Gromov M., Taylor M.* Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1982. V. 17, N 1. P. 15–53.
9. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
10. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
11. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
12. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
13. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional analysis. Oxford, etc.: Pergamon Press, 1982.
14. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
15. *Troyanov M., Vodop′yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co-)distortion // Ann. l′Inst. Fourier. 1998. V. 52, N 6. P. 1753–1784.
16. *Vodop′yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–302.
17. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
18. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1960.
19. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton; London; New York; Washington, D.C.: CRC Press, 1992.
20. *Hajłasz P.* Change of variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
21. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.
22. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

23. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.

Поступила в редакцию 4 апреля 2025 г.
После доработки 24 мая 2025 г.
Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru