Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 512.548+515.162.8

СОГЛАСОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ОБОБЩЕННЫХ КВАНДЛОВ АЛЕКСАНДЕРА. ТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ И МЕДИАЛЬНОСТИ

А. Н. Бородин,
М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Аннотация. Рассматривается вопрос: когда на группе существуют две структуры обобщенных квандлов Александера, согласованные между собой тождеством правой дистрибутивности или обобщенным тождеством медиальности?

DOI 10.33048/smzh.2025.66.403

Ключевые слова: квандл, обобщенный квандл Александера, правая дистрибутивность, обобщенное тождество медиальности, согласованные тождества, группа, автоморфизм.

Введение

Квандл — это непустое множество с бинарной операцией, удовлетворяющей трем алгебраическим аксиомам [1, 2], которые формализуют три преобразования Райдемайстера [3] плоских диаграмм узлов в трехмерном пространстве. Если рассматривать только второе и третье преобразования Райдемайстера, то получим алгебраическую структуру, которая называется *рэком.*

Исторически понятие *квандла* или *самодистрибутивного группоида* связывают с именами С. В. Матвеева и Джойса. В 1982 г. С. В. Матвеев [4] ввел алгебраическую систему, которую назвал *дистрибутивным группоидом.* Он доказал, что с каждым классическим узлом можно естественным образом связать *праводистрибутивную правую квазигруппу*, которая является его алгебраическим инвариантом и определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения. Таким образом, был получен универсальный алгебраический инвариант классических узлов. В том же году к этому результату независимо пришел Джойс, давший найденной структуре название «*квандл*».

Исследуя вопросы дифференцируемости решений функциональных уравнений, Рылль-Нардзевский в 1949 г. ввел *симметричное среднее* [4] и получил дистрибутивную квазигруппу. Позже, в 1953 г. Госсу рассмотрел [5] несимметричные средние, далее [6, 7] он не только выделил аксиоматически данный объект, но и построил его представление над произвольной группой.

Идея согласования алгебраических операций лежит в основе определения колец и почти колец, когда две операции, групповая и полугрупповая, связаны законом дистрибутивности. Так, в косом брейсе [8–11] две групповые операции

Работа М. В. Нещадима выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

связаны законом обобщенной дистрибутивности. Косой брэйс является относительно новой алгебраической системой, хотя в неявном виде такая конструкция появлялась в лекциях Куроша [12, § 10]. Напомним определение косого брэйса.

Определение 1. *Косой брэйс* — это множество G, на котором заданы две бинарные операции «$\circ$» и «$\cdot$» такие, что $\langle G, \circ\rangle$, $\langle G, \cdot\rangle$ группы и операции согласованы следующей аксиомой

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c), \quad a, b, c \in G, \tag{1}$$

где a^{-1} — элемент обратный к элементу a в группе $\langle G, \cdot\rangle$.

Заметим, что если в (1) заменить умножение «$\circ$» на «$\cdot$», то получим тождественное выражение

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot a^{-1} \cdot (a \cdot c), \quad a, b, c \in G,$$

справедливое в группе $\langle G, \cdot\rangle$.

Одно из направлений исследования алгебраических структур, близких к квазигруппам, является изучение обобщенных тождеств на системах квазигрупп [13]. Большой список всевозможных тождеств, которые встречаются в различных областях математики, приведен в работе [14]. Там перечислено более чем 50 тождеств и указано, где они встречаются. Вопросы теории конечных проективных плоскостей, теории функциональных уравнений и других разделов математики приводят к необходимости изучения множеств, снабженных не одной операцией, а системой операций Ω. Иными словами, необходимо изучать универсальные алгебры, для которых операции из системы Ω связаны некоторыми тождественными соотношениями. Эти тождественные соотношения в случае бинарных операций могут быть трех типов. Первый тип — это тождество в обычном понимании (см., например, [15]). Второй тип тождеств — сверхтождество — обладает той особенностью, что не только свободные элементы, участвующие в тождестве, могут принимать любые значения из множества Ω, на котором определена система операций, но и операции, участвующие в тождестве, также могут принимать любые значения из Ω. И третий тип — промежуточный: часть операций данного тождества могут принимать любые значения из Ω, а остальная часть операций принимает уже некоторые значения из Ω, зависящие от предыдущих. Тождество последнего типа называется *обобщенным тождеством* (см., например, [13]).

1. $A[B(x, y), z] = C[x, D(y, z)]$ — общее тождество ассоциативности (или общая ассоциативность).
2. $A[B(x, y), C(u, v)] = A_1[B_1(x, u), C_1(y, v)]$ — общая медиальность.
3. $A[B(y, x), C(z, x)] = D(y, z)$ — общая транзитивность.
4. $A[x, B(y, z)] = H[K(x, y), P(x, z)]$ — общая дистрибутивность,
5. $A[x, B(x, y)] = y$ — общий закон ключей (левый).
6. $A(x, y) = B(y, x)$ — общая коммутативность.

Здесь A, B, C, A_1, B_1, C_1, H, K, P — квазигрупповые операции из некоторого семейства операций Ω, а x, y, z, u, v — элементы рассматриваемой алгебраической системы.

Одно из возможных направлений применения исследований обобщенных тождеств — построение новых алгебраических систем. Так, известно, что по каждому квандлу можно построить решение теоретико-множественного уравнения Янга — Бакстера, а по этому решению можно построить представление группы (виртуальных) кос или инвариант для (виртуальных) узлов и зацеплений (см., например, [16–18]). Поэтому новые примеры конструкций квандлов могут привести к новым решениям уравнения Янга — Бакстера и новым инвариантам узлов и зацеплений. В [19] рассматривается задача определения операции произведения на семействе квандловых структур, заданных на некотором множестве. В частности, найдены необходимые условия, когда операция произведения двух квандловых структур является квандловой структурой. Для применимости этой конструкции необходимо, чтобы эти квандловые операции согласовывались между собой тождеством дистрибутивности.

В настоящей работе исследуются обобщенные тождества правой дистрибутивности и медиальности для двух обобщенных квандлов Александера, построенных на группе.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приведены основные определения, связанные с квандлами как алгебраическими объектами. В разд. 2 приведены и доказаны основные теоремы, отвечающие на вопрос задачи, когда две структуры обобщенных квандлов Александера, построенных на группе $\langle G, \cdot\rangle$, согласованы обобщенным тождеством правой дистрибутивности (теорема 1)

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G,$$

или обобщенным тождеством медиальности (теорема 2)

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z, t \in G.$$

Отметим, что из согласованности квандловых операций при помощи тождества медиальности следует их согласованность относительно тождества дистрибутивности. Но обратное неверно (следствие 1).

Далее в статье везде под дистрибутивностью понимается правая дистрибутивность.

1. Квандлы и групповые автоморфизмы

Определение 2. *Квандлом* называют алгебраическую систему $\langle Q, \circ\rangle$ с одной бинарной операцией умножения «$\circ$», которая удовлетворяет следующим аксиомам:

(Q1) аксиома идемпотентности: $x \circ x = x$ для всех $x \in Q$;

(Q2) аксиома правой обратимости: для любых $y, z \in Q$ существует единственный $x \in Q$ такой, что $x \circ y = z$;

(Q3) аксиома правой самодистрибутивности: для любых $x, y, z \in Q$ выполняется $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

В силу аксиом (Q2) и (Q3) умножение на элемент $z \in Q$ в квандле $\langle Q, \circ\rangle$ является автоморфизмом. Группа, порожденная такими автоморфизмами, называется *группой внутренних автоморфизмов квандла* $\langle Q, \circ\rangle$.

В силу аксиомы (Q2) на квандле $\langle Q, \circ\rangle$ можно ввести операцию деления справа $(x, y) \mapsto x/y$ такую, что $(x \circ y)/y = x$ и $(x/y) \circ y = x$ для любых $x, y \in Q$. Нетрудно показать [19], что алгебраическая система $\langle Q, /\rangle$ также является квандлом и выполнены следующие тождества, связывающие операции умножения «$\circ$» и деления «$/$»:

$$(x \circ y)/z = (x/z) \circ (y/z), \quad (x/y)/z = (x/(z \circ y))/y,$$

$$x/(y/z) = ((x \circ z)/y)/z, \quad x/(y \circ z) = ((x/z)/y) \circ z,$$

для любых $x, y, z \in Q$.

Определение 3. Квандл $\langle Q; \circ, / \rangle$ называют *абелевым*, если для произвольных $x, y, z, t \in Q$ справедливо тождество медиальности

$$(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t). \tag{2}$$

Определение 4. Госсу в работах [6, 7] показал, что над группой G при помощи произвольного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ можно построить квандл с операцией

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G.$$

Более того, под *обобщенным квандлом Александера* часто понимают квандл с операцией одного из следующих четырех типов [20]:

$\mathrm{Alex}_1(G, \varphi)$: $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x, y \in G$,
$\mathrm{Alex}_2(G, \varphi)$: $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x, y \in G$,
$\mathrm{Alex}_3(G, \varphi)$: $x \circ y = y\varphi(xy^{-1})$, $x, y \in G$,
$\mathrm{Alex}_4(G, \varphi)$: $x \circ y = y\varphi(y^{-1}x)$, $x, y \in G$.

Замечание 1. Отметим, что первый и четвертый типы, с одной стороны, второй и третий, с другой стороны, определяют изоморфные структуры квандлов. Изоморфные в смысле, что $\mathrm{Alex}_1(G, \varphi) = \mathrm{Alex}_4(G, \varphi^E)$ и $\mathrm{Alex}_2(G, \varphi) = \mathrm{Alex}_3(G, \varphi^E)$, где $E(x) = x^{-1}$, а $\varphi^E(x) = E\varphi E(x)$. Изоморфизм задается биекцией $E : G \to G$.

Если G — группа, то бинарная операция $x \circ y = yx^{-1}y$ для $x, y \in G$ определяет на G структуру сердцевинного квандла [1], обозначаемого $\mathrm{Core}(G)$.

В [19, предложение 3.21] доказано утверждение. *Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа, тогда операции*

$$x * y = y^{-1}xy, \quad x \circ y = yx^{-1}y, \quad x, y \in G,$$

связаны соотношением

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z), \quad x, y, z \in G,$$

если имеет место включение $\{g^2, g \in G\} \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G.

В [19, предложение 3.21] также содержится утверждение, что если $\langle G, \cdot \rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы, то операции

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x * y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

связаны соотношением

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G, \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ, ψ перестановочны, т. е. $\varphi\psi = \psi\varphi$.

2. Обобщенное тождество правой дистрибутивности для обобщенных квандлов Александера

В настоящем разделе исследуется задача, когда на группе $\langle G, \cdot \rangle$ заданы две структуры обобщенных квандлов Александера, согласованные обобщенным тождеством правой дистрибутивности (3). Отметим, что данное соотношение определяет действие квандла $\langle G, * \rangle$ на квандле $\langle G, \circ \rangle$ (более точно, действие группы внутренних автоморфизмов квандла $\langle G, * \rangle$ на квандле $\langle G, \circ \rangle$).

Имея четыре типа обобщенных квандлов Александера, надо исследовать десять случаев, но ввиду симметрии тождества (3) относительно операций «$\circ$» и «$*$» в силу замечания 1 достаточно рассмотреть только 8 вариантов (так как рассмотрение пары Alex_3–Alex_3 сводится к паре Alex_2–Alex_2, а пары Alex_4–Alex_4 к Alex_1–Alex_1). Подмножество центральных автоморфизмов группы G будем обозначать через $\mathrm{Aut}_c(G)$, а центр группы — через $Z(G)$.

Теорема 1. *Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы. Тогда операции $\circ$ и $*$ обобщенных квандлов Александера согласованы тождеством (3) тогда и только тогда, когда в зависимости от явного вида операций $\circ$ и $*$ выполнены условия, приведенные в табл. 1.*

Таблица 1

	$x\circ y=\varphi(xy^{-1})y$	$x\circ y=\varphi(y^{-1}x)y$	$x\circ y=y\varphi(xy^{-1})$
$x*y=\psi(xy^{-1})y$	$\varphi\psi=\psi\varphi$		
$x*y=\psi(y^{-1}x)y$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\varphi\in\mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\psi^{-1}\varphi\in\mathrm{Aut}_c(G)$	
$x*y=y\psi(xy^{-1})$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\varphi\in\mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\varphi\psi\in\mathrm{Aut}_c(G)$	
$x*y=y\psi(y^{-1}x)$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\varphi(p^{-1})p\in Z(G)$, $p=z\psi(z^{-1})$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\psi\in\mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi=\psi\varphi$, $\psi\in\mathrm{Aut}_c(G)$

Доказательство. Будем использовать обозначения

$$L=(x\circ y)*z,\quad R=(x*z)\circ(y*z),\quad x,y,z\in G,$$

и рассматривать равенство

$$L=R. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательно все случаи.

1. Для $x\circ y=\varphi(xy^{-1})y$, $x*y=\psi(xy^{-1})y$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}y\varphi(y^{-1}x))=z\psi(z^{-1}y)\varphi(\psi(y^{-1}x)),$$

что равносильно $\psi\varphi(y^{-1}x)=\varphi\psi(y^{-1}x)$. Так как произведение $y^{-1}x$, $x,y\in G$, пробегает все элементы группы G, тождество (3) выполнено тогда и только тогда, когда $\varphi\psi=\psi\varphi$.

2. Для $x\circ y=\varphi(xy^{-1})y$, $x*y=\psi(y^{-1}x)y$ равенство (4) принимает вид

$$\psi(z^{-1}\varphi(xy^{-1})y)z=\varphi(\psi(z^{-1}xy^{-1}z))\psi(z^{-1}y)z.$$

При $z=1$ и $xy^{-1}=t$ получаем $\psi\varphi(t)=\varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi=\psi\varphi$ и

$$z^{-1}\varphi(xy^{-1})=\varphi(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1}$$

или $\varphi(z)z^{-1}\varphi(xy^{-1})=\varphi(xy^{-1})\varphi(z)z^{-1}$. Так как произведение $y^{-1}x$, $x,y\in G$, пробегает все элементы группы G, то это равносильно тому, что $\varphi(z)z^{-1}$ лежит в центре группы G, т. е. φ — центральный автоморфизм группы G.

Случай 3 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 2.

4. Для $x\circ y=\varphi(xy^{-1})y$, $x*y=y\psi(y^{-1}x)$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}\varphi(xy^{-1})y)=\varphi(z\psi(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1})z\psi(z^{-1}y)$$

или

$$z\psi(z^{-1})\psi\varphi(xy^{-1})=\varphi(z)\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}z)\varphi(z^{-1})z\psi(z^{-1}).$$

При $z=1$ и $xy^{-1}=t$ получаем $\psi\varphi(t)=\varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi=\psi\varphi$ и

$$z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t)=\varphi(z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t)\varphi(\psi(z)z^{-1})z\psi(z^{-1}).$$

Положим $p=z\psi(z^{-1})$, тогда $p\varphi\psi(t)=\varphi(p)\varphi\psi(t)\varphi(p^{-1})p$ или

$$\varphi(p^{-1})p\varphi\psi(t)=\varphi\psi(t)\varphi(p^{-1})p.$$

Так как произведение t — произвольный элемент группы G, это равносильно тому, что $\varphi(p^{-1})p$ лежит в центре группы G. В голоморфе $\operatorname{Hol} G$ группы G это равносильно тому, что $[[z,\psi],\varphi]\in Z(G)$.

5. Для $x\circ y=\varphi(y^{-1}x)y$, $x*y=\psi(y^{-1}x)y$ равенство (4) принимает вид

$$\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x)y)z=\varphi(z^{-1}\psi(y^{-1}x)z)\psi(z^{-1}y)z$$

или $\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x))=\varphi(z^{-1}\psi(y^{-1}x)z)\psi(z^{-1})$. При $z=1$ и $y^{-1}x=t$ получаем $\psi\varphi(t)=\varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi=\psi\varphi$ и

$$\psi(z^{-1})\varphi\psi(t)=\varphi(z^{-1})\varphi\psi(t)\varphi(z)\psi(z^{-1}).$$

Так как t — произвольный элемент группы G, то это равносильно тому, что $\varphi(z)\psi(z^{-1})$ лежит в центре группы G или, равносильно, $\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}$ лежит в центре группы G, т. е. $\psi^{-1}\varphi$ — центральный автоморфизм группы G.

6. Для $x\circ y=\varphi(y^{-1}x)y$, $x*y=y\psi(xy^{-1})$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(\varphi(y^{-1}x)yz^{-1})=\varphi(\psi(zy^{-1}))$$

или $z\psi\varphi(y^{-1}x)=\varphi\psi(zy^{-1}xz^{-1})z$. При $z=1$ и $y^{-1}x=t$ получаем $\psi\varphi(t)=\varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi=\psi\varphi$ и $z\varphi\psi(t)=\varphi\psi(ztz^{-1})z$ или

$$z^{-1}\varphi\psi(z)\varphi\psi(t)=\varphi\psi(t)z^{-1}\varphi\psi(z).$$

Поскольку t — произвольный элемент группы G, это равносильно тому, что $z^{-1}\varphi\psi(z)$ лежит в центре группы G, т. е. $\varphi\psi$ — центральный автоморфизм группы G.

7. Для $x\circ y=\varphi(y^{-1}x)y$, $x*y=y\psi(y^{-1}x)$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x)y)=\varphi\psi(y^{-1}x)z\psi(z^{-1}y)$$

или

$$z\psi(z^{-1})\psi\varphi(y^{-1}x)=\varphi\psi(y^{-1}x)z\psi(z^{-1}).$$

При $z=1$ и $y^{-1}x=t$ получаем $\psi\varphi(t)=\varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi=\psi\varphi$ и

$$z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t)=\varphi\psi(t)z\psi(z^{-1}).$$

Так как t — произвольный элемент группы G, то это равносильно тому, что $z\psi(z^{-1})$ лежит в центре группы G, т. е. ψ — центральный автоморфизм группы G.

Случай 8 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 7.

Теорема доказана.

3. Обобщенное тождество медиальности для обобщенных квандлов Александера

Исследуем задачу, когда на группе $\langle G, \cdot \rangle$ заданы две структуры обобщенных квандлов Александера, согласованные обобщенным тождеством медиальности

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z \in G. \tag{5}$$

Замечание 2. Пусть на множестве K заданы две квандловые структуры $\langle K, \circ \rangle$ и $\langle K, * \rangle$ такие, что справедливо (5), тогда

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z).$$

Действительно, положим $t = z$ и воспользуемся идемпотентностью:

$$(x \circ y) * z = (x \circ y) * (z \circ z) = (x * z) \circ (y * z).$$

Замечание 3. Пусть в группе G выполнено равенство

$$x_1 x_2 \dots x_n = z,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторые элементы группы G и z — центральный элемент группы G. Тогда

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_2 \dots x_{n-1} x_n x_1 = \dots = x_n x_1 x_2 \dots x_{n-1},$$

т. е. слово $x_1 x_2 \dots x_n$ не меняется при циклической перестановке букв. Действительно, при сопряжении слова $x_1 x_2 \dots x_n$ последовательно буквами $x_1, x_2, \dots, x_n$ получаем циклически переставленные слова и, с другой стороны, так как z — центральный элемент группы G, слово $x_1 x_2 \dots x_n$ не меняется.

Будем использовать данное замечание в простейшем случае двух множителей $x_1 x_2 = z$.

Так же, как и в случае правой дистрибутивности, надо рассмотреть только восемь случаев. Подмножество центральных автоморфизмов группы G будем обозначать через $\mathrm{Aut}_c(G)$, а центр группы — через $Z(G)$. Коммутант группы G обозначим через G', ограничение автоморфизма φ на коммутанте — через $\varphi|_{G'}$, коммутатор элементов $x, y \in G$ — через $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$.

Теорема 2. *Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы. Тогда операции $\circ$ и $*$ обобщенных квандлов Александера согласованы тождеством (5) тогда и только тогда, когда в зависимости от явного вида операций $\circ$ и $*$ выполнены условия, приведенные в табл. 2.*

Доказательство. Будем использовать обозначения

$$L = (x \circ y) * (z \circ t), \quad R = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z, t \in G,$$

и рассматривать равенство

$$L = R. \tag{6}$$

Рассмотрим последовательно все случаи. В силу замечания 2 можно использовать результаты теоремы 1.

1. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(xy^{-1})y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(\varphi(xy^{-1})yt^{-1}\varphi(tz^{-1}))\varphi(zt^{-1})t = \varphi(\psi(xz^{-1})zt^{-1}\psi(ty^{-1}))\psi(yt^{-1})t$$

Таблица 2

	$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$	$x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$	$x \circ y = y\varphi(xy^{-1})$
$x * y = \psi(xy^{-1})y$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $[\varphi(x^{-1})x, \psi(y^{-1})y] = 1$		
$x * y = \psi(y^{-1}x)y$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\varphi \in \mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\psi^{-1}\varphi \in \mathrm{Aut}_c(G)$, $\varphi\|_{G'} = \mathrm{id}$, $G' \subseteq Z(G)$	
$x * y = y\psi(xy^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\varphi \in \mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\varphi\psi \in \mathrm{Aut}_c(G)$ $\varphi\|_{G'} = \mathrm{id}$, $G' \subseteq Z(G)$	
$x * y = y\psi(y^{-1}x)$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\varphi(p^{-1})p \in Z(G)$, $p = z\psi(z^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\psi \in \mathrm{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi$, $\psi \in \mathrm{Aut}_c(G)$

или

$$\psi(\varphi(xy^{-1})yt^{-1}\varphi(tz^{-1}))\varphi(zt^{-1}) = \varphi(\psi(xz^{-1})zt^{-1}\psi(ty^{-1}))\psi(yt^{-1}). \tag{7}$$

Введем обозначения $a = xt^{-1}$, $b = yt^{-1}$, $c = zt^{-1}$. Тогда (7) примет вид

$$\psi(\varphi(ab^{-1})b\varphi(c^{-1}))\varphi(c) = \varphi(\psi(ac^{-1})c\psi(b^{-1}))\psi(b).$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$. Следовательно,

$$\psi(\varphi(b^{-1})b\varphi(c^{-1}))\varphi(c) = \varphi(\psi(c^{-1})c\psi(b^{-1}))\psi(b).$$

Положим $b = \varphi(x)$, $c = \psi(y)$, тогда

$$\psi(\varphi^2(x^{-1})\varphi(x)\varphi\psi(y^{-1}))\varphi\psi(y) = \varphi(\psi^2(y^{-1})y\psi\varphi(x^{-1}))\psi\varphi(x).$$

Подействуем на это равенство автоморфизмом $(\varphi\psi)^{-1}$:

$$\varphi(x^{-1})x\psi(y^{-1})y = \psi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x.$$

2. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y)\varphi(zt^{-1})t = \varphi(\psi(z^{-1}x)zt^{-1}\psi(y^{-1}t))\psi(t^{-1}y)t$$

или

$$\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) = \varphi(\psi(z^{-1}x)zt^{-1}\psi(y^{-1}t))\psi(t^{-1}y). \tag{8}$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и φ — центральный автоморфизм. Покажем, что (8) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем

$$\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi\varphi(z^{-1}x)\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) = \varphi\psi(z^{-1}x)\varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y),$$
$$\psi\varphi(z^{-1}x)\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) = \varphi\psi(z^{-1}x)\varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y),$$
$$\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) = \varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y),$$
$$\varphi(zt^{-1})\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y) = \varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y),$$
$$\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y) = \psi\varphi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y),$$
$$t^{-1}\varphi(t)\varphi(y^{-1})y = \varphi(y^{-1})\varphi(t)t^{-1}y,$$
$$t^{-1}\varphi(t)\varphi(y^{-1})y = \varphi(t)t^{-1}\varphi(y^{-1})y,$$
$$t^{-1}\varphi(t) = \varphi(t)t^{-1}.$$

Последнее равенство в силу замечания 3 справедливо.

4. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(zt^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y) = \varphi(z\psi(z^{-1}x)\psi(y^{-1}t)t^{-1})t\psi(t^{-1}y)$$

или

$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1}xy^{-1})) = \varphi(\psi(z^{-1}xy^{-1}t)t^{-1})t\psi(t^{-1}). \tag{9}$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и элемент $\varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1})$ для любого $t \in G$ лежит в центре $Z(G)$ группы G. Покажем, что (9) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем следующую последовательность равенств:

$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t))\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1})) = \varphi\psi(z^{-1}xy^{-1})\varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}),$$
$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t))\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1})) = \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}),$$
$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t)) = \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}),$$
$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1})\varphi\psi(t) = \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}),$$
$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1})\psi(t)t^{-1}\varphi(t)\varphi\psi(t^{-1})\varphi\psi(t) = 1.$$

Последнее равенство выполнено для произвольного $t \in G$.

5. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z)t = \varphi(t^{-1}\psi(y^{-1}t)\psi(z^{-1}x)z)\psi(t^{-1}y)t$$

или

$$\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z) = \varphi(t^{-1}\psi(y^{-1}t)\psi(z^{-1}x)z)\psi(t^{-1}y). \tag{10}$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и $\psi^{-1}\varphi$ — центральный автоморфизм группы G. Преобразуем (10), используя эти условия. Имеем

$$\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x)\psi(y)\varphi(t^{-1}z) = \varphi(t^{-1})\varphi\psi(y^{-1}tz^{-1}x)\varphi(z)\psi(t^{-1}y).$$

Применим к этому равенству ψ^{-1}:

$$t^{-1}\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1}z) = \psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)t^{-1}y,$$
$$\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1}z) = t\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)t^{-1}y,$$
$$\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}z = t\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}zt^{-1}y,$$
$$\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)yt^{-1}z = \varphi(y^{-1}tz^{-1}x)zt^{-1}y,$$
$$\varphi(x^{-1}zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}x) = zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}.$$

Так как x — произвольный элемент группы G и $zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}$ — элемент из коммутанта G' группы G, причем при $t = 1$ он совпадает с коммутатором $zyz^{-1}y^{-1}$, то автоморфизм φ действует на коммутанте G' тождественно и G' является подгруппой в центре $Z(G)$ группы G.

6. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(xy^{-1})$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(\varphi(y^{-1}x)yt^{-1}\varphi(z^{-1}t)) = \varphi(\psi(ty^{-1})t^{-1}z\psi(xz^{-1}))t\psi(yt^{-1}). \tag{11}$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и $\varphi\psi$ — центральный автоморфизм группы G. Преобразуем (11), используя эти условия. Имеем

$$\varphi(t^{-1}z)t\varphi\psi(y^{-1}x)\psi(yt^{-1})\varphi\psi(z^{-1}t) = \varphi\psi(ty^{-1})\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(xz^{-1})t\psi(yt^{-1}).$$

Положим $t^{-1}z = c$, $yt^{-1} = b$, тогда $z = tc$, $y = bt$ и равенство принимает вид

$$\begin{gathered}
\varphi(c)t\varphi\psi(t^{-1}b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) = \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1}t^{-1})t\psi(b),\\
\varphi(c)t\varphi\psi(t^{-1})\varphi\psi(b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) = \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1})\varphi\psi(t^{-1})t\psi(b),\\
\varphi(c)\varphi\psi(b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) = \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1})\psi(b),\\
\varphi(c)\varphi\psi(b^{-1})\varphi\psi(x)x^{-1}x\psi(b)\varphi\psi(c^{-1})cc^{-1} = \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(x)x^{-1}x\varphi\psi(c^{-1})\psi(b),\\
\varphi(c)b^{-1}x\psi(b)c^{-1} = b^{-1}\varphi(c)xc^{-1}\psi(b).
\end{gathered}$$

Пусть $b = \varphi(u)$, тогда

$$\begin{gathered}
\varphi(cu^{-1})x\varphi\psi(u)c^{-1} = \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}\varphi\psi(u),\\
\varphi(cu^{-1})x\varphi\psi(u)u^{-1}uc^{-1} = \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}\varphi\psi(u)u^{-1}u,\\
\varphi(cu^{-1})xuc^{-1} = \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}u,\\
\varphi(c^{-1}ucu^{-1}) = xc^{-1}ucu^{-1}x^{-1}.
\end{gathered}$$

Так как x — произвольный элемент группы G и $c^{-1}ucu^{-1}$ — коммутатор, то автоморфизм φ действует на коммутанте G' тождественно и G' является подгруппой в центре $Z(G)$ группы G.

7. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y) = \varphi(\psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x))t\psi(t^{-1}y)$$

или

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)) = \varphi(\psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x))t\psi(t^{-1}). \tag{12}$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и ψ — центральный автоморфизм. Покажем, что (12) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем

$$\begin{gathered}
\varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x) = \varphi\psi(y^{-1}t)\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}x)t\psi(t^{-1}),\\
\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x) = \varphi\psi(y^{-1}t)\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}x),\\
t^{-1}z\psi(z^{-1}ty^{-1}x) = \psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x),\\
t^{-1}z\psi(z^{-1})\psi(t)\psi(y^{-1}x) = \psi(y^{-1})\psi(t)t^{-1}z\psi(z^{-1})\psi(x),\\
\psi(y^{-1}x) = \psi(y^{-1})\psi(x).
\end{gathered}$$

Последнее равенство выполнено для произвольных $x, y \in G$.

Случай 8 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 7.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Тождества* (3), (5) *для обобщенных квандлов Александера не равносильны.*

Действительно, для квандлов

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x * y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

построенных на группе $\langle G, \cdot \rangle$ по автоморфизмам $\varphi, \psi \in \operatorname{Aut} G$, тождество (3) равносильно условию $\varphi\psi = \psi\varphi$, в то время как (5) равносильно двум условиям $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$\varphi(x^{-1})x\psi(y^{-1})y = \psi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x \tag{13}$$

для любых элементов x, y группы G.

Непосредственно из случая 1 теоремы 2 получаем

Следствие 2. *Пусть* $\langle G, \cdot \rangle$ *— группа,* φ *— автоморфизм группы* G*. Тогда операция*

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

определяет абелев квандл тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$\varphi(x^{-1})x\varphi(y^{-1})y = \varphi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x \tag{14}$$

для любых элементов x, y *группы* G*.*

Замечание 4. В голоморфе $\operatorname{Hol} G$ группы G элемент $\varphi(x^{-1})x$ можно записать в виде коммутатора

$$\varphi^{-1}x^{-1}\varphi x = [\varphi, x].$$

Поэтому (14) можно записать как

$$[\varphi, x][\varphi, y] = [\varphi, y][\varphi, x].$$

Так как x, y — произвольные элементы группы G, это равносильно тому, что подгруппа в голоморфе $\operatorname{Hol} G$, порожденная коммутаторами $[\varphi, x]$, $x \in G$, абелева.

Аналогично (13) может быть переписано в виде

$$[\varphi, x][\psi, y] = [\psi, y][\varphi, x], \quad x, y \in G,$$

в голоморфе $\operatorname{Hol} G$ группы G.

В заключение данного раздела приведем утверждение про тождество медиальности для квандлов $\operatorname{Conj}(G)$ и $\operatorname{Core}(G)$.

Предложение 1. *Пусть* $\langle G, \cdot \rangle$ *— группа, тогда операции*

$$x \circ y = yxy^{-1}, \quad x * y = yx^{-1}y, \quad x, y \in G, \tag{15}$$

согласованы обобщенным тождеством медиальности (5) *тогда и только тогда, когда имеет место включение*

$$\left\{g^2, g \in G\right\} \subseteq Z(G), \tag{16}$$

где $Z(G)$ *— центр группы* G*.*

Доказательство. Подставляя (15) в соотношение (2), получаем

$$dcd^{-1}ba^{-1}b^{-1}dcd^{-1} = db^{-1}dca^{-1}cd^{-1}bd^{-1}$$

или после сокращения

$$cd^{-1}ba^{-1}b^{-1}dc = b^{-1}dca^{-1}cd^{-1}b. \tag{17}$$

Полагая $c = d = 1$, получаем $ba^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}b$ или $ab^2 = b^2a$, что и доказывает включение (16).

С другой стороны, из тождества

$$x^{-1}y^{-1}xy = (yx)^{-2}(yxy^{-1})^2y^2$$

следует, что коммутант $[G,G]$ группы G содержится в подгруппе, порожденной квадратами элементов группы G. Поэтому из включения $\{g^2, g \in G\} \subseteq Z(G)$ получаем, что $[G,G] \subseteq Z(G)$. Но соотношение (17) является коммутаторным (суммарная степень по каждой букве a, b, c, d равна нулю). Значит, из включения (16) следует, что соотношение (17), а значит и (2), выполняются тождественно.

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев С. В.* Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.
2. *Joyce D.* A classifying invariant of knots: the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. N 1. P. 37–65.
3. *Reidemeister K.* Elementare Begründung der Knotentheorie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1926. V. 5, N 1. P. 24–32.
4. *Ryll-Nardzewski C.* Sur les moyennes // Studia Math. 1949. V. 11. P. 31–37.
5. *Hosszú M.* On the functional equation of distributivity // Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae. 1953. V. 4, N 1–2. P. 159–167.
6. *Госсу М.* Несимметричные средние // Colloq. Math. 1957. V. 5. P. 32–42.
7. *Hosszu M.* Nonsymmetric means // Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 1–9.
8. *Drinfeld V. G.* On some unsolved problems in quantum group theory // Quantum groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1992. P. 1–8.
9. *Smoktunowicz A., Vendramin L.* On skew braces (with an appendix by Byott N. and Vendramin L.) // J. Comb. Algebra. 2018. V. 2. P. 47–86.
10. *Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K.* Computing skew left braces of small orders // Intern. J. Algebra Comput. 2020. V. 30. P. 839–851.
11. *Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K.* On λ-homomorphic skew braces // J. Pure Appl. Algebra. 2022. V. 226. 106961.
12. *Курош А. Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
13. *Белоусов В. Д.* Системы квазигрупп с обобщенными тождествами // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 1. С. 75–146.
14. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.
15. *Sade A.* Quasigroupes obéissant á certain lois // Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul. , 1957. V. 22. P. 151–184.
16. sl Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.
17. sl Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. 2021. V. 293. 107552.
18. *Бардаков В. Г., Насыбуллов Т. Р.* Мульти-переключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных узлов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 500–506.
19. *Бардаков В. Г., Федосеев Д. А.* Произведения квандлов // Алгебра и логика. 2024. Т. 63, № 2. С. 111–142.

20. *Симонов А. А., Нещадим М. В., Бородин А. Н.* Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

Поступила в редакцию 17 февраля 2025 г.
После доработки 2 мая 2025 г.
Принята к публикации 13 мая 2025 г.

Бородин Александр Николаевич
Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 659700
serajsova@yandex.ru

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артёмович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru