О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ЭКВИВАРИАНТНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Ю. О. Беляева, В. П. Бурский

Аннотация. Рассматривается эквивариантная смешанная задача для волнового уравнения в цилиндре над шаром. Граничные условия в данной задаче инвариантны относительно группы поворотов. Рассматриваемая постановка является наиболее общей поворотно-инвариантной постановкой граничной задачи в шаре, а первая, вторая и третья краевые задачи являются ее частными случаями. В работе исследована разрешимость задачи. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи при определенных предположениях на граничные функции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.402

Ключевые слова: эквивариантная задача, волновое уравнение, сферические функции.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается волновое уравнение

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in B, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

где $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

и граничным условием вида

$$u|_{\partial B} * \alpha + u_\nu|_{\partial B} * \beta = 0. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат $L_2(\partial B)$ и

$$\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \alpha_l^k Y_l^k, \quad \beta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \beta_l^k Y_l^k$$

— их разложения в ряды Фурье по сферическим функциям Y_l^k . Пусть далее u_0 , u_1 — заданные функции, $u_0 \in H^1(B)$, $u_1 \in L_2(B)$. Символ $*$ обозначает свертку на ∂B , она может быть записана в виде $\psi * \alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \psi_l^k \alpha_l^k Y_l^k$. Условие (3), как известно, обладает свойством инвариантности относительно группы поворотов шара: для любых $V \in SO(\mathbb{R}^n)$ выполняется $T_V(\alpha * u) = \alpha * T_V u$, где $T_V(f(x)) = f(Vx)$. Принадлежность функций α и β пространству $L_2(\partial B)$ не является ограничением общности. Более того, как будет видно из дальнейшего,

их можно считать бесконечно гладкими функциями, поскольку значение имеют не сами коэффициенты Фурье функций α , β , а их отношение.

Общей теории краевых задач посвящена монография [1], в которой краевые задачи с инвариантными краевыми условиями — одна из тем. Граничная задача с условиями вида (3) для оператора Лапласа в круге рассматривалась в [2] для уравнения Гельмгольца. В работе [3] рассматривалось стационарное уравнение Шредингера во внешности шара, исследован спектр и получены точные формулы для собственных функций задачи с условием вида (3). Разрешимость задачи для уравнения теплопроводности в круге была рассмотрена в [4]. В данной работе исследована разрешимость смешанной задачи (1)–(3). При определенных условиях на коэффициенты Фурье функций α и β доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи в пространстве $H^1(\Omega)$, $\Omega = B \times (0, T)$.

2. Задача на собственные значения эллиптической задачи

Далее в работе предполагается, что выполняются следующие условия на коэффициенты α_l^k и β_l^k .

Условие 1. Будем предполагать, что коэффициенты α_l^k и β_l^k удовлетворяют условиям:

$$(a) (\alpha_l^k)^2 + (\beta_l^k)^2 \neq 0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad k = -l, \dots, l;$$

$$(b) \text{ либо } \beta_0^0 = 0, \text{ либо } \frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0;$$

$$(c) \text{ если } \beta_l^k \neq 0, \text{ то для таких } l, k \text{ выполняется условие } \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \geq 0.$$

Условия на коэффициенты задачи, записанные как условие 1, нужны для положительности оператора задачи (1)–(3), который будет введен ниже.

Условие 2. Будем предполагать, что коэффициенты α_l^k и β_l^k удовлетворяют условию: $\frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \leq \gamma$, $\gamma > 0$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $k = -l, \dots, l$.

Необходимость введения этих условий связана с возможностью формального деления при работе с граничным условием (3), а также требованием невырожденности рассматриваемой задачи. Неотрицательность и ограниченность отношения коэффициентов $\frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k}$ будут гарантировать наличие эквивалентного скалярного произведения специального вида для случая вспомогательной эллиптической задачи, которая будет рассмотрена в этом разделе.

Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные функции и собственные значения:

$$-\Delta V = \lambda V, \quad (4)$$

$$V|_{\partial B} * \alpha + \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} * \beta = 0. \quad (5)$$

Строго говоря, в равенствах (4), (5) функцию V следует понимать как принадлежащую соболевскому пространству $H^2(B)$.

Под собственными функциями оператора задачи будем понимать обобщенные собственные функции, определяемые ниже. Перед тем, как дадим строгое определение, определим пространство пробных функций, ассоциированных с граничной задачей вида (4), (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Введем замкнутое подпространство $M \subset L_2(\partial B)$ такое, что $M := (\text{span}\{Y_l^k : \beta_l^k = 0\})^\perp$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Другими словами, множество M состоит из функций, имеющих нулевые коэффициенты Фурье в разложении по сферическим функциям с такими же индексами, с которыми в граничном условии (5) коэффициенты β_l^k равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество M является гильбертовым пространством как замкнутое подпространство в $L_2(\partial B)$ с индуцированным скалярным произведением.

Как известно, для любой функции $v(x) \in H^1(B)$ на границе ∂B определен ее след $v|_{\partial B}$ [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем $S(B) := \{v \in H^1(B) : v|_{\partial B} \in M\}$. Очевидно, $S(B)$ является замкнутым линейным подпространством в $H^1(B)$, тем самым является гильбертовым пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пространство Соболева — Слободецкого $H^{1/2}(\partial B)$ следов функций из $H^1(B)$ можно рассматривать как фактор-пространство $H^1(B)/\overset{\circ}{H}^1(B)$ по подпространству функций с нулевым следом, и поэтому имеем право и будем понимать пространство следов $H^{1/2}(\partial B)$ как прямое слагаемое $\tilde{S}$ в разложении $H^1(B) = H_0^1(B) \oplus \tilde{S}$ со скалярным произведением, индуцированным из $H^1(B)$: $\|v\|_{\tilde{S}(B)}^2 = \|v\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(B)}^2$. Теперь можно ввести пространство $S(B)$ как подпространство в $\tilde{S}$ функций v , для которых $v|_{\partial B} \in M^1 = M \cap H^1(B)$. В силу замкнутости пространства M_1 в $H^1(B)$ и непрерывности оператора проектирования пространство $S(B)$ гильбертово.

Запишем интегральное тождество, которое будет определять обобщенные собственные функции.

Считая, что $V \in H^2(B)$, умножим обе части равенства (4) на пробную функцию W и проинтегрируем по частям. Пусть $W \in S(B)$, тогда

$$\int_B \nabla V \nabla W \, dx - \int_{\partial B} \frac{\partial V}{\partial \nu} W \, d\sigma = \lambda \int_B V W \, dx.$$

С одной стороны,

$$\int_{\partial B} \frac{\partial V}{\partial \nu} W \, d\sigma = \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}, W \right) \Big|_{L_2(\partial B)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k w_l^k,$$

где ω_l^k и w_l^k — коэффициенты разложения в ряд Фурье по сферическим функциям функций $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ и W на ∂B , т. е.

$$V|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l v_l^k Y_l^k, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k Y_l^k, \quad W|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l w_l^k Y_l^k.$$

С другой стороны, из граничного условия при $\beta_l^k \neq 0$ имеем

$$\omega_l^k = -v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k},$$

а при l, k таких, что $\beta_l^k = 0$, будет $w_l^k = 0$.

Таким образом,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k w_l^k = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k.$$

Итак, приходим и интегральному тождеству вида

$$\int_B \nabla V \nabla W \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k = \lambda \int_B V W \, dx. \tag{6}$$

где $V, W \in S(B)$.

Последнее равенство при желании можно понимать как уравнение $LV = \lambda V$, где оператор L задан левой частью равенства (6) с областью определения $S(B)$ и действует в пространство $S'(B)$, сопряженное оснащенное пространство в смысле топологии $L_2(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Обобщенной собственной функцией задачи (4), (5), соответствующей собственному значению λ , будем называть функцию $V \in S(B)$, такую, что для любой функции $W \in S(B)$ выполнено (6).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что в определениях решения обобщенной граничной задачи [6] вспомогательная функция $W(x)$ выбирается определенным образом. Если исходная задача — однородная задача Дирихле, то получается, что $\beta = 0$, $\alpha(x) = \delta(x)$, т. е. и все $\alpha_l^0 = 1$, и $\alpha_l^k = 0$ при $k \neq 0$. При этом основное пространство $S(B) = \overset{\circ}{H}^1(B)$ и в интегральном тождестве (6) слагаемого с суммами не будет. Для однородной задачи Неймана получается, что $\alpha = 0$, $\beta(x) = \delta(x)$, т. е. и $\beta_l^0 = 1$, и $\beta_l^k = 0$ при $k \neq 0$. Здесь пространство M тривиально, пространство $S(B)$ совпадает $H^1(B)$ и в интегральном тождестве (6) слагаемого с суммами также не будет из-за тривиальности функции α .

Лемма 1. Пусть $V, W \in S(B)$, а α_l^k, β_l^k удовлетворяют условиям 1, 2. *Билинейная форма*

$$Q(V, W) = \int_B \nabla V \nabla W \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k$$

задает эквивалентное скалярное произведение в $H^1(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$(W, W)'_{H^1(B)} \geq C_1 (W, W)_{H^1(B)},$$

где $(W, W)'_{H^1(B)} = Q(W, W)$, $W \in S(B)$. Предположим, что такой константы C_1 не существует. Тогда для любого целого $m \geq 1$ найдется такая функция $f_m(x) \in S(B)$, что

$$\|f_m\|_{H^1(Q)}^2 > m Q(f_m, f_m).$$

Разделив на норму, получим, что найдется функция $g_m(x) \in S(B)$ такая, что

$$\|g_m\|_{H^1(Q)}^2 = 1$$

и

$$Q(g_m, g_m) = \int_B |\nabla g_m|^2 \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_{m,l}^k|^2 < \frac{1}{m}. \tag{7}$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\int_B |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{m}, \quad (8)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_{m,l}^k|^2 < \frac{1}{m}. \quad (9)$$

Так как $\|g_m\|_{H^1(B)}^2 = 1$, последовательность $g_m(x)$ ограничена в $H_1(B)$. В силу компактности вложения $H^1(B) \subset L_2(B)$ из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в $L_2(B)$.

Обозначим ее снова через $g_m(x)$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \|g_m - g_p\|_{H^1(B)}^2 &= \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla(g_m - g_p)\|_{L_2(B)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + 2\|\nabla g_m\|_{L_2(B)}^2 + 2\|\nabla g_p\|_{L_2(B)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + \frac{2}{m} + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Последовательность фундаментальна, а значит, $\|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $m, p \rightarrow \infty$, получим, что и $\|g_m - g_p\|_{H^1(B)}^2 \rightarrow 0$, т. е. последовательность фундаментальна в $H^1(B)$. Тогда она сходится к некоторой функции $g(x)$ в $H^1(B)$. Так как $S(B)$ замкнуто в $H^1(B)$, то $g(x) \in S(B)$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (8), (9), получим, что

$$\|g\|_{H^1(B)}^2 = 1; \quad (a)$$

$$\int_B |\nabla g|^2 dx = 0, \quad (b)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_l^k|^2 = 0. \quad (c)$$

Из условий (a) и (b) вытекает, что $g = \frac{1}{|B|} \neq 0$. Согласно условию 2 возможны два варианта: $\frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0$ или $\beta_0^0 = 0$. Если $\frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0$, то получаем противоречие с (c). Если же $\beta_0^0 = 0$, то $g_0^0 = 0$ (так как $g(x) \in S(B)$). Но уже известно, что функция g тождественно равна ненулевой константе, а значит, и g_0^0 должен быть отличен от нуля. Получили противоречие. Таким образом, $(W, W)'_{H^1(B)} \geq C_1(W, W)_{H^1(B)}$.

Оценка $(W, W)'_{H^1(B)} \leq C_2(W, W)_{H^1(B)}$ справедлива в силу неравенства

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_l^k|^2 \leq \gamma \sum_{k=-l}^l |g_l^k|^2 = \gamma \|g\|_{L_2(\partial B)}^2 \leq c_4 \|g\|_{H^1(B)}^2. \quad \square$$

Теперь можно записать вспомогательную задачу (4), (5) в виде

$$(V, W)'_{H^1(B)} = \lambda(V, W)_{L_2(B)}, \quad (10)$$

где $V, W \in S(B)$. Тогда

$$|(V, W)_{L_2(B)}| \leq \|V\|_{L_2(B)} \|W\|_{L_2(B)} \leq c_1 \|V\|_{L_2(B)} \|W\|_{H^1(B)} \quad (11)$$

$$\leq c_2 \|V\|_{L_2(B)} \|W\|'_{H^1(B)}, \quad (12)$$

т. е. $(V, W)_{L_2(B)}$ — непрерывный антилинейный функционал относительно функции $W \in S(B)$. Это, во-первых, означает, что введенные выше обобщенные собственные функции являются собственными функциями в обычном смысле для оператора $\Delta : H^1(B) \rightarrow H^{-1}(B)$, действующего в оснащенных пространствах [7]. А во-вторых, позволяет применить теорему Рисса, согласно которой существует единственная функция $\mathbb{V} \in S(B)$ такая, что

$$(V, W)_{L_2(B)} = (\mathbb{V}, W)'_{H^1(B)}$$

для всех функций $W \in S(B)$.

Поскольку $\|\mathbb{V}\|_{H^1(B)} \leq c_3 \|V\|_{L_2(B)}$, отображение $V \rightarrow \mathbb{V}$ является ограниченным оператором из $L_2(B)$ в $S(B)$. Обозначим его через A . Таким образом, рассматриваемая вспомогательная задача примет вид уравнения:

$$(V, W)'_{H^1(B)} = \lambda(AV, W)'_{H^1(B)}. \tag{13}$$

Так как $S(B)$ — замкнутое подмножество $H^1(B)$, а пространство $H^1(B)$ компактно вложено в $L_2(B)$, то оператор A , действующий уже из $S(B)$ в $S(B)$, компактен. Можно показать, что оператор A самосопряженный. Действительно, это вытекает из следующих равенств:

$$(AV, W)'_{H^1(B)} = (V, W)_{L_2(B)} = \overline{(W, V)}_{L_2(B)} = \overline{(AW, V)}'_{H^1(B)} = (V, AW)'_{H^1(B)} \tag{14}$$

при $V, W \in S(B)$. Оператор A положительный, так как

$$(AW, W)'_{H^1(B)} = \|W\|_{L_2(B)}^2 > 0 \text{ для } W \neq 0.$$

Итак, сужение оператора A на $S(B)$ является положительным компактным оператором в $S(B)$.

Запишем вспомогательную задачу (13) в виде

$$AV = \frac{1}{\lambda} V, \tag{15}$$

где A — положительный компактный оператор, действующий из $S(B)$ в $S(B)$. По теореме Гильберта — Шмидта получим, что существует ортонормированный базис в $S(B)$, состоящий из собственных функций $\frac{V_m}{\sqrt{\lambda_m}}$ оператора A . Здесь собственные значения λ_m являются вещественными, положительными, изолированными, имеют конечную кратность и $\lambda_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$. Сами функции V_m образуют ортонормированный базис в $L_2(B)$.

Теорема 1. *Обобщенные собственные функции задачи (4), (5) образуют ортонормированный базис пространства $S(B)$ со скалярным произведением $(V, W)'$ и образуют ортонормированный базис пространства $L_2(B)$ с обычным скалярным произведением.*

3. Волновое уравнение

Вернемся к исходной задаче (1)–(3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Введем гильбертово пространство $G(\Omega)$ следующим образом:

$$G(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial B \times (0, T)} \in L_2((0, T), M)\}.$$

Норма в $G(\Omega)$ задается аналогично норме в $H^1(\Omega)$. Здесь $L_2((0, T), M)$ — замкнутое подпространство в $L_2(\Gamma)$, где $\Gamma = (0, T) \times \partial B$, состоящее из функций, принимающих для почти всех $t \in (0, T)$ значения в M , с нормой

$$\|u\|_{L_2((0, T), M)}^2 = \int_0^T \|u\|_{L_2(\partial B)}^2 dt.$$

Пусть $v \in G(\Omega)$ и $v|_{t=T} = 0$. Умножив уравнение (1) на пробную функцию $v(x, t)$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_{B_T} u_t v|_{t=T} dx - \int_{B_0} u_t v|_{t=0} dx - \int_{\Omega} u_t v_t dx dt = \int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dt. \quad (16)$$

Так как $v|_{t=T} = 0$ и $u_t|_{t=0} = u_1(x)$, имеем

$$- \int_{B_0} u_1 v dx - \int_{\Omega} u_t v_t dx dt = \int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dt. \quad (17)$$

Пусть для функций $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и v допустимо разложение в ряд Фурье по сферическим функциям на ∂B и при почти всех $t \in (0, T)$

$$v(x, t)|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l v_l^k(t) Y_l^k(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \right|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k(t) Y_l^k(x).$$

Из граничного условия имеем равенство

$$\omega_l^k = -u_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k}$$

при $\beta_l^k \neq 0$, а если l, k такие, что $\beta_l^k = 0$, то $u_l^k = 0$, так как $u \in G(\Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt = \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k v_l^k dt = - \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k v_l^k dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $u_0(x) \in H^1(B)$, $u_1(x) \in L_2(B)$. Функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи (1)–(3)*, если для любой функции $v(x, t) \in G(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k(t) v_l^k(t) \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} dx. \quad (18)$$

Рассмотрим разложение функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ в ряд Фурье по базису V_m . Получим равенства

$$u|_{t=0} = u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0,m} V_m, \quad u_t|_{t=0} = u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{1,m} V_m.$$

Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)V_m(x). \quad (19)$$

Подставив этот ряд в волновое уравнение (1), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (u_m''(t)V_m(x) - u_m(t)\Delta V_m(x)) = 0.$$

Так как V_m определяются из равенства $\Delta V_m(x) = -\lambda_m V_m(x)$, предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} (u_m''(t)V_m(x) + \lambda_m u_m(t)V_m(x)) = 0.$$

Отсюда вытекают уравнения для определения $u_m(t)$:

$$u_m''(t) + \lambda_m u_m(t) = 0.$$

В силу положительности λ_m

$$u_m(t) = C_m^1 \cos \sqrt{\lambda_m}t + C_m^2 \sin \sqrt{\lambda_m}t.$$

Запишем начальные условия для $u_m(t)$ в виде

$$u_m(0) = u_{0,m}, \quad u_m'(0) = u_{1,m}.$$

Определив C_m^1 и C_m^2 из начальных условий, получим

$$C_m^1 = u_{0,m}, \quad C_m^2 = \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}}.$$

Итак,

$$u_m(t) = u_{0,m} \cos \sqrt{\lambda_m}t + \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}} \sin \sqrt{\lambda_m}t.$$

Теорема 2. Пусть $u_0 \in H^1(B)$ и $u_1 \in L_2(B)$, тогда ряд (19) сходится в пространстве $G(\Omega)$ к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (1)–(3). Справедлива оценка

$$\|u\|_{G(\Omega)} \leq C_T(\|u_0\|_{H^1(B)} + \|u_1\|_{L_2(B)}).$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $u(x, t), v(x, t) \in G(\Omega)$, $V_m \in S(B)$. Проверим интегральное тождество для одного слагаемого $u_m(t)V_m(x)$ ряда (19):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt \\ &= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) - u_m'(t) V_m(x) v_t(x, t)) dx dt \\ & \quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l V_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) + u_m''(t) V_m(x) v(x, t)) \, dx dt \\
&\quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k V_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \, dt + \int_{B_0} u_{1,m} V_m v|_{t=0} \, dx \\
&= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) - \lambda_m u_m(t) V_m(x) v(x, t)) \, dx dt \\
&\quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l V_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \, dt + \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} \, dx.
\end{aligned}$$

Используя определение функций $V_m(x)$, а именно равенство

$$\begin{aligned}
&\int_0^T u_m(t) \int_B \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) \, dx dt \\
&= - \int_0^T u_m(t) \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} V_l^k v_l^k \, dt + \lambda_m \int_0^T u_m(t) \int_B V_m(x) v(x, t) \, dx dt,
\end{aligned}$$

получим, что

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) \, dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \, dt = \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} \, dx,$$

т. е. интегральное тождество выполнено.

ШАГ 2. Так как задача линейна, выполнение интегрального тождества справедливо и для $\sum_{m=1}^N u_m(t) V_m(x)$.

ШАГ 3. Вспомним, что для всех $W \in S(B)$ справедливо

$$A(W, W)_{H^1(B)} \leq (W, W)'_{H^1(B)} \leq B(W, W)_{H^1(B)}.$$

Поэтому, рассмотрев теперь $w(x, t) \in G(\Omega)$, получим, что

$$\begin{aligned}
A \int_0^T (w(x, t), w(x, t))_{H^1(B)} \, dt &\leq \int_0^T (w(x, t), w(x, t))'_{H^1(B)} \, dt \\
&\leq B \int_0^T (w(x, t), w(x, t))_{H^1(B)} \, dt.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает эквивалентность скалярного произведения вида

$$\begin{aligned}
(v(x, t), w(x, t))'_{H^1(\Omega)} &= (\nabla v(x, t), \nabla w(x, t))_{L_2(\Omega)} + (v_t(x, t), w_t(x, t))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k(t) w_l^k(t) \, dt
\end{aligned}$$

стандартному скалярному произведению в $H^1(\Omega)$.

Пусть $S_N(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t)W_i(x)$. Тогда $S_N - S_M = \sum_{i=M+1}^N u_i(t)W_i(x)$. Рассмотрим норму этой разности в пространстве $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 &= \|\nabla(S_N - S_M)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|(S_N - S_M)'_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt, \end{aligned}$$

здесь w_l^k — коэффициенты Фурье разложения $W_i(x)$ на ∂B по базису сферических функций Y_l^k . Итак,

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=M+1}^N u_i \nabla W_i \right)^2 dxdt + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=M+1}^N u'_i W_i \right)^2 dxdt \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{i=M+1}^N u_i^2 (\nabla W_i)^2 dxdt + \int_{\Omega} \sum_{i=M+1}^N (u'_i)^2 W_i^2 dxdt \right) \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt. \end{aligned}$$

Вспоминаем, что

$$\int_B (\nabla W_i)^2 dx = \lambda \int_B W_i^2 dx - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (w_l^k)^2 dt.$$

Тогда

$$\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \leq C \sum_{i=M+1}^N \int_0^T (\lambda u_i^2 + (u'_i)^2) dt.$$

Ранее мы уже выразили явно коэффициенты u_m :

$$u_m(t) = u_{0,m} \cos \sqrt{\lambda_m} t + \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}} \sin \sqrt{\lambda_m} t.$$

Отсюда вытекают следующие оценки:

$$u_m^2 \leq c_2 \left(u_{0,m}^2 + \frac{u_{1,m}^2}{\lambda_m} \right), \quad \lambda_m u_m^2 \leq c_2 (\lambda_m u_{0,m}^2 + u_{1,m}^2),$$

$$u'_m = -\sqrt{\lambda_m} u_{0,m} \sin \sqrt{\lambda_m} t + u_{1,m} \cos \sqrt{\lambda_m} t, \quad (u'_m)^2 \leq c_3 (\lambda_m u_{0,m}^2 + u_{1,m}^2).$$

Тогда

$$\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \leq C_4 \sum_{i=M+1}^N (\lambda_i u_{0,i}^2 + u_{1,i}^2),$$

где $C_4 = C(c_2 + c_3)T$.

Так как система функций W_m ортонормирована в $L_2(B)$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|u_1\|_{L_2(B)}'^2 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{1,m}^2.$$

Подставляя $u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0,m} W_m$ в равенства

$$(W, V)'_{H^1(B)} = \lambda(W, V)_{L_2(B)},$$

получаем, что

$$\|u_0\|_{H^1(B)}'^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m u_{0,m}^2.$$

Переходя к пределу при $M, N \rightarrow \infty$, получим, что $\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \rightarrow 0$, т. е. S_N — фундаментальная последовательность. В силу полноты пространства $H^1(\Omega)$ ряд $u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m W_m$ сходится в $H^1(\Omega)$. Пусть $M = 0$. Устремляя N к бесконечности, получим, что

$$\|u\|_{H^1(B)}'^2 \leq k_4 (\|u_0\|_{H^1(B)}'^2 + \|u_1\|_{L_2(B)}'^2).$$

Выполнив предельный переход в интегральном тождестве вида

$$\int_{\Omega} (\nabla S_N \nabla v - (S_N)_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l (V_i)_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = \int_{B_0} \sum_{i=1}^N u_{1,i} V_i v|_{t=0} dx,$$

получим, что функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3). $\square$

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Для доказательства единственности решения задачи (1)–(3) достаточно показать, что соответствующая смешанная задача с нулевыми начальными условиями:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (20)$$

$$u|_{\partial B} * \alpha + u'_\nu|_{\partial B} * \beta = 0, \quad (21)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$u'_t|_{t=0} = 0 \quad (23)$$

имеет только тривиальное решение. Функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ будет обобщенным решением задачи (20)–(23), если для любой функции $v(x, t) \in G(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k(t) v_l^k(t) \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = 0. \quad (24)$$

Зафиксируем параметр $\tau \in (0, T)$ и выберем пробную функцию $v(x, t) \in G(\Omega)$ следующим образом:

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^{\tau} u(x, \xi) d\xi, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Тогда (24) примет вид

$$\int_B dx \int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \int_t^\tau \nabla u(x, \xi) d\xi + \int_B dx \int_B u_t(x, t) u(x, t) dt + \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = 0. \quad (25)$$

Обозначим

$$I_1 = \int_B dx \int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \int_t^\tau \nabla u(x, \xi) d\xi, \quad I_2 = \int_B dx \int_B u_t(x, t) u(x, t) dt, \\ I_3 = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = 0.$$

Рассмотрим отдельно I_3 . По теореме Фубини получим, что

$$I_3 = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) dt \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_0^\xi v_l^k(t) dt \\ = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_0^\tau v_l^k(t) dt - \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_\xi^\tau v_l^k(t) dt \\ = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt - I_3.$$

Отсюда в силу условия 1

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt \geq 0.$$

Аналогично для I_1 будет справедливо

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx \geq 0.$$

Проинтегрировав по частям I_2 , получим

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx \geq 0.$$

Итак, из (25) вытекает

$$\int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx + \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx + \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt = 0,$$

а значит,

$$\int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx = 0, \quad \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx = 0, \quad \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt = 0. \quad (26)$$

Параметр $\tau \in (0, T)$ выбирается произвольно. Тогда из (26) следует, что u — нулевая функция в Ω . Итак, доказана

Теорема 3. Задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t) \in G(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.
2. Бурский В. П. Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 2. С. 158–169.
3. Burskii V. P., Zaretskaya A. A. On the spectrum and eigenfunctions of the equivariant general boundary value problem outside the ball for the Schrödinger operator with coulomb potential Laplace operator in a circle // Quant. Phys. Lett. 2016. V. 5, N 2. P. 5–17.
4. Бурский В. П., Куракина И. И. Общая эквивариантная смешанная задача для уравнения теплопроводности в круговом цилиндре // Тр. ИПММ. 2012. Т. 24. С. 25–36.
5. Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. М.: МЦНМО, 2021.
6. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. М.: ВИНТИ, 1988. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30).
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.

Поступила в редакцию 29 марта 2025 г.

После доработки 29 марта 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Беляева Юлия Олеговна (ORCID 0000-0001-8613-3792)
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР
yilia-b@yandex.ru

Бурский Владимир Петрович (ORCID 0000-0001-5496-6132)
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный 141701, Московская область;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР
bvp30@mail.ru