Сибирский математический журнал
Июль—август, 2025. Том 66, № 4

УДК 512.815.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ $6j$–СИМВОЛОВ ДЛЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{gl}_n$

Д. В. Артамонов

Аннотация. Находится явное описание линейных порождающих пространства кратности, которое описывает вхождения определенного неприводимого представления в разложение тензорного произведения двух неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли всех матриц заданного размера. С использованием полученного описания находится явная формула для произвольного $6j$-символа для конечномерных представлений рассматриваемой алгебры Ли. Его значение выражается через значение обобщенной гипергеометрической функции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.401

Ключевые слова: тензорные произведения, разложение на неприводимые, $6j$-символы.

Теория представлений простых алгебр Ли содержит ряд естественных вопросов, которые, как до сих пор считалось, не имеют простого, хорошего решения. Это, например, ряд вопросов, связанных с явным разложением на неприводимые тензорного произведения $V \otimes W$ двух конечномерных неприводимых представлений.

1. Какие и с какой кратностью возникают при разложении $V \otimes W$ в прямую сумму неприводимых неприводимые слагаемые U (проблема кратности)?

2. Каковы явные формулы для матричных элементов проекторов $V \otimes W \to U$ на неприводимые слагаемые (задача о нахождении коэффициентов Клебша — Гордана или $3j$-символов)?

3. Каковы матричные элементы отображения ассоциатора, осуществляющего изоморфизм двух разложений на неприводимые тройного тензорного произведения: $V \otimes (W \otimes U)$ и $(V \otimes W) \otimes U$ (задача о нахождении коэффициентов Рака или $6j$-символов)?

Задачу 1, с одной стороны, можно считать решенной, например, с использованием теории характеров (см., например, обзор [1], а также [2–4]). Но, с другой стороны, имеется, усиленная версия задачи 1: задача построения базиса в пространстве кратности (см. формулу (5)).

Что касается задач 2 и 3, то долгое время считалось, что в общем виде (т. е. для произвольного набора представлений для $\mathfrak{gl}_n$ при $n \geq 3$) они не имеют хорошего решения. Но также считалось, что все-таки есть надежда получить хорошее их решение в серии достаточно общих случаев, если использовать подходящие специальные функции для выражения ответа.

В процессе реализации этой идеи в [5, 6] для $\mathfrak{gl}_3$ было получено полное решение задач 2 и 3 в случае произвольного набора представлений V, W, U. Ответ оказывается не очень громоздким (особенно для $6j$-символов!) за счет того, что он выражается через значения гипергеометрических функций многих переменных.

Ключом к получению этого хорошего ответа являются два факта. Во-первых, явное решение проблемы кратности для $\mathfrak{gl}_3$, полученное в [7]. Во-вторых, использование очень удобной для вычислений А-ГКЗ реализации представлений. В случае $\mathfrak{gl}_3$ ее описание может быть найдено в [5].

В настоящей работе результаты [6] распространяются на случай $\mathfrak{gl}_n$. По существу, схема вычисления $6j$-символов, найденная в [6], срабатывает и для $\mathfrak{gl}_n$, надо лишь предварительно решить явно проблему кратности[1)] и построить А-ГКЗ реализацию для $\mathfrak{gl}_n$.

А-ГКЗ реализация для $\mathfrak{gl}_n$ построена в [8]. В настоящей работе сначала явно решается проблема кратности, а затем вычисляются $6j$-символы по аналогии с тем, как это сделано в [6]. При этом стоит отметить, что работ, посвященных вычислению $6j$-символов для $\mathfrak{gl}_n$ в общем случае, нет [9]. Как правило, рассматриваются частные случаи (см. [10–13]; отметим также работы [14, 15], где вычислены некоторые классы $6j$-символов, и этот результат играет важную техническую роль в вычислении некоторых коэффициентов Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_3$).

Задачи 1–3 могут быть поставлены также и для других серий простых алгебр Ли. Для них имеются лишь частичные результаты — данные задачи решаются лишь для специальных классов представлений. Задача 1 обсуждалась для этих алгебр Ли в духе теории характеров [16, 17] с использованием таблиц Юнга [18–20]. Задачи 2 и 3 вычисления $3j$- и $6j$-символов для алгебр других серий рассматривались лишь для частных случаев. Так, в [21, 22] вычислялись $3j$-символы для симметрических степеней стандартного представления. При этом $6j$-символам уделялось гораздо большее внимание. В основном рассматривались $6j$-символы для симметрических степеней стандартного представления (для таких представлений в тензорных произведениях отсутствуют кратности) [23–27]. Имеются также работы, где рассматриваются простейшие случаи тензорных произведений, содержащих кратности [28–30]. Более общие случаи, насколько известно автору, не рассматривались.

Отметим, что имеется ослабленная версия задач 2 и 3: задача об алгоритмическом вычислении $3j$ и $6j$-символов. Эта задача решена в [31].

План настоящей работы следующий. В разд. 1 напоминается функциональная реализация представлений, а также в рамках ее дается некоторый новый взгляд на конструкцию Вейля (дается определение операции наложения диаграмм Юнга). Также дается определение $3j$ и $6j$-символов. В разд. 2 явно решается проблема кратности для разложения тензорного произведения в функциональной реализации. Эта задача эквивалентна задаче явного нахождения базисных семиинвариантов в тройном тензорном произведении. Именно в такой форме задача и рассматривается в данном разделе. Основной результат — теорема 3. В разд. 3 разъясняются основные идеи А-ГКЗ реализации представлений из работы [8]. В разд. 4 производится явное вычисление $6j$-символа. Результат содержится в теореме 6. Приводится пример вычисления $6j$-символа.

[1)] «Решить явно проблему кратности» означает найти явно базис в пространстве кратности.

1. Предварительные сведения

1.1. Функциональная реализация. В работе рассматриваются группы и алгебры Ли над $\mathbb{C}$. Также рассматриваются лишь конечномерные неприводимые представления.

Функции на группе GL_n образуют представление группы GL_n. На функцию $f(g)$, $g \in GL_n$, элемент группы $X \in GL_n$ действует с помощью правых сдвигов по правилу

$$(Xf)(g) = f(gX). \tag{1}$$

Переходя к инфинитезимальному действию, получаем, что на пространстве всех функций на G имеется действие $\mathfrak{gl}_n$.

Любое конечномерное неприводимое представление может быть реализовано как подпредставление в пространстве функций. Именно, если $[m_1, \dots, m_n]$ — старший вес, то в пространстве всех функций имеется старший вектор с таким весом, который явно записывается следующим образом.

Пусть a_i^j — функция матричного элемента на группе GL_n. Здесь j — номер строки, i — номер столбца. Кроме того, положим

$$a_{i_1,\dots,i_k} := \det\bigl(a_i^j\bigr)_{i=i_1,\dots,i_k}^{j=1,\dots,k}, \tag{2}$$

где берется минор подматрицы в матрице $\bigl(a_i^j\bigr)$, образованный строками первыми, идущими подряд строками $1, \dots, k$ и столбцами $i_1, \dots, i_k$.

Оператор $E_{i,j}$ действует на определитель путем действия на столбцовые индексы

$$E_{i,j} a_{i_1,\dots,i_k} = \begin{cases} a_{\{i_1,\dots,i_k\}|_{j\mapsto i}}, & j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3}$$

где $.\,|_{j\mapsto i}$ означает операцию замены индекса j на i.

Возьмем целочисленный старший вес $[m_1, \dots, m_n]$. Используя (3), легко убедиться в том, что вектор

$$v_0 = a_1^{m_1-m_1} a_{1,2}^{m_2-m_3} \dots a_{1,\dots,n}^{m_n} \tag{4}$$

старший для алгебры $\mathfrak{gl}_n$ с весом $[m_1, \dots, m_n]$.

Теорема 1 (см. [32]). *Пространство функций, составляющих представление со старшим вектором* (4), *есть пространство функций, которые могут быть записаны как многочлены от определителей $a_{i_1,\dots,i_k}$ таких, что их однородная степень по определителям фиксированного размера k такая же, как у старшего вектора* (4).

1.2. Наложение симметризатора Юнга. Со старшим весом $[m_1, \dots, m_n]$ свяжем диаграмму Юнга. Первую ее строку длины m_1 заполним символами 1, следующую строку длины m_2 заполним символами 2 и т. д. В последней строке длины m_n запишем n. С полученной таблицей Юнга свяжем симметризатор Юнга, который представляет собой сначала применение антисимметризации по столбцам, а потом симметризацию по строкам.

Имеет место предложение, являющееся прямым следствием теоремы 1.

Предложение 1. *Для того чтобы полином от определителей a_i^j лежал в представлении со старшим вектором* (4), *необходимо, чтобы среди его верхних индексов* 1 *встречалось m_1 раз,* 2 *встречалось m_2 раз и. т. д.*

Определение 1. *Наложением симметризатора Юнга* на моном от a_i^j, удовлетворяющий условиям предложения 1, назовем применение к верхним индексам этого монома симметризатора Юнга, отвечающего диаграмме Юнга, построенной вышеописанным способом по старшему весу $[m_1, \dots, m_n]$.

Пример 1. Результат наложения симметризатора Юнга на моном $a_1^1 a_2^1 a_3^2$ вычисляется так:

$$a_1^1 a_2^1 a_3^2 + a_1^1 a_2^1 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^1 - a_1^1 a_2^2 a_3^1 = a_1 a_{2,3} + a_2 a_{1,3}.$$

Верно следующее утверждение, проверяемое непосредственным вычислением

Предложение 2. *Если дан моном от a_i^j, удовлетворяющий условиям предложения 1, то в результате наложения на него симметризатора Юнга получается полином, лежащий в представлении, описываемом в теореме* 1.

Мономы от определителей, удовлетворяющие условиям теоремы 1, *являются собственными для оператора наложения симметризатора Юнга.*

1.3. Проблема кратности. Возьмем разложение тензорного произведения представлений V и W алгебры $\mathfrak{gl}_n$ в прямую сумму неприводимых:

$$V \otimes W = \sum_U \mathrm{Mult}_U \otimes U, \tag{5}$$

где U обозначает типы неприводимых представлений, возникающих при разложении, а Mult_U — пространство кратности, т. е. линейное пространство без действия $\mathfrak{gl}_n$. При этом можно выбрать базис $\{e_f\}$ в этом пространстве и, положив $U^f := e_f \otimes U$, написать

$$V \otimes W = \sum_{U,f} U^f. \tag{6}$$

Проблема кратности как раз и состоит в нахождении базиса в пространстве Mult_U.

1.4. Коэффициенты Клебша — Гордана, $3j$-символы.

1.4.1. Коэффициенты Клебша — Гордана. Пусть в представлениях V, W, U в (6) выбраны базисы $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma^f\}$ соответственно. *Коэффициентами Клебша — Гордана* называют числовые коэффициенты $D^{U,\gamma,f}_{V,W;\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$, возникающие в разложении

$$u_\gamma^f = \sum_{\alpha,\beta} D^{U,\gamma,f}_{V,W;\alpha,\beta} v_\alpha \otimes w_\beta. \tag{7}$$

1.4.2. $3j$-символы. Пусть даны представления V, W, U алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Предположим, что в них выбраны базисы $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma\}$. Тогда $3j$-*символом* называется набор чисел

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^f \in \mathbb{C} \tag{8}$$

таких, что величина

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^f v_\alpha \otimes w_\beta \otimes u\gamma$$

$\mathfrak{gl}_n$-семиинвариантна, т. е. данная функция собственная для картановских операторов $E_{i,i}$ и обращается в нуль под действием корневых элементов. При этом $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами образуют линейное пространство. Индекс f перечисляет базисные $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами. При этом индекс f можно отождествлять с семиинвариантом, который выражается через данный $3j$-символ.

1.4.3. Связь с коэффициентами Клебша — Гордана. Умножая (6) на представление $\overline{U}$, контраградиентное к U, и рассматривая в $\overline{U}$ базис $\overline{u}_\gamma$, двойственный к u_γ, получаем соотношение

$$D^{U,\gamma,f}_{V,W;\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} V & W & \overline{U} \\ v_\alpha & w_\beta & \overline{u}_\gamma \end{pmatrix}^f. \tag{9}$$

Таким образом, задачи вычисления коэффициентов Клебша — Гордана и $3j$-символов в сущности эквивалентны.

Данная формула позволяет также отождествить пространства кратностей для коэффициентов Клебша — Гордана и для $3j$-символов.

1.5. Коэффициенты Рака, $6j$-символы.

1.5.1. Коэффициенты Рака. Вторая важная задача, возникающая при изучении тензорных произведений неприводимых представлений, это вычисление коэффициентов Рака. *Коэффициентами Рака* называются матричные элементы оператора, осуществляющего изоморфизм $V^1\otimes(V^2\otimes V^3)$ и $(V^1\otimes V^2)\otimes V^3$. Именно, тройное тензорное произведение в сумму неприводимых можно разложить двумя способами.

1. Первый способ. Сначала раскладываем на неприводимые $V^1 \otimes V^2$:

$$V^1 \otimes V^2 = \bigoplus_U \mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2} \otimes U, \tag{10}$$

где U — неприводимое представление, а $\mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2}$ — пространство кратности. Умножая (10) тензорно на V^3 справа, получаем

$$(V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 = \bigoplus_{U,W} \mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2} \otimes \mathrm{Mult}_W^{U,V^3} \otimes W. \tag{11}$$

2. Второй способ. Сначала раскладываем $V^2 \otimes V^3$:

$$V^2 \otimes V^3 = \bigoplus_H \mathrm{Mult}_H^{V^2,V^3} \otimes H, \tag{12}$$

и далее

$$V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3) = \bigoplus_{H,W} \mathrm{Mult}_H^{V^2,V^3} \otimes \mathrm{Mult}_W^{V^1,H} \otimes W. \tag{13}$$

Имеется изоморфизм $\Phi : (V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 \to V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3)$, который дает отображение

$$\Phi : \bigoplus_U \mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2} \otimes \mathrm{Mult}_W^{U,V^3} \to \bigoplus_H \mathrm{Mult}_H^{V^2,V^3} \otimes \mathrm{Mult}_W^{V^1,H}. \tag{14}$$

Определение 2. *Отображение Рака*[2)] — это индуцированное Φ отображение

$$\mathscr{W}\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}: \mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2}\otimes \mathrm{Mult}_W^{U,V^3}\to \mathrm{Mult}_H^{V^2,V^3}\otimes \mathrm{Mult}_W^{V^1,H}. \qquad (15)$$

После выбора базиса в пространствах кратности появляются матричные элементы данного отображения. Они называются *коэффициентами Рака*. Если f есть индекс, перечисляющий базисные векторы в пространстве кратности, то для коэффициентов Рака используется обозначение

$$\mathscr{W}\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{f_1,f_2}_{f_3,f_4}, \qquad (16)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — индексы базисных векторов в $\mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2}$, Mult_W^{U,V^3}, $\mathrm{Mult}_H^{V^2,V^3}$, $\mathrm{Mult}_W^{V^1,H}$ соответственно.

При этом удобнее работать с близкими объектами — $6j$-символами.

1.6. $6j$-Символы.

Определение 3. *$6j$-символом* называется спаривание $3j$-символов по правилу

$$\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{f_1,f_2}_{f_3,f_4} := \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_6}\begin{pmatrix} \overline{V}^1 & \overline{V}^2 & U \\ \overline{v}^1_{\alpha_1} & \overline{v}^2_{\alpha_2} & u_{\alpha_4}\end{pmatrix}^{f_1}\cdot\begin{pmatrix} \overline{U} & \overline{V}^3 & W \\ \overline{u}_{\alpha_4} & \overline{v}^3_{\alpha_3} & w_{\alpha_5}\end{pmatrix}^{f_2}$$
$$\times\begin{pmatrix} V^2 & V^3 & \overline{H} \\ v^2_{\alpha_2} & v^3_{\alpha_3} & \overline{h}_{\alpha_6}\end{pmatrix}^{f_3}\cdot\begin{pmatrix} V^1 & H & \overline{W} \\ v^1_{\alpha_1} & h_{\alpha_6} & \overline{w}_{\alpha_5}\end{pmatrix}^{f_4}\cdot\left|v^1_{\alpha_1}\right|^2\cdot\ldots\cdot|h_{\alpha_6}|^2. \qquad (17)$$

Здесь α_i — индекс, перечисляющий векторы соответствующего неприводимого представления.

Выражение следует понимать так: на $3j$-символ алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n$ действует путем действия на нижние индексы. Образуем семиинвариант из четырех $3j$-символов, спаривая индексы так, что у двух $3j$-символов спаривается только одна пара индексов.

Между коэффициентами Рака и $6j$-символами имеется следующая связь. Используем тот факт, что имеет место двойственность между пространствами $\mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2}$ и $\mathrm{Mult}_{\overline{U}}^{\overline{V}^1,\overline{V}^2}$. При этом если f_1 — индекс базисного вектора в $\mathrm{Mult}_U^{V^1,V^2}$, то $\overline{f}_1$ есть индекс двойственного базиса в $\mathrm{Mult}_{\overline{U}}^{\overline{V}^1,\overline{V}^2}$. Итак,

$$\mathscr{W}\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{\overline{f}_1,\overline{f}_2}_{f_3,f_4} = \begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{f_1,f_2}_{f_3,f_4}.$$

В дальнейшем будем иметь дело с $6j$-символами.

2. Решение проблемы кратности для $3j$-символов

В настоящем разделе проблема кратности для $3j$-символов решается в функциональной реализации. Основной результат — теорема 3, которая дает ответ

[2)] В настоящей работе, как и во многих других, отображение Рака обозначается символом $\mathscr{W}$ в честь Вигнера, которому принадлежат важные результаты, касающиеся этого отображения.

на вопрос о том, какие функции $f \in V \otimes W \otimes U$ индексируют $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами. Эта теорема есть обобщение аналогичной теоремы для $\mathfrak{gl}_3$, полученной в [5].

В отличие от случая $\mathfrak{gl}_3$ нам не удается построить независимый набор таких функций, в теореме 3 строится лишь система линейных порождающих в пространстве семиинвариантов тройного тензорного произведении. Эти порождающие и индексируют $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами.

2.1. Семиинварианты в $V \otimes W \otimes U$. Дадим описание семиинвариантов в $V \otimes W \otimes U$. Будем использовать функциональную реализацию. Тогда $V \otimes W \otimes U$ реализуется в пространстве однородных полиномов от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j (условия однородности даны ниже в предложении 3) на $GL_n \times GL_n \times GL_n$. Каждый из данных матричных элементов можно считать элементом в стандартном векторном представлении $V_0 \simeq \mathbb{C}^n$ (при этом алгебра $\mathfrak{gl}_n$ действует на нижние индексы). Такая точка зрения дает явное вложение $V \otimes W \otimes U \subset V_0^{\otimes T}$, где T достаточно велико.

Явное описание семиинвариантов в $V_0^{\otimes T}$ дается по существу первой основной теоремой теории инвариантов [33] для группы нижнеунитреугольных матриц. В наших обозначения эта теорема может быть сформулирована так.

Теорема 2. *Семиинварианты для действия $\mathfrak{gl}_n$ в пространстве полиномов от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j являются полиномами от базисных семиинвариантов, которые записываются как определители вида $\det(x^{j_1} \dots x^{j_n})$ матрицы, составленной из матричных элементов x_i^j, где x — один из символов a, b, c (возможно, разные для разных j), верхний индекс j принимает значения $j_1, \dots, j_n$, а нижний индекс i — значения $1, \dots, n$.*

Однако не все семиинварианты, описываемые в теореме 2, лежат в функциональной реализации $V \otimes W \otimes U$. Имеет место следующее необходимое условие, являющееся прямым следствие предложения 1.

Предложение 3. *Пусть старшие веса V, W, U суть $[m_1, \dots, m_n]$, $[M_1, \dots, M_n]$, $[m'_1, \dots, m'_n]$. Для того чтобы полином от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j лежал в $V \otimes W \otimes U$ должно выполняться следующее требование. У переменных a_i^j верхний индекс 1 встречается m_1 раз, верхний индекс 2 встречается m_2 раз и т. д. Аналогичные требования предъявляются к верхним индексам символов b, c.*

Заметим, что если полином удовлетворяет условию предложения 3, то к нему применимы операции наложения трех симметризаторов Юнга на верхние индексы символов a, b, c соответственно.

Наложение симметризаторов Юнга имеет своим образом представление $V \otimes W \otimes U$ (см. предложение 2), так что применение симметризатора Юнга к семиинварианту, удовлетворяющему предложению 3, дает семиинвариант в $V \otimes W \otimes U$. Опишем его явно. Для этого введем операции наложения антисимметризаторов (или скобки $(\dots)$) на нижние индексы мономов от a, b, c.

Определение 4. *Операция наложения* $(\dots)$ состоит в следующем. У монома выбирается n нижних индексов (будем говорить, что отобранные индексы находятся *внутри скобок*) и по ним выполняется антисимметризация.

Пример 2. Наложение $(\dots)$ в случае алгебры $\mathfrak{gl}_2$ на первые два нижних индекса монома $a_1^1 b_2^1 c_1^2$ выглядит так: $a_{(1}^1 b_{2)}^1 c_1^2 := a_1^1 b_2^1 c_1^2 - a_2^1 b_1^1 c_1^2$.

Из теоремы 2 с помощью наложения симметризаторов Юнга получаем такое утверждение.

Теорема 3. *Семиинварианты в $V \otimes W \otimes U$ являются линейными комбинациями семиинвариантов, конструируемых так. Берется моном от a_i^j, b_i^j, c_i^j, удовлетворяющий условиям предложения 3. Нижние индексы разбиваются на непересекающиеся группы, состоящие из n индексов.*

На его верхние индексы накладываются три соответствующих симметризатора Юнга. На каждую группу из n нижних индексов накладывается скобка $(\dots)$.

Имеет место следующее предложение, несколько ослабляющее зависимость построенного семиинварианта от выбора наложения антисимметризаторов $(\dots)$.

Предложение 4. *Функция, конструируемая в теореме 3, зависит с точностью до знака только от того, сколько при наложениях на нижние индексы скобок $(\dots)$ в каждую скобку попало символов a, b, c, но не зависит от того, как расставлены верхние индексы у этих символов на начальном шаге построения функции.*

Доказательство. Зафиксируем какой-то выбор наложения и опишем некоторые операции, меняющие наложение, но приводящие к той же самой функции. Факт существования таких операций и дает нужное утверждение.

В формулировке ниже x, y означают два разных символа из символов a, b, c, а $\bullet$ — произвольный нижний индекс.

Пусть одна из скобок $(\dots)$ накладывается на один из символов $x_\bullet^i$, другая скобка $(\dots)$ накладывается на другой символ $x_\bullet^j$. Докажем, что эти символы можно поменять местами. При этом допускается, что $i = j$.

Действительно, предположим сначала, что $i = j$. Тогда после применения симметризатора Юнга получаем выражение, которое симметрично по перестановке этих символов. Значит, если сначала переставить местами эти два символа $x_\bullet^i$, потом применить наложение скобки $(\dots)$, а затем применить симметризаторы Юнга, то получим то же самое выражение.

Предположим теперь, что $i \neq j$. Без ограничения общности можно предполагать, что эти символы стоят в одном столбце диаграммы Юнга, по которой строится симметризатор Юнга. Тогда после применения симметризатора Юнга получаем выражение, которое антисимметрично по перестановке этих символов. Значит, если сначала переставить эти символы, потом применить наложение скобки $(\dots)$, а затем симметризаторы Юнга, то получим то же самое выражение с точностью до знака.

Предложение 4 доказано.

Из предложения 1 следует, что для функции, конструируемой в теореме 3, можно ввести обозначение

$$((x^{j_1} \cdots x^{j_n}) \cdots (y^{i_1} \cdots y^{i_n})), \tag{18}$$

в котором $x, y, \dots$ — символы a, b, c (при этом символы x вида x^{j_1}, x^{j_2}, $\dots$ могут быть разными символами a, b, c). При этом верхние индексы должны удовлетворять условиям предложения 3. Скобки соответствуют тому, как накладывается антисимметризатор на нижние индексы.

Можно в принципе ввести еще более компактное, но неполное обозначение

$$(a^{i_1} \cdots a^{i_{k_1}} b^{j_1} \cdots b^{j_{k_2}} c^{l_1} \cdots c^{l_{k_3}}), \tag{19}$$

при этом потребовав, чтобы верхние индексы удовлетворяли предложению 3, а $k_1+k_2+k_3$ кратно n. Это обозначение является полным в случае $\mathfrak{gl}_3$ и именно оно используется в [5, 6].

Следствие 1. *Произвольный семиинвариант в $V\otimes W\otimes U$ является линейной комбинацией семиинвариантов вида*

$$f=\prod\frac{1}{t!}(((x^{j_1}\cdots x^{j_n})\cdots(y^{i_1}\cdots y^{i_n})))^t, \tag{20}$$

где степень t своя у каждого семиинварианта. Совокупность всех верхних индексов должна удовлетворять условиям предложения 3.

Пример 3. В случае $\mathfrak{gl}_3$ данная конструкция приводит к семиинвариантам, построенным в [5]. Например,

$$(a^1a^2b^1)=\det\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ b_1^1 & b_2^1 & b_3^1\end{pmatrix},\quad ((c^1c^2b^2)(b^1a^1a^2))=\pm\det\begin{pmatrix}a_{2,3} & a_{1,3} & a_{1,2}\\ b_{2,3} & b_{1,3} & b_{1,2}\\ c_{2,3} & c_{1,3} & c_{1,2}\end{pmatrix},$$

в [5] эти семиинварианты обозначаются просто (aab) и $(aabbcc)$.

Пример 4. В случае $\mathfrak{gl}_4$ имеются семиинварианты, не записываемые в виде определителей:

$$\begin{aligned}((a^1a^2a^3b^1)(b^2c^1c^2c^3)) &= a_{1,2,3}b_{2,1}c_{2,3,4}+a_{1,2,3}b_{4,3}c_{4,1,2}-a_{1,2,3}b_{4,2}c_{2,4,1}\\ &\quad -a_{4,1,2}b_{3,1}c_{2,3,4}+a_{4,1,2}b_{3,4}c_{1,2,3}+a_{4,1,2}b_{3,2}c_{3,4,1}\\ &\quad +a_{3,4,1}b_{2,1}c_{2,3,4}-a_{3,4,1}b_{2,4}c_{1,2,3}+a_{3,4,1}b_{2,3}c_{4,1,2}.\end{aligned} \tag{21}$$

Так как данное выражение состоит из девяти слагаемых, оно не является каким-либо определителем.

3. А-ГКЗ реализация. Переменные Z

3.1. А-ГКЗ реализация представлений. А-ГКЗ-реализация представления для $\mathfrak{gl}_3$ введена в [5] при вычислении $3j$-символов этой алгебры. Построении ее аналога для случая $\mathfrak{gl}_n$ — весьма непростая задача. Она была решена в работе [8]. Для вычисления $6j$-символов достаточно только определение этой реализации, дадим его в данном разделе.

Рассмотрим переменные A_X, занумерованные собственными подмножествами $X\subset\{1,\dots,n\}$. Требуем, чтобы A_X были антисимметричны по индексам множества X, но другим соотношениям не подчинялись. Подчеркнем, что эти переменные имеют те же индексы, что и определители (2), но в отличие от них A_X не подчиняются никаким соотношениям кроме антисимметричности.

На эти переменные алгебра действует по правилу

$$E_{i,j}A_{i_1,\dots,i_k}=\begin{cases}A_{\{i_1,\dots,i_k\}|_{j\mapsto i}}, & \text{если } j\in\{i_1,\dots,i_k\},\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \tag{22}$$

а на их произведение — по правилу Лейбница. Таким образом, алгебра полиномов $\mathbb{C}[A]$ есть представление $\mathfrak{gl}_n$.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, называемую системой А-ГКЗ, которая строится так. Пусть $I\subset\mathbb{C}[A]$ — идеал соотношений между определителями a_X. Известно, что он порождается соотношениями Плюккера. При замене

$$A_X\mapsto\frac{\partial}{\partial A_X}$$

идеал I переходит в идеал $\overline{I}\subset\mathbb{C}\big[\frac{\partial}{\partial A}\big]$ в кольце дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Система А-ГКЗ есть система уравнений в частных производных, задаваемая идеалом $\overline{I}$:

$$\forall\mathscr{O}\in\overline{I}:\mathscr{O}F(A)=0.$$

Теорема 4 (см. [8]). *Пространство полиномиальных решений системы* А-ГКЗ *образует представление* $\mathfrak{gl}_n$. *Это представление есть прямая сумма всех конечномерных неприводимых представлений, взятых с кратностью* 1.

Представление старшего веса $[m_1,\dots,m_n]$ *есть пространство полиномиальных решений степени* m_1-m_2 *по* A_X *с* $|X|=1$, *степени* m_2-m_3 *по* A_X *с* $|X|=2$ *и т. д.*

Эта теорема дает способ реализации конечномерных неприводимых представлений, полученная реализация и называется А-ГКЗ реализацией.

Заметим, что замена

$$A_X\mapsto a_X$$

отображает изоморфно А-ГКЗ реализацию на реализацию Желобенко из теоремы 1.

Определим действие

$$f(A)\curvearrowright g(A):=f\left(\frac{d}{dA}\right)g(A),\tag{23}$$

тогда на пространстве полиномов от переменных A_X есть инвариантное скалярное произведение

$$\langle f(A),g(A)\rangle=f(A)\curvearrowright g(A)|_{A=0}.\tag{24}$$

В силу симметрии скалярного произведения можно также написать $\langle f(A),g(A)\rangle$ $=g(A)\curvearrowright f(A)|_{A=0}$.

Заметим, что если представление V реализовано в пространстве полиномов от переменных A_X (т. е. V совпадает с каким-то множеством полиномов $\{h(A)\}$), то контраградиентное представление может быть реализовано[3)] в пространстве полиномов от операторов $\frac{\partial}{\partial A_X}$. Действие $\mathfrak{gl}_n$ на дифференциальные операторы порождает действие на пространстве функций от переменных A_X. Таким образом, $\overline{V}=\big\{h\big(\frac{\partial}{\partial A_X}\big):h(A)\in V\big\}$. При этом спаривание (которое также обозначим через $\langle .,.\rangle$) задается формулой типа (24):

$$\left\langle h_1(A),h_2\left(\frac{\partial}{\partial A_X}\right)\right\rangle=h_2\left(\frac{\partial}{\partial A_X}\right)h_1(A)\bigg|_{A=0}.\tag{25}$$

3.2. Семиинварианты в А-ГКЗ реализации. Пусть $f(a,b,c)$ — построенный семиинвариант в $V\otimes W\otimes U$. В А-ГКЗ реализации можно рассмотреть многочлены $f(A,B,C)$, где символы a,b,c заменяются на A,B,C. Однако данные многочлены скорее всего не будут лежать в $V\otimes W\otimes U$ в данной реализации.

Но функциональная и А-ГКЗ реализации суть две реализации одного и того же представления (в интересующем нас случае — тройного тензорного произведения неприводимых представлений). Пусть векторам $f(a,b,c)$ функциональной реализации соответствуют векторы $F(A,B,C)$ в А-ГКЗ реализации. Так

3) По крайней мере с точностью до умножения на представления старшего веса $[m,\dots,m]$.

как А-ГКЗ реализация переходит в функциональную при наложении соотношений Плюккера, будет верно соотношение

$$F(A,B,C) = f(A,B,C) + \sum_{\beta} \mathrm{pl}_{\beta}^{A} f_{\beta}^{1} + \mathrm{pl}_{\beta}^{B} f_{\beta}^{2} + \mathrm{pl}_{\beta}^{C} f_{\beta}^{3}, \tag{26}$$

где pl_{β}^{A}, pl_{β}^{B}, pl_{β}^{C} — базисные соотношения Плюккера для переменных A_X, B_X, C_X, а f_{β}^{1}, f_{β}^{2}, f_{β}^{3} — некоторые многочлены от переменных A, B, C.

Из этого можно сделать такое наблюдение:

$$\langle F(A,B,C), F_{\mu}(A)F_{\nu}(B)F_{\nu}(C)\rangle = \langle f(A,B,C), F_{\mu}(A)F_{\nu}(B)F_{\nu}(C)\rangle. \tag{27}$$

где $F_{\mu}(A)$, $F_{\nu}(B)$, $F_{\nu}(C)$ являются решениями системы А-ГКЗ.

3.3. Переменные Z, числа z_{α}. Рассмотрим семиинвариант (18) и запишем его в виде функции от определителей

$$\sum_{\alpha} z_{\alpha} a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}, \tag{28}$$

где α — некоторый индекс, перечисляющий слагаемые при явной записи (20), а z_{α} — числовой коэффициент. При этом $a^{p_{\alpha}}, \ldots$ понимается в смысле мультииндексного обозначения, т. е. $a^{p_{\alpha}} = \prod_X a_X^{p_{\alpha,X}}$.

Введем переменные, соответствующие отдельным слагаемым в получившейся сумме. Для них есть естественное обозначение $Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}]$. Совокупность построенных переменных (для всех возможных семиинвариантов (18)) обозначим через Z:

$$Z = \{Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}], \ldots\}. \tag{29}$$

Пример 5. Если рассматривать функцию f вида (21), то набор переменных Z имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Z = \{&[a_{1,2,3}b_{2,1}c_{2,3,4}], [a_{1,2,3}b_{4,3}c_{4,1,2}], [a_{1,2,3}b_{4,2}c_{2,4,1}], [a_{4,1,2}b_{3,1}c_{2,3,4}],\\ &[a_{4,1,2}b_{3,4}c_{1,2,3}], [a_{4,1,2}b_{3,2}c_{3,4,1}], [a_{3,4,1}b_{2,1}c_{2,3,4}],\\ &[a_{3,4,1}b_{2,4}c_{1,2,3}], [a_{3,4,1}b_{2,3}c_{4,1,2}]\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты z_{α} равны числам ± 1, стоящим перед соответствующими слагаемыми в (21).

Заметим, что имеется естественное отображение

$$Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}] \mapsto z_{\alpha} \in \mathbb{C}. \tag{30}$$

Можно считать, что f вида (20) есть полином от переменных из набора Z.

Определение 5. Назовем *носителем функции, разложенной в степенной ряд*, множество показателей, входящих в разложение мономов. Обозначать носитель будем через $\operatorname{supp} f$.

Так как f имеет вид (20), справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для носителя функции f как функции от переменных Z имеет место равенство*

$$\operatorname{supp} f = (\kappa + B) \cap (\textit{неотрицательный октант}) \tag{31}$$

для некоторого постоянного вектора $\varkappa$ и некоторой решетки B.

Доказательство. Сперва дадим конструкцию решетки B. Для этого возьмем отдельный сомножитель вида (18) в (20). При определении этого сомножителя фиксируется расстановка скобок $(\dots)$, задающих наложение антисимметризаторов на нижние индексы. В нижние индексы, входящие в одну скобку, можно произвольно подставить числа $1,\dots,n$. При фиксации подстановки в каждую из скобок получаем фактически переменную Z_α. С каждой такой переменной связан единичный вектор e_{Z_α} в пространстве показателей мономов от переменных Z. Возьмем векторы $e_{Z_\alpha}-e_{Z_\beta}$ для всех возможных пар переменных Z_α, Z_β, возникающих из одного сомножителя вида (18). Возьмем так построенные векторы по всем возможным сомножителям вида (18). Решетка B порождается всеми полученными так разностями.

Вектор $\varkappa$ определяется как показатель монома от переменных Z, который получается, если во всех множителях (18) зафиксировать в каждой из скобок определенную расстановку $1,\dots,n$. Тогда каждый множитель (18) превращается в произведение переменных z_α и $\varkappa$ — его вектор показателей.

По построению $\operatorname{supp} f\subset(\varkappa+B)\cap$ (неотрицательный октант). Остается доказать совпадение этих множеств.

По построению векторы $b\in B$ — это сдвиги вектора показателей при изменении расстановки $1,\dots,n$ внутри скобок $(\dots)$ при построении множителя вида (18). Но $(\dots)$ — антисимметризация по *всем* возможным расстановкам $1,\dots,n$. Отсюда следует, что произвольные сдвиги из начального вектора, если только эти сдвиги представляют собой векторы с неотрицательными координатами, суть векторы показателей из $\operatorname{supp} f$. Лемма доказана.

Замечание 1. Решетка B в (31) фактически определяется только набором переменных Z. А по функции f строится начальный вектор $\varkappa$ в (31).

Заметим, что имеется отображение

$$[a^{p_\alpha}b^{q_\alpha}c^{r_\alpha}]\mapsto A^{p_\alpha}B^{q_\alpha}C^{r_\alpha}$$

из пространства полиномов от переменных Z в пространство полиномов от переменных A, B, C. Обозначим через pr_A, pr_B, pr_C получающееся отображение из пространства показателей полиномов от переменных Z в пространства показателей полиномов от переменных A, B, C соответственно.

4. $6j$-Символы

Вычислим произвольный $6j$-символ для алгебры для $\mathfrak{gl}_n$. Будем следовать схеме, по которой $6j$-символы для алгебры $\mathfrak{gl}_3$ были вычислены в [6]. Наши рассуждения дословно повторяют рассуждения из этой работы до момента построения функции (40). Однако далее, в формулировке основной теоремы 6, есть существенное отличие от аналогичной теоремы в [6]. В [6] при явной записи базисных семиинвариантов в виде многочленов от определителей коэффициенты при мономах были ±1. Соответственно в [6] в функцию (40) в теореме, аналогичной теореме 6, подставляются ±1. Для семиинвариантов же, рассматриваемых в настоящей работе, эти коэффициенты могут принимать и другие значения z_α. Соответственно в функцию (40) в теореме 6 подставляются эти другие значения. Это приводит к некоторому отличию итоговой формулы для $6j$-символа, полученной в настоящей работе, от аналогичной формулы в [6] для случая $\mathfrak{gl}_3$.

4.1. Выражение через спаривание.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}_{f_3,f_4}^{f_1,f_2} = f_1\left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4\right) f_2\left(\frac{\partial}{\partial A^4}, \frac{\partial}{\partial A^3}, A^5\right) \times f_3\left(\frac{\partial}{\partial A^2}, A^3, \frac{\partial}{\partial A^6}\right) f_4\left(A^1, A^6, \frac{\partial}{\partial A^5}\right)\bigg|_{A^1=\dots=A^6=0}. \quad (32)$$

Здесь A^i, $i = 1, \dots, 6$, — это шесть экземпляров наборов независимых переменных A^i_X, занумерованных собственными подмножествами $X \subset \{1, \dots, n\}$, антисимметричными по перестановкам X.

Доказательство. Воспользуемся формулой (17). Нам необходимо вычислить $3j$-символ для контраградиентного представления и двойственного базиса в нем. Реализуем контраградиентное представление так, как это описано в конце п. 3.1. Возьмем некоторый ортогональный базис $F_{\alpha_i}(A^i)$. Тогда базис, двойственный к $F_{\alpha_i}(A^i)$, есть $\frac{1}{|F_{\alpha_i}|^2} F_{\alpha_i}\big(\frac{\partial}{\partial A^i}\big)$.

Заметим, что $3j$-символ вида

$$\begin{pmatrix} \overline{V}^1 & \overline{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{pmatrix}^f$$

может быть вычислен так:

$$\begin{pmatrix} \overline{V}^1 & \overline{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{pmatrix}^f = \frac{\big\langle f\big(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4\big), F_{\alpha_1}\big(\frac{\partial}{\partial A^1}\big) F_{\alpha_2}\big(\frac{\partial}{\partial A^2}\big) F_{\alpha_4}(A^4)\big\rangle}{\big|F_{\alpha_1}\big(\frac{\partial}{\partial A^1}\big)\big|^2 \big|F_{\alpha_2}\big(\frac{\partial}{\partial A^2}\big)\big|^2 |F_{\alpha_4}(A^4)|^2}. \quad (33)$$

Скалярное произведение в случае, когда представление реализовано в пространстве дифференциальных операторов, вычисляется по формуле, аналогичной (24). Имеем

$$\left\langle f\left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4\right), F_{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial A^1}\right) F_{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial A^2}\right) F_{\alpha_4}(A^4)\right\rangle = \langle f(A^1, A^2, A^4), F_{\alpha_1}(A^1) F_{\alpha_2}(A^2) F_{\alpha_4}(A^4)\rangle,$$

$$|F_{\alpha_1}(A^1)|^2 = \left|F_{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial A^1}\right)\right|^2, \dots . \quad (34)$$

Базисы $F_{\alpha_1}(A^1)$ и $F_{\alpha_1}\big(\frac{\partial}{\partial A^1}\big)$ и т. д. не двойственны. Базис, двойственный к $F_{\alpha_1}(A^1)$, есть $\frac{1}{|F_{\alpha_1}|^2} F_{\alpha_1}\big(\frac{\partial}{\partial A^1}\big)$, так что $6j$-символ выражается через $3j$-символы (33) следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}_{f_3,f_4}^{f_1,f_2} := \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_6} \begin{pmatrix} \overline{V}^1 & \overline{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{pmatrix}^{f_1}$$
$$\times \begin{pmatrix} \overline{U} & \overline{V}^3 & W \\ F_{\alpha_4}(\frac{\partial}{\partial A^4}) & F_{\alpha_3}(\frac{\partial}{\partial A^3}) & F_{\alpha_4}(A^5) \end{pmatrix}^{f_2} \cdot \begin{pmatrix} V^2 & V^3 & \overline{H} \\ F_{\alpha_2}(A^2) & F_{\alpha_3}(A^3) & F_{\alpha_6}(\frac{\partial}{\partial A^6}) \end{pmatrix}^{f_3}$$
$$\times \begin{pmatrix} V^1 & H & \overline{W} \\ F_{\alpha_1}(A^1) & F_{\alpha_6}(A^6) & F_{\alpha_5}(\frac{\partial}{\partial A^5}) \end{pmatrix}^{f_4} \cdot |F_{\alpha_1}|^2 \cdot \ldots \cdot |F_{\alpha_6}|^2. \quad (35)$$

Подставим выражения (33) в (35). Рассмотрим (34). В то же время выражения $|F_{\alpha_i}|^2$, возникающие на конце (17), записываются как $F_{\alpha_i}\big(\frac{\partial}{\partial A^i}\big)F_{\alpha_i}(A^i)|_{A=0}$. Получаем

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix} \text{B}\; V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{f_1,f_2}_{f_3,f_4}\\ &\qquad = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_6} \frac{\langle f_1, F_{\alpha_1}F_{\alpha_2}F_{\alpha_4}\rangle}{|F_{\alpha_1}|^2|F_{\alpha_2}|^2|F_{\alpha_4}|^2} F_{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial A^1}\right) F_{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial A^2}\right) F_{\alpha^4}(A^4)\\ &\qquad \times \frac{\langle f_2, F_{\alpha_4}F_{\alpha_3}F_{\alpha_5}\rangle}{|F_{\alpha_4}|^2|F_{\alpha_3}|^2|F_{\alpha_5}|^2} F_{\alpha_4}\left(\frac{\partial}{\partial A^4}\right) F_{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial A^3}\right) F_{\alpha_5}(A^5)\dots\Big|_{A_1=\dots=A_6=0}.\end{aligned}$$

Теперь напишем

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4\right) = \sum \frac{\langle f_1, F_{\alpha_1}F_{\alpha_2}F_{\alpha_4}\rangle}{|F_{\alpha_1}|^2|F_{\alpha_2}|^2|F_{\alpha_4}|^2} F_{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial A^1}\right) F_{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial A^2}\right) F_{\alpha^4}(A^4),$$

и аналогичное выражение имеется для $f_2\big(\frac{\partial}{\partial A^4}, \frac{\partial}{\partial A^5}, A^5\big)$, $f_3\big(\frac{\partial}{\partial A^2}, A^3, \frac{\partial}{\partial A^6}\big)$, $f_4(A^1, A^6, \frac{\partial}{\partial A^5})$.

Используя, что $\big\langle F_{\alpha_i}(A^i), F_{\alpha'_i}\big(\frac{\partial}{\partial A^i}\big)\big\rangle = |F_{\alpha_i}|^2$, если $\alpha_i = \alpha'_i$, и 0 иначе, получаем утверждение леммы. $\square$

4.2. Правила отбора, решетка D**.** В формуле (32) для $6j$-символа участвуют функции f_1, f_2, f_3, f_4. В данном разделе в каждое f_i вместо дифференциальных операторов подставляем соответствующую переменную. Далее функции f_i можно рассматривать двумя способами.

Во-первых, в п. 3.3 был введен набор переменных Z и функция f вида (20) была рассмотрена как функция этих переменных. Будем считать, что каждая функция f_i зависит от своего набора переменных $Z^i = \{Z^i_\alpha\}$, $i = 1,\dots,4$. В этом случае носитель f_i лежит в некотором пространстве $\mathbb{Z}^M$ (где M — число переменных в наборе Z^i).

Во вторых, f_i можно рассмотреть как функцию от переменных A^j (набор индексов j переменных A, имеющих отношение к f_i, определяется по формуле (32)). Необходимо иногда различать одинаковые переменные A^j, входящие в разные f_i, так что введем обозначение $A^j_{X,i}$ для переменной A^j_X, входящей в f_i. При таком подходе носитель f_i лежит в некотором пространстве $\mathbb{Z}^m$ (при этом $m = 3(2^n - 2)$). Также имеется пространство $\bigoplus_{i=1}^{4}\mathbb{Z}^m$ показателей мономов уже от всех (а не только участвующих в определенном f_i) переменных $A^j_{X,i}$. В $\bigoplus_{i=1}^{4}\mathbb{Z}^m$ естественно ввести базисные векторы $e^{A^j_{X,i}}$.

Имеются порожденные естественными подстановками переменных A^j вместо Z^i проекции $\mathrm{pr}^i : \mathbb{Z}^M \to \mathbb{Z}^m$ из пространства показателей мономов от переменных Z^i в пространство показателей мономов от соответствующих переменных $A^j_{X,i}$. Кроме того, пусть

$$\mathrm{pr} := \bigoplus_{i=1}^{4}\mathrm{pr}^i : \bigoplus^{4}\mathbb{Z}^M \to \bigoplus^{4}\mathbb{Z}^m. \tag{36}$$

Ранее было замечено, что если рассматривать f_i как функцию от переменных Z^i, то для ее носителя $\mathrm{supp}_{Z^i} f_i \subset \mathbb{Z}^M$ имеет место формула

$$\mathrm{supp}_{Z^i} f_i = \mathbb{Z}^M_{\geq 0} \cap (\kappa_i + B). \tag{37}$$

Введем обозначение

$$H := \mathrm{supp}_{Z^1} f_1 \oplus \mathrm{supp}_{Z^2} f_2 \oplus \mathrm{supp}_{Z^3} f_3 \oplus \mathrm{supp}_{Z^4} f_4.$$

Тогда H есть пересечение неотрицательного октанта и сдвинутой решетки $(\kappa_1 \oplus \kappa_2 \oplus \kappa_3 \oplus \kappa_4) + B \oplus B \oplus B \oplus B$. Также видно, что H есть носитель функции $f_1 \cdot \ldots \cdot f_4$ как функции от $Z^1, \ldots, Z^4$.

Введем решетку D.

Определение 6. В соответствии с аргументами, подставляемыми[4)] в f_i в (32), определим подрешетку $D \subset \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}^m$ как решетку, порожденную для всех возможных $X \subset \{1, \ldots, n\}$ векторами, которые получаются как суммы единичных векторов $e^{A^j_{X,i}}$, отвечающих двум координатам с одинаковыми X, одинаковым переменным A^j_X, но разным i.

Таким образом, решетка D порождается векторами вида

$$e^{A^1_{X,1}} + e^{A^1_{X,4}}, \quad e^{A^2_{X,1}} + e^{A^2_{X,3}}, \quad e^{A^3_{X,2}} + e^{A^3_{X,4}},$$

$$e^{A^4_{X,1}} + e^{A^4_{X,2}}, \quad e^{A^5_{X,2}} + e^{A^5_{X,4}}, \quad e^{A^6_{X,3}} + e^{A^6_{X,4}}.$$

Пусть имеется моном, получающийся при разложении (32). Он дает ненулевой вклад, если в нем для каждой переменной A^j_X, $j = 1, \ldots, 6$, порядок дифференцирования по A^j_X совпадает со степенью переменной A^j_X. Условие того, что такие мономы существует, переформулированное в терминах носителей функций от переменных $Z^1, \ldots, Z^4$, дает следующий результат.

Теорема 5. *Для того чтобы 6j-символ* (32) *был ненулевой, необходимо, чтобы*

$$H \cap \mathrm{pr}^{-1}(D) \neq \varnothing,$$

4.3. Формула для 6j-символа. Приступим к вычислению выражения (32). Вычисление можно описать так.

Сначала рассматриваем $f_1 \cdot \ldots \cdot f_4$ как функцию от набора переменных $Z^1, \ldots, Z^4$. Раскладываем $f_1 \cdot \ldots \cdot f_4$ в сумму произведений мономов от данных переменных. Заметим, что теперь имеется набор коэффициентов z^i_α, $i = 1, \ldots, 4$. Оставляем лишь слагаемые, лежащие в $H \cap \mathrm{pr}^{-1}(D) \neq \varnothing$. Далее с каждой из переменных из набора $Z^1, \ldots, Z^4$ проделываем замену на переменные A^j_X или $\frac{\partial}{\partial A^j_X}$ в соответствии с тем, переменная или дифференциальный оператор участвует в f_i в (32). Перемножаем их так, как если бы они коммутировали. После в получившемся мономе от A^j_X или $\frac{\partial}{\partial A^l_X}$ применяем дифференциальные операторы к переменным и подставляем вместо переменных нуль.

Если сосредоточить внимание, например, на возникающей в мономе переменной A^1_1 (т. е. $X = \{1\}$), то наши действия выглядят так. Такой символ встречается в обозначении переменных, входящих в наборы Z^1 и Z^4. Берем моном, получающийся при разложении $f_1 \cdot \ldots \cdot f_4$. Пусть его носитель лежит в $H \cap \mathrm{pr}^{-1}(D)$. Запишем его явно вместе с коэффициентом при этом мономе. Этот коэффициент есть произведение обратных величин к факториалам степеней, происходящих из выражения (20), вместе с числовым коэффициентом типа

[4)] Напомним, что в данном разделе дополнительно в каждое f_i вместо дифференциальных операторов подставляется соответствующая переменная.

z_α, стоящим при каждой из переменных их наборов $Z^1, \dots, Z^4$ и происходящим из разложения (24) отдельных сомножителей в (20). В итоге моном вместе со своим числовым множителем выглядит так:

$$\underbrace{\frac{(z^1_{\alpha_1}[A^1_1\dots])^{\beta_1}}{\beta_1!}\frac{(z^1_{\alpha_2}[A^1_1\dots])^{\beta_2}}{\beta_2!}\dots}_{\text{из } f_1}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{(z^4_{\delta_1}[A^1_1\dots])^{\gamma_1}}{\gamma_1!}\frac{(z^4_{\delta_2}[A^1_1\dots])^{\gamma_2}}{\gamma_2!}\dots}_{\text{из } f_4}. \tag{38}$$

Далее вычисляем сумму показателей переменных, в обозначении которых есть A^1_1. Для множителей, происходящих из f_1, эта сумма равна $\beta_1+\beta_2+\dots$, а для множителей, происходящих из f_4, эта сумма равна $\gamma_1+\gamma_2+\dots$. Тот факт, что носители лежат в $H\cap\mathrm{pr}^{-1}(D)$, влечет, что $\beta_1+\beta_2+\dots=\gamma_1+\gamma_2+\dots$. При переходе к A^j_X или $\frac{\partial}{\partial A^j_X}$ в множителях, происходящих из f_1, подставляется $\frac{\partial}{\partial A^1_1}$, а в множителях, происходящих из f_4, подставляется A^1_1. После применения дифференциального оператора к переменной A^1_1 и подстановки вместо A^1_1 нуля в (38) фактически происходит удаление всех символов A^1_1 и дописывается сверху числовой множитель $(\beta_1+\beta_2+\dots)!=\sqrt{(\beta_1+\beta_2+\dots)!(\gamma_1+\gamma_2+\dots)!}$.

Заметим, что имеющийся множитель $\frac{1}{\beta_1!\beta_2!\dots\gamma_1!\gamma_2!\dots}$ есть факториал степени (в мультииндексном смысле) рассматриваемого монома как функции от переменных $Z^1,\dots,Z^4$. Возникающий множитель $\sqrt{(\beta_1+\beta_2+\dots)!(\gamma_1+\gamma_2+\dots)!}$ есть корень квадратный факториала степени данного монома от переменных $A^1_{1,1}$ и $A^1_{1,4}$.

Итак, после выполнения аналогичных действий со всеми переменными A^j_X моном (38) превращается в числовую дробь. В ее знаменателе стоит факториал (в мультииндексном смысле) степени монома как монома от переменных $Z^1,\dots,Z^4$, а вверху — корень из факториала степени (опять в мультииндексном смысле) степени монома как монома от переменных A^j_X. Также полученное выражение должно быть умножено на $(z^1_{\alpha_1})^{\beta_1}\cdot(z^1_{\alpha_2})^{\beta_2}\cdot\dots$.

Приведем теперь формулу для $6j$-символа. Множество $H\cap\mathrm{pr}^{-1}(D)$ является сдвинутой решеткой в пространстве показателей монома от переменных $Z^1,\dots,Z^4$. Следовательно, для некоторого вектора $\varkappa$ и решетки $L\subset(\mathbb{Z}^M)^{\oplus4}$ можно записать

$$H\cap\mathrm{pr}^{-1}(D)=\varkappa+L\subset(\mathbb{Z}^M)^{\oplus4}. \tag{39}$$

Имеется проекция pr, определяемая формулой (36). Свяжем со сдвинутой решеткой $\varkappa+L$ ряд гипергеометрического типа (на самом деле являющийся конечной суммой) от переменных $\mathscr{Z}=\{Z^1,\dots,Z^4\}$, определяемый формулой

$$\mathscr{J}_\gamma(\mathscr{Z};L)=\sum_{x\in\varkappa+L}\frac{\sqrt{\Gamma(\mathrm{pr}(x)+1)}\mathscr{Z}^x}{\Gamma(x+1)}. \tag{40}$$

Теорема 6. *$6j$-Символ (32) равен $\mathscr{J}_\gamma(z;L)$, где вместо переменной из набора $\mathscr{Z}=\{Z^1,\dots,Z^4\}$ подставляются числа z_α по правилу (30).*

4.4. Пример вычисления. Рассмотрим алгебры $\mathfrak{gl}_4$. Чтобы задать $6j$-символ, зафиксируем сначала семиинварианты

$$f_1=(aabc),\quad f_2=(abbc),\quad f_3=(abbc),\quad f_4=(aabc).$$

В выражении (32) для $6j$-символа надо подставить вместо a_X, b_X, c_X переменные A^j_X или операторы $\frac{\partial}{\partial A^j_X}$, $j=1,\dots,6$. Тогда из (32) видно, что при данных

f_i можно получить ненулевой $6j$-символ лишь при условии, что старшие веса представлений таковы:

$$V^1=[1,1,0,0],\quad V^2=[1,0,0,0],\quad V^3=[1,1,0,0],$$
$$U=[1,0,0,0],\quad W=[1,0,0,0],\quad H=[1,0,0,0].$$

Итак, $6j$-символ задан, найдем его значение.

Заметим, что можно уменьшить наборы переменных $Z^1,\dots,Z^4$, оставив в них только переменные, возникающие при разложении данных нам f_i.

Опишем сдвинутую решетку $H\cap \mathrm{pr}^{-1}(D)$. Возьмем формулу (32) и рассмотрим сомножители $f_1,\dots,f_4$, стоящие справа. Для удобства так же, как и в начале п. 4.2, в f_i вместо дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial A^j}$ подставим соответствующие переменные A^j (в отличие от п. 4.2 не вводим дополнительный индекс i).

Сдвинутую решетку H можно рассматривать как множество показателей мономов произведения $f_1\cdot\ldots\cdot f_4$, где каждый сомножитель рассматривается как функция от переменных Z^1, Z^2, Z^3, Z^4. Моном произведения $f_1\cdot\ldots\cdot f_4$ есть набор из четырех мономов, взятых из $f_1,\dots,f_4$ соответственно.

При взятии пересечения H с $\mathrm{pr}^{-1}(D)$ оставляем лишь те четверки показателей мономов от переменных $Z^1,\dots,Z^4$, которые обладают следующим свойством: при переходе от переменных $Z^1,\dots,Z^4$ к переменным A^j_X получаем четверку показателей мономов от переменных A^j_X таких, что (ср. с (32)):

1) A^1_X входит в одинаковой степени в первый и четвертый мономы,
2) A^2_X входит в одинаковой степени в первый и третий мономы,
3) A^3_X входит в одинаковой степени во второй и третий мономы,
4) A^4_X входит в одинаковой степени в первый и второй мономы,
5) A^5_X входит в одинаковой степени во второй и четвертый мономы,
6) A^6_X входит в одинаковой степени в третий и четвертый мономы.

Несложно проверить, что эти условия влекут, что из $f_1,\dots,f_4$ нужно брать четверки мономов[5)] вида

$$\bigl[A^1_{i,j}A^2_kA^4_l\bigr],\quad \bigl[A^4_lA^3_{i,j}A^5_k\bigr],\quad \bigl[A^2_kA^3_{i,j}A^6_l\bigr],\quad \bigl[A^1_{i,j}A^6_lA^5_k\bigr],\tag{41}$$

где (i,j,k,l) — перестановка $1,\dots,4$. Таких четверок имеется $4!$ штук. Если перестановка $\sigma=(i,j,k,l)$ имеет знак $(-1)^\sigma$, то выписанные мономы входят в $f_1,\dots,f_4$ с коэффициентами

$$(-1)^\sigma,\ -(-1)^\sigma,\ (-1)^\sigma,\ -(-1)^\sigma.\tag{42}$$

Эти числа суть не что иное как подставляемые в функцию в теореме 6 числа z_α.

Приступим к вычислению $\mathscr{J}_\gamma(z;L)$. Согласно предыдущим рассуждениям в (40) сумма ведется по произведениям четверок мономов вида (41). Найдем коэффициент при таком произведении. При рассмотрении $f_1,\dots,f_4$ как функций от переменных Z^1, Z^2, Z^3, Z^4 мономы (41) входят с показателем 1, так что для вектора показателей x данного монома как функции от переменных $Z^1,\dots,Z^4$ имеем $\Gamma(x+1)=1$.

После применения проекции pr получаем моном от переменных $A^j_{X,i}$, в который все переменные входят с показателем 1, так что $\Gamma(\mathrm{pr}(x)+1)=1$.

Тем самым числовой коэффициент $\frac{\sqrt{\Gamma(\mathrm{pr}(x)+1)}}{\Gamma(x+1)}$ при каждом произведении мономов (41) равен 1. Далее вместо мономов (41) подставляем (42), в результате получаем 1. Таким образом, получаем сумму единиц в количестве $4!$.

Итак, рассматриваемый $6j$-символ равен $4!$.

[5)] Это четверка мономов от переменных из наборов $Z^1,\dots,Z^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kumar S.* Tensor product decomposition // Proc. Intern. Congress of Mathematicians. Hyderabad. India, 2010.
2. *Knutson A., Tao T.* The honeycomb model of $GL_n(C)$ tensor products I: Proof of the saturation conjecture // J. Am. Math. Soc. 1999. V. 12, N 4. P. 1055–1090.
3. *Manon C., Zhou Z.* Semigroups of $sl_2(C)$ tensor product invariants // J. Algebra. 2014. V. 400. P. 94–104.
4. *Кириллов А. Н., Решетихин Н. Ю.* Формулы для кратностей вхождения неприводимых компонент в тензорное произведение представлений простых алгебр Ли // Зап. науч. сем. ПОМИ. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 13. СПб.: Наука, 1993. Т. 205. С. 30–37.
5. *Артамонов Д. В.* Формулы вычисления $3j$-символов для представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ в базисе Гельфанда — Цетлина // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 717–735.
6. *Артамонов Д. В.* Классические $6j$-символы конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{gl}_3$ // Теорет. и мат. физика. 2023. Т. 216, № 1. С. 3–19.
7. *Артамонов Д. В.* Коэффициенты Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ и гипергеометрические функции // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 1. С. 1–29.
8. *Artamonov D. V.* A functional realization of the Gelfand–Tsetlin base // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. V. 87, N 6. P. 3–34.
9. *Слепцов А. В.* Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых $6j$-символов: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М.: Институт теоретической и экспериментальной физики имени А. И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», 2022.
10. *Butler P., Wybourne B.* Calculation of j and jm symbols for arbitrary compact groups. I. Methodology // Intern. J. Quantum Chemistry. 1976. V. 10, N 4. P. 581–598.
11. *Hecht K.* A simple class of $U(N)$ Racah coefficients and their application // Commun. Math. Phys. 1975. V. 41, N 2. P. 135–156.
12. *Gustafson R.* A Whipple′s transformation for hypergeometric series in $U(N)$ and multivariable hypergeometric orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 18, N 2. P. 495–530.
13. *Wong M.* On the multiplicity-free Wigner and Racah coefficients of $U(n)$ // J. Math. Phys. 1979. V. 20, N 12. P. 2391–2397.
14. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* Canonical unit adjoint tensor operators in $U(n)$ // J. Math. Phys. 1970. V. 11, N 8. P. 2368–2411.
15. *Biedenharn L. C., Louck J. D., Chacon E., Ciftan M.* On the structure of the canonical tensor operators in the unitary groups. I. An extension of the pattern calculus rules and the canonical splitting in $U(3)$ // J. Math. Phys. 1972. V. 13, N 12. P. 1957–1984.
16. *Steinberg R.* A general Clebsch–Gordan theorem // Bull. Am. Math. Soc. 1961. V. 67, N 4. P. 406–407.
17. *Koike K.* On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters // Adv. Math. 1989. V. 74, N 1. P. 5–86.
18. *King R. C.* Branching rules for classical Lie groups using tensor and spinor methods // J. Physics A: Mathematical and General. 1975. V. 8, N 4. P. 429–449.
19. *Girardi G., Sciarrino A., Sorba P.* Kronecker products for $SO(2p)$ representations // J. Physics A: Mathematical and General. 1982. V. 15, N 4. P. 1119.
20. *Girardi G., Sciarrino A., Sorba P.* Kronecker product of $Sp(2n)$ representations using generalised Young tableaux // J. Physics A: Mathematical and General. 1983. V. 16, N 12. P. 2609.
21. *Alisauskas S.* Integrals involving triplets of Jacobi and Gegenbauer polynomials and some $3j$-symbols of $SO(n)$, $SU(n)$ and $Sp(4)$. 2005. 28 p. arXiv math-ph/0509035.
22. *Klimyk A. U.* Infinitesimal operators for representations of complex Lie groups and Clebsch–Gordan coefficients for compact groups // J. Physics A: Mathematical and General. 1982. V. 15, N 10. P. 3009.
23. *Alisauskas S.* $6j$-symbols for symmetric representations of $SO(n)$ as the double series // J. Physics A: Mathematical and General. 2002. V. 35, N 48. P. 10229.
24. *Alisauskas S.* Some coupling and recoupling coefficients for symmetric representations of SO_n // J. Physics A: Mathematical and General. 1987. V. 20, N 1. P. 35.
25. *Alisauskas S.* Coupling coefficients of $SO(n)$ and integrals over triplets of Jacobi and Gegenbauer polynomials. 2002. 26 p. arXiv math-ph/0509035.
26. *Junker G.* Explicit evaluation of coupling coefficients for the most degenerate representations of $SO(n)$ // J. Physics A: Mathematical and General. 1993. V. 26, N 7. P. 1649.

27. *Hormess M., Junker G.* More on coupling coefficients for the most degenerate representations of $SO(n)$ // J. Physics A: Mathematical and General. 1999. V. 32, N 23. P. 4249.
28. *Cvitanovic P., Kennedy A. D.* Spinors in negative dimensions // Physica Scripta. 1982. V. 26, N 1. P. 5–14.
29. *Cerkaski M.* On a class of $6j$ coefficients with one multiplicity index for groups $SP(2N)$, $SO(2N)$, and $SO(2N+1)$ // J. Math. Phys. 1987. V. 28, N 3. P. 612–617.
30. *Judd B. R., Lister G. M. S., Suskin M. A.* Some $6j$ symbols for symplectic and orthogonal groups by Cerkaski's method // J. Physics A: Mathematical and General. 1990. V. 23, N 24. P. 5707.
31. *Feger R., Kephart T. W.* LieART–A Mathematica application for Lie algebras and representation theory // Comput. Physics Commun. 2015. V. 192, N 24. P. 166–195.
32. *Желобенко Д. П.* Компактные групп Ли и их представления. М.: МЦНМО, 2007.
33. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.

Поступила в редакцию 28 декабря 2023 г.
После доработки 15 апреля 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Артамонов Дмитрий Вячеславович (ORCID 0000-0001-5921-1513)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
3-й новый учебный корпус, экономический факультет, кафедра ММАЭ,
Ленинские горы, Москва 119991, ГСП-1
artamonovdv@my.msu.ru