Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.54.03+515.122.4+515.123.4+512.562

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ ОЛИГОМОРФНОСТИ ГРУПП

Б. В. Сорин

Аннотация. При действии группы на множестве топология множества определяет допустимые групповые топологии на группе, в которых группа становится топологической, а действие непрерывным (и даже позволяет получать равномерности на множестве, на пополнения по которым действие непрерывно продолжается). Данный подход, использующий дискретную топологию на множестве и перестановочную топологию на группе, позволяет найти связи между олигоморфностью действия группы на множестве, вполне ограниченностью максимальной эквиравномерности на множестве и Roelcke-предкомпактностью группы.

Если множество простое линейно упорядоченное, то его ультраоднородность эквивалентна олигоморфности действия группы его автоморфизмов на нем и эквивалентна Roelcke-предкомпактности самой группы автоморфизмов этого множества как в перестановочной топологии, так и в топологии поточечной сходимости.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.315

Ключевые слова: олигоморфная группа, группа преобразований, эквиравномерность, ультратранзитивность, Roelcke-предкомпактность, линейно упорядоченное множество.

1. Введение

Олигоморфность группы — один из подходов к изучению ее структуры. Олигоморфность связана с теорией моделей, комбинаторикой и теорией Рамсея, градуированными алгебрами, топологической динамикой. Исследования олигоморфности групп перестановок можно, например, найти в работах Кэмерона [1], Гласса [2], Холанда [3]. Олигоморфность группы также можно рассматривать как алгебраическое свойство «малости» группы.

При исследовании «больших» топологических групп Roelcke-предкомпактность — топологическое свойство «малости» согласно В. Пестову [4]. В работах Розендаля [5] и Цанкова [6] выявляются связи олигоморфности группы и ее Roelcke-предкомпактности.

Непосредственное установление олигоморфности группы G (действующей на множестве X) часто встречает трудности, преодолеть которые во многих случаях позволяет топологизация X, рассмотрение допустимых групповых топологий на G, при которых действия не только непрерывны, но и позволяют находить эквиравномерности на X (равномерности, на пополнения X по которым действие непрерывно продолжается). Использование таких топологических свойств, как вполне ограниченность максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на X или Roelcke-предкомпактность группы G, могут существенно облегчить исследования олигоморфности.

Основным результатом статьи является топологическая характеризация олигоморфности действия группы. Действие группы G в перестановочной топологии τ_∂ на дискретном пространстве X олигоморфно в том и только том случае, если максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_X$ на X вполне ограничена (теорема 3.1). Если дополнительно у действия конечное число орбит, то предыдущие условия эквивалентны Roelcke-предкомпактности группы (G, τ_∂) (теорема 3.4). В теореме 3.5 установлено, что Roelcke-предкомпактность группы (G, τ_∂) при ее действии на дискретном пространстве эквивалентна ее изоморфности всюду плотной подгруппе предела обратного спектра из олигоморфных групп.

Если X — простое линейно упорядоченное множество, $\mathrm{Aut}(X)$ — его группа автоморфизмов, то ультраоднородность X эквивалентна олигоморфности действия $\mathrm{Aut}(X)$ на X и эквивалентна Roelcke-предкомпактности группы $\mathrm{Aut}(X)$ как в перестановочной топологии, так и в топологии поточечной сходимости (теорема 3.11). Приведенные примеры иллюстрируют, насколько упрощаются рассуждения в случае ультраоднородных линейно упорядоченных множеств.

Рассмотрение однородных GO-пространств (см. п.п. 3.3) показывает, что топологизации линейно упорядоченных множеств, сохраняющие однородность, не приводят к новым топологиям на группах их автоморфизмов, отличных от топологии поточечной сходимости и перестановочной топологии (лемма 3.14 и предложение 3.16).

Будем придерживаться терминологии и обозначений из [7, 8]. Рассматриваются непустые множества X. Пространства — тихоновские топологические пространства (X, τ) (τ — топология на X). $\mathbb{Q}$ — рациональные, $\mathbb{P}$ — иррациональные и $\mathbb{R}$ — действительные числа. $N_G(e)$ — семейство открытых окрестностей единицы топологической группы G. Для действия $\alpha : G \times X \to X$ и множеств $A \subset G$, $Y \subset X$ положим $AY = \{\alpha(g, y) \mid g \in A,\ y \in Y\}$.

Используется понятие равномерности $\mathscr{U}$ в терминах семейства (равномерных) покрытий [7, гл. 8, § 8.1], образующих фильтр покрытий. База равномерности — база фильтра покрытий. $\mathscr{U}$ меньше $\mathscr{U}'$, если $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}'$. Равномерности на пространстве согласованы с его топологией. Считаем равномерность $\mathscr{U}$ вполне ограниченной, если существует ее база из конечных покрытий [7, гл. 8, § 8.3, упражнение 8.3.D(a)]. Понятия полной равномерности $\mathscr{U}$ и пополнения равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ (пополнения X по равномерности $\mathscr{U}$) см., например, в [7, гл. 8, § 8.3].

2. Предварительные сведения

2.1. Олигоморфное действие. Действие $\alpha_1 : G \times X \to X$ группы G на множестве X ($\alpha_1(g, x) := gx$) называется *эффективным*, если *ядро действия* $\{g \in G \mid gx = x,\ \forall x \in X\}$ — единица G. Если G эффективно действует на X, то G — подгруппа $\mathrm{S}(X)$, группы перестановок (биекций) X. Подгруппа

$$\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} = \{g \in G \mid gx_i = x_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

группы G — *стабилизатор точек* $x_1, \dots, x_n \in X$. Множество $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ — *орбита точки* x. Орбиты различных точек или совпадают, или дизъюнктны.

По действию $\alpha_1 : G \times X \to X$ корректно определены *диагональные действия*

$$\alpha_n : G \times X^n \to X^n, \quad \alpha_n(g, x = (x_1, \dots, x_n)) = (gx_1, \dots, gx_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.1. Эффективное действие группы G на множестве X *олигоморфно*, если у диагонального действия $\alpha_n : G \times X^n \to X^n$, $n \in \mathbb{N}$, конечное число орбит.

Группа G называется *олигоморфной*, если существуют множество X и олигоморфное действие G на X. В этом случае будем также говорить, что *олигоморфность группы G реализуется ее действием на множестве X.*

Замечание 2.2. В [1] подгруппы группы перестановок $S(X)$ фиксированного множества X называются олигоморфными, если их действия олигоморфны.

В [6, определение 1.2] рассматриваются группы, олигоморфность которых реализуется действиями на счетных множествах.

Если олигоморфность G реализуется действием на X, то она также реализуется и диагональным действием G на X^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Равномерности на топологической группе и Roelcke-равномерность. Базу *правой равномерности R* (соответственно *левой равномерности L*) на топологической группе G образуют покрытия $\{Og \mid g \in G\}$ (соответственно $\{gO \mid g \in G\}$), $O \in N_G(e)$ [7, гл. 8, § 8.1, пример 8.1.17]. Топологическая группа *предкомпактна*, если правая равномерность вполне ограничена (см., например, [8]).

Необходимые сведения о *Roelcke-равномерности* $L \wedge R$ (наибольшей нижней грани правой R и левой L равномерностей) на топологической группе можно найти в [8]. Ее базу образуют покрытия $\{OgO \mid g \in G\}$, $O \in N_G(e)$. Группа *Roelcke-предкомпактна*, если Roelcke-равномерность $L \wedge R$ вполне ограничена, пополнение по ней — *Roelcke-компактификация* группы.

Факты 1. (1) *Всюду плотная подгруппа H группы G Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа G Roelcke-предкомпактна* [8, *предложение* 3.24] *и* [6, *предложение* 2.2]. *Более того, Roelcke-компактификации H и G (равномерно) изоморфны* [7, *следствие* 8.3.11].

(2) *Открытая подгруппа Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна* [8, *предложение* 3.24].

(3) *Непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы — Roelcke-предкомпактная группа* [6, *предложение* 2.2].

(4) *Если нормальная подгруппа H и факторгруппа G/H группы G Roelcke-предкомпактны, то группа G Roelcke-предкомпактна* [6, *предложение* 2.2].

(5) *Если подгруппа H группы G Roelcke-предкомпактна и максимальная эквиравномерность* (*см. п.* 2.4) *на факторпространстве G/H вполне ограничена, то группа G Roelcke-предкомпактна* [9, *предложение* 6.4] (*см. также условие Roelcke-предкомпактности подмножества группы в* [8, *предложение* 9.17]).

(6) *Предел обратного спектра из Roelcke-предкомпактных групп и гомоморфизмов Roelcke-предкомпактен* [6, *предложение* 2.2].

(7) *Произведение топологических групп Roelcke-предкомпактно в том и только в том случае, если сомножители — Roelcke-предкомпактные группы* [8, *предложение* 3.35].

Двусторонняя равномерность $L \vee R$ — наименьшая верхняя грань правой R и левой L равномерностей на топологической группе G. Группа, полная по двусторонней равномерности, называется *полной по Райкову*, и ее образ замкнут при любом ее топологическом изоморфизме в любую топологическую группу [10]. Пополнение группы по двусторонней равномерности называется *пополнением по Райкову* и является полной по Райкову топологической группой. В частности, любая топологическая группа, метризуемая полной метрикой, полна по Райкову (см., например, [8, гл. 10, 13]).

Если на группе G заданы две сравнимые равномерности $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$, то $\mathscr{U}_1$ сильнее $\mathscr{U}_2$ ($\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_1$), если и только если всякое окружение из $\mathscr{U}_2$ является окружением из $\mathscr{U}_1$ [11, гл. II, § 2, предложение 3].

Если на группе G даны две групповые топологии $\sigma \leq \tau$, то определены соответствующие правые R_σ, R_τ, левые L_σ, L_τ, двусторонние $(L \vee R)_\sigma$, $(L \vee R)_\tau$ равномерности и Roelcke-равномерности $(L \wedge R)_\sigma$, $(L \wedge R)_\tau$. Из задания баз правой, левой и Roelcke-равномерностей и определения двусторонней равномерности следует, что $R_\sigma \subset R_\tau$, $L_\sigma \subset L_\tau$, $(L \vee R)_\sigma \subset (L \vee R)_\tau$, $(L \wedge R)_\sigma \subset (L \wedge R)_\tau$.

Считаем кардинал κ бесконечным. *Индексом узкости* $\mathrm{in}(\mathscr{U})$ равномерности $\mathscr{U}$ называется наименьший кардинал κ такой, что у равномерности $\mathscr{U}$ существует база из покрытий, мощности которых не более κ. Понятие введено И. Гураном [12], в [13, гл. 1, § 1] оно названо индексом ограниченности.

Лемма 2.3. *Если на группе G даны две групповые топологии $\sigma \leq \tau$, то*

(1) $\mathrm{in}(R_\sigma) \leq \mathrm{in}(R_\tau)$, $\mathrm{in}(L_\sigma) \leq \mathrm{in}(L_\tau)$, $\mathrm{in}(L \vee R)_\sigma \leq \mathrm{in}(L \vee R)_\tau$, $\mathrm{in}(L \wedge R)_\sigma \leq \mathrm{in}(L \wedge R)_\tau$;

(2) *из предкомпактности группы (G, τ) (в этом случае $R_\tau = L_\tau = (L \vee R)_\tau = (L \wedge R)_\tau$) следует предкомпактность группы (G, σ);*

(3) *из Roelcke-предкомпактности группы (G, τ) следует Roelcke-предкомпактность группы (G, σ).* $\square$

2.3. Топологизация группы преобразований. Пусть X — топологическое пространство, $\mathrm{Hom}(X)$ — группа его гомеоморфизмов. Если группа G эффективно действует на пространстве X и каждый элемент G — гомеоморфизм X, то G естественно отождествляется с подгруппой группы $\mathrm{Hom}(X)$. Если X — дискретное пространство, то $\mathrm{Hom}(X) = \mathrm{S}(X)$.

Топология τ на группе G, эффективно действующей на топологическом пространстве X, называется *допустимой групповой топологией* [14], если (G, τ) — топологическая группа и действие $\alpha : (G, \tau) \times X \to X$ непрерывно. В этом случае (G, X, α) — *G-пространство.* Ниже непрерывное действие α обозначается через $\curvearrowright$.

Если *топология поточечной сходимости* τ_p (предбазу образуют множества вида $[x, O] = \{g \in G \mid gx \in O\}$, $x \in X$, O открыто в X) является допустимой групповой топологией на G, то она является наименьшей допустимой групповой топологией [15, лемма 3.1].

Базу окрестностей единицы *перестановочной топологии* τ_∂ на G образуют открыто-замкнутые подгруппы — стабилизаторы конечных подмножеств точек X. (G, τ_∂) является топологической группой [8, гл. 2, пример 3]. Она неархимедова (топологическая группа *неархимедова*, если базу окрестностей ее единицы образуют открыто-замкнутые подгруппы). Очевидно, что $\tau_\partial \geq \tau_p$, и если топология поточечной сходимости допустимая, то и перестановочная топология допустимая. В общем случае перестановочная топология может не быть допустимой групповой топологией. Если X — дискретное пространство, то $\tau_\partial = \tau_p$ и перестановочная топология является наименьшей допустимой групповой топологией. Из леммы 2.3 вытекает

Следствие 2.4. *Пусть группа G эффективно действует на дискретном пространстве X.*

(1) *Если* (G,τ_∂) *Roelcke-предкомпактна, то* (G,τ_p) *Roelcke-предкомпактна.*

(2) *Если* (G,τ_p) *не Roelcke-предкомпактна, то группа* G *в любой допустимой групповой топологии также не Roelcke-предкомпактна.* $\square$

Замечание 2.5. Из Roelcke-предкомпактности (G,τ_p), вообще говоря, не следует Roelcke-предкомпактность (G,τ_∂).

Действительно, действие (бесконечной) топологической группы (G,τ) самой на себя умножением слева является равномерно равностепенно непрерывным относительно левой равномерности L и $\tau_p=\tau$ (см., например, [15, пример 3.6]. Если (G,τ) компактна, то (G,τ_p) очевидно Roelcke-предкомпактна. Однако (G,τ_∂) дискретна (и бесконечна), $R_{\tau_\partial}=L_{\tau_\partial}=(L\vee R)_{\tau_\partial}=(L\wedge R)_{\tau_\partial}$ и, значит, не Roelcke-предкомпактна.

2.4. Эквиравномерности на G-пространстве. Пусть $(G,X,\curvearrowright)$ — G-пространство. Равномерность $\mathscr{U}_X$ на пространстве X называется *эквиравномерностью*, если действие $G\curvearrowright X$ *насыщено* (любой гомеоморфизм из G равномерно непрерывен) и *ограничено* (для любого покрытия $u\in\mathscr{U}_X$ существуют $O\in N_G(e)$ и покрытие $v\in\mathscr{U}_X$ такие, что покрытие $Ov:=\{OV\mid V\in v\}$ вписано в u, где $OV=\{gx\mid g\in O,\ x\in V\}$). В этом случае X — *G-тихоновское пространство*, пополнение X по вполне ограниченной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ — *G-компактификация*, или *эквивариантная компактификация* X, и существует $\beta_G X$ — *максимальная G-компактификация* X, которая соответствует максимальной вполне ограниченной эквиравномерности.

Например, действие топологической группы G на факторпространстве G/H левыми сдвигами ($g(hH)=(gh)H$) непрерывно, базу максимальной эквиравномерности образуют покрытия $\{Ox\mid x\in G/H\}$, $O\in N_G(e)$.

Дополнительные сведения можно найти, например, в [16].

3. Олигоморфность и Roelcke-предкомпактность подгрупп группы перестановок

Пусть G — подгруппа $\mathrm{S}(X)$. Для диагональных действий $\alpha_n: G\times X^n\to X^n$, $n\in\mathbb{N}$, (считая пространства X^n дискретными) предбазу окрестностей единицы перестановочной топологии на G образуют подгруппы St_x, $x=(x_1,\dots,x_n)\in X^n$, совпадающие с подгруппами $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ (стабилизатор точек $x_1,\dots,x_n$) при действии $\alpha_1: G\times X\to X$. Тем самым перестановочные топологии на G, определяемые действиями α_n, $n\in\mathbb{N}$, совпадают и $((G,\tau_\partial),X^n,\curvearrowright)$ — G-пространства, $n\in\mathbb{N}$.

Базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на X (соответственно $\mathscr{U}_{X^n}$ на X^n) образуют покрытия

$$\omega_{x_1,\dots,x_m}=\{\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_m}x\mid x\in X\ (X^n)\},\quad x_1,\dots,x_m\in X\ (X^n)$$

(см., например, [17]). Так как элементы покрытий $\omega_{x_1,\dots,x_n}$ или совпадают, или не пересекаются [17], то их можно считать дизъюнктными.

Теорема 3.1. *Следующие условия для G-пространства $((G,\tau_\partial),X,\curvearrowright)$ эквивалентны:*

(1) *максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена;*

(2) *действие группы G на множестве X олигоморфно.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Доказательство проведем индукцией по степеням X. Если максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена, то действие $G\curvearrowright X$ имеет конечное число орбит.

Пусть диагональное действие $G \curvearrowright X^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет конечное число орбит $Y_1, \dots, Y_k$, $y_1 \in Y_1, \dots, y_k \in Y_k$. В силу вполне ограниченности $\mathscr{U}_X$ для любого $j = 1, \dots, k$ действие подгруппы St_{y_j} на X имеет конечное число орбит: $X_{j1}, \dots, X_{jm(j)}$. Зафиксируем точки $x_{j1} \in X_{j1}, \dots, x_{jm(j)} \in X_{jm(j)}$, $j = 1, \dots, k$. Для проверки шага индукции достаточно показать, что орбиты точек $(y_j, x_{jm(j)})$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, m(j)$, — покрытие $X^{n+1} = X^n \times X$.

Для произвольной точки $(y, x) \in X^n \times X$ пусть $y \in Y_j$. Существует $g \in G$ такой, что $g(y_j) = y$ (при действии $G \curvearrowright X^n$). Тогда $g^{-1}(y, x) = (y_j, x')$ (при действии $G \curvearrowright X^{n+1}$). Существуют $x_{ji} \in X$ и $h \in \mathrm{St}_{y_j}$ такие, что $h(x_{ji}) = x'$. Тем самым $gh(y_j, z_{ji}) = (y, x)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Стабилизаторы точек образуют базу топологии в единице группы (G, τ_∂). Пусть действие G олигоморфно, $\mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n} \in N_G(e)$ и $y = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$.

Если орбитами действия $G \curvearrowright X^{n+1}$ являются множества $Y_1, \dots, Y_k$, то орбитами действия подгруппы $\mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n}$ на $X = \{y\} \times X$ являются множества $(\{y\} \times X) \cap Y_j$, $j = 1, \dots, k$. Они образуют базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$, которая вполне ограничена. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть действие группы G на множестве X олигоморфно. Тогда*

(а) *любая открытая подгруппа H группы (G, τ_∂) олигоморфна (в частности, стабилизаторы точек X — олигоморфные подгруппы). Более того, олигоморфность H реализуется действием на X (сужением действия на $H \times X$);*

(б) *олигоморфность G реализуется диагональным действием на X^n, $n \in \mathbb{N}$. Тем самым для действия $(G, \tau_\partial) \curvearrowright X^n$ максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_{X^n}$ на X^n вполне ограничена, $n \in \mathbb{N}$;*

(в) *группа (G, τ_∂) Roelcke-предкомпактна* [18].

Доказательство. (а) Следует из теоремы 3.1 и совпадения максимальных эквиравномерностей на X для действий $G \curvearrowright X$ и $H \curvearrowright X$.

(б) Следует из теоремы 3.1 и возможности реализации олигоморфности G диагональным действием на X^n (диагональные действия на степенях $(X^n)^m = X^{nm}$ имеют конечное число орбит, $m \in \mathbb{N}$), $n \in \mathbb{N}$.

(в) Базу Roelcke-равномерности $L \wedge R$ на (G, τ_∂) образуют покрытия

$$\Omega_{x_1, \dots, x_n} = \{\mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n} g \, \mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n} \mid g \in G\}, \quad x_1, \dots, x_n \in X.$$

В силу теоремы 3.1 достаточно показать, что любое покрытие $\Omega_{x_1, \dots, x_n}$ имеет конечное подпокрытие.

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $\mathrm{St}_x = \mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n}$. Из свойства (б) следует, что для подмножества $\{x\} \times Gx$ слоя $\{x\} \times X^n$ произведения $X^n \times X^n$ существуют $g_1, \dots, g_m \in G$ такие, что

$$\{x\} \times Gx \subset \{x\} \times \Big(\bigcup \{\mathrm{St}_x \, g_i x \mid i = 1, \dots, m\}\Big).$$

Тогда для любого $h \in G$

$$(x, hx) = (gx, gg_i x) = (x, gg_i x)$$

для некоторых $g \in \mathrm{St}_x$ и $i \in \{1, \dots, m\}$. Следовательно,

$$g_i^{-1} g^{-1} h \in \mathrm{St}_x \Longleftrightarrow h \in gg_i \, \mathrm{St}_x \subset \mathrm{St}_x \, g_i \, \mathrm{St}_x,$$

и $\{\mathrm{St}_x \, g_i \, \mathrm{St}_x \mid i = 1, \dots, m\}$ — конечное подпокрытие $\Omega_{x_1, \dots, x_n}$. $\square$

Замечание 3.3. В силу свойства (а) следствия 3.2 и теоремы 3.1 свойство (в) можно рассматривать как частный случай предложения 6.4 в [9].

Теорема 3.4. *Пусть у действия $(G,\tau_\partial) \curvearrowright X$ конечное число орбит. Тогда группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если действие G на X олигоморфно.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем по одной точке из каждой орбиты действия $G \curvearrowright X$: $x_1,\dots,x_k$. Для произвольной окрестности $O \in N_G(e)$ существует окрестность вида $V = \mathrm{St}_{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m} \subset O$. В силу Roelcke-предкомпактности группы G существует конечное множество $g_1,\dots,g_n \in G$ такое, что

$$\bigcup\{Vg_jV \mid j=1,\dots,n\} = G.$$

Тогда $\bigcup\{Vg_jVx_i \mid j=1,\dots,n\} = Gx_i$ для любого $i=1,\dots,k$ и

$$\bigcup\{Og_jx_i \mid j=1,\dots,n, i=1,\dots,k\} = X$$

(так как $V \subset O$, $Vx_i = x_i$, $i=1,\dots,k$), т. е. любое покрытие $\{Ox \mid x \in X\}$ имеет конечное подпокрытие и равномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена.

Достаточность доказана в п. (в) следствия 3.2. $\square$

Теорема 3.5. *Следующие условия для G-пространства $((G,\tau_\partial),X,\curvearrowright)$ (действие эффективно) эквивалентны:*

(1) *группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна;*

(2) *для сужения действия $G \curvearrowright Y$ на любое инвариантное подмножество $Y \subset X$, имеющее конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$), действие группы $G_Y = G/H_Y$ на Y олигоморфно;*

(3) *для сужения действия $G \curvearrowright Y$ на любое инвариантное подмножество $Y \subset X$, имеющее конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$), для G-пространства $((G_Y = G/H_Y,\tau_\partial),Y,\curvearrowright)$ максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_Y$ вполне ограничена.*

(4) *группа (G,τ_∂) — всюду плотная подгруппа предела обратного спектра из олигоморфных групп (в перестановочных топологиях).*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна и Y — инвариантное подмножество X, сужение действия на которое $G \curvearrowright Y$ имеет конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$).

G-пространство $((G_Y,\tau_\partial),Y,\curvearrowright)$ корректно определено. По теореме 3.4 достаточно показать, что группа (G_Y,τ_∂) Roelcke-предкомпактна.

Легко проверить, что фактортопология на группе $G_Y = G/H_Y$ является допустимой групповой топологией для действия $G_Y \curvearrowright Y$ и тем самым более сильной, чем перестановочная топология. Стало быть, группа (G_Y,τ_∂) является Roelcke-предкомпактной группой как непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы по факту 1(3).

Эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (3) доказана в теореме 3.1.

(2) $\Longrightarrow$ (4). Если у действия $(G,\tau_\partial) \curvearrowright X$ конечное число орбит, то группа G олигоморфна по теореме 3.4 и (G,τ_∂) совпадает с пределом тривиального обратного спектра (направленное множество одноэлементно, пространство (G,τ_∂)).

Пусть $Y = \bigcup\{Gx_j \mid j=1,\dots,k\}$ — инвариантное подмножество X, имеющее конечное число орбит для сужения действия $G \curvearrowright Y$. По теореме 3.4 и п. (в) следствия 3.2 группа (G_Y,τ_∂) Roelcke-предкомпактна.

Семейство инвариантных подмножеств X, имеющих конечное число орбит для действия $G \curvearrowright Y$, является направленным по включению множеством. Если $Y' \subset Y$, то определен непрерывный гомоморфизм $\varphi_{YY'} : (G_Y,\tau_\partial) \to (G_{Y'},\tau_\partial)$

(аргументы, аналогичные приведенным в доказательстве выше), для которого $\varphi_{YY'} \circ \varphi_Y = \varphi_{Y'}$. Тем самым определен обратный спектр $\{G_Y, \varphi_{YY'}, Y\}$ из Roelcke-предкомпактных групп (G_Y, τ_∂) и гомоморфизмов. Его предел является Roelcke-предкомпактной группой (факт 1(6)).

Так как действие G эффективно, то семейство сюръективных гомоморфизмов $\varphi_Y : (G, \tau_\partial) \to (G_Y, \tau_\partial)$ является разделяющим (точки и замкнутые множества) семейством отображений (так как $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ при действии $G \curvearrowright X$ содержит ядро действия G на $Y = \bigcup\{Gx_j \mid j = 1, \dots, n\}$ и прообраз $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ при действии $G_Y \curvearrowright Y$, $x_1, \dots, x_n \in Y$). Тем самым (G, τ_∂) — всюду плотная подгруппа предела обратного спектра $\{G_Y, \varphi_{YY'}, Y\}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) по фактам 1(1),(6). $\square$

Замечание 3.6. Если в условиях теоремы 3.5 группа (G, τ_∂) полна по Райкову, то она совпадает с пределом обратного спектра олигоморфных групп (являясь всюду плотной и замкнутой его подгруппой).

В [6, теорема 2.4] установлена эквивалентность условий (1), (2) и усиленного условия (4) (группа (G, τ_∂) — предел обратного спектра олигоморфных групп) для подгрупп перестановок счетного множества. Действительно, в этом случае группа (G, τ_∂) является польской (т. е. сепарабельной метризуемой полной метрикой) и, следовательно, полной по Райкову.

3.1. Ультратранзитивные действия.

Определение 3.7. Действие (эффективное) группы G на множестве X *сильно n-транзитивно*, $n \geq 1$, если для любых семейств различных n точек $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ существует $g \in G$ такой, что $g(x_k) = y_k$, $k = 1, \dots, n$.

Действие $G \curvearrowright X$, сильно n-транзитивное для всех $n \in \mathbb{N}$, называется *ультратранзитивным*.

Факты 2. (1) *Группа G, действующая на множестве X ультратранзитивно, олигоморфна* (см., например, [1]), *и, следовательно, (G, τ_∂) Roelcke-предкомпактна.*

Действительно, покрытие $\{\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} x \mid x \in X\}$ дискретного пространства X состоит ровно из $n+1$ попарно различных элементов:

$$\{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}\}, \quad x_1, \dots, x_n \in X.$$

Остается сослаться на п. (в) следствия 3.2.

(2) *Группа G, действующая на X ультратранзитивно, является всюду плотной подгруппой* $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$.

Действительно, пусть множество O открыто в $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$ и $g \in O$. Тогда существуют точки $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $g\,\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} \subset O$ и $g\,\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} = \{h \in G \mid h(x_i) = g(x_i),\ i = 1, \dots, n\}$ — открытая окрестность g. Поскольку G действует на X ультратранзитивно, существует $h \in G$ такой, что $h(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, $h \in O$. $\square$

Roelcke-предкомпактность группы $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$ доказана в [19] (см, также [8, пример 9.14]).

(3) *Пространство X ультраоднородно, если действие его группы гомеоморфизмов* $\mathrm{Hom}(X)$ *ультратранзитивно. Ультраоднородными пространствами являются локально компактные метризуемые* CDH*-пространства, дополнение до любого конечного подмножества которых связно. К их числу относятся сферы*

S^{n-1} в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, гильбертов куб Q (*см., например,* [20]).

Группа гомеоморфизмов с перестановочной топологией ультраоднородного пространства является Roelcke-предкомпактной, хотя перестановочная топология не обязана быть допустимой групповой топологией. Группы гомеоморфизмов сфер S^n, $n \geq 2$, и гильбертова куба Q с компактно-открытой топологией (наименьшей допустимой групповой топологией) не Roelcke-предкомпактны [18]. Значит, по лемме 2.3 и в любой допустимой групповой топологии эти группы не Roelcke-предкомпактны.

3.2. Однородные линейно упорядоченные множества. Подмножество Y линейно упорядоченного множества X называется *промежутком* (или *выпуклым подмножеством*), если для для любых $x \leq y \in Y$ и $x \leq z \leq y$ вытекает $z \in Y$. Промежутками являются:

полуинтервалы $[a,b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$, $[a,\rightarrow) = \{x \in X \mid a \leq x\}$, $(a,b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$, $(\leftarrow,b] = \{x \in X \mid x \leq b\}$;

интервалы $(a,b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, $(a,\rightarrow) = \{x \in X \mid a < x\}$, $(\leftarrow,b) = \{x \in X \mid x < b\}$ (считаем множество X интервалом);

отрезки $[a,b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$ (в частности, точки X).

Определение 3.8. Пусть X — линейно упорядоченное множество, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа сохраняющих порядок биекций X ($\mathrm{Aut}(X)$ — подгруппа $\mathrm{S}(X)$). X называется *однородным линейно упорядоченным множеством*, если действие $\mathrm{Aut}(X)$ на X транзитивно (т. е. для любых $x,y \in X$ существует $f \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $f(x) = y$).

Факты 3. (1) *Однородное линейно упорядоченное множество или одноточечно, или бесконечно.*

(2) *Однородное линейно упорядоченное множество X или дискретно* (*для любого $x \in X$ существует x^+, $x < x^+$, и $(x,x^+) = \varnothing$* [21]), *или плотно* (*X плотное, если для любых $x < y \in X$ существует $z \in (x,y)$* [21]).

(3) *Линейно упорядоченное пространство* (LOTS) *— линейно упорядоченное множество X, базу топологии* (*топология линейного порядка*) *которого образуют интервалы. На группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ линейно упорядоченного пространства X топология поточечной сходимости τ_p является наименьшей допустимой групповой топологией для действия $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau)$* (*см.* [22, 23]). *Топология τ_∂ является допустимой групповой топологией и $\tau_\partial \geq \tau_p$. Если X дискретно, то $\tau_\partial = \tau_p$.*

Определение 3.9. Промежуток J однородного линейно упорядоченного множества X называется *регулярным* [24, определение 5], если

$$\forall\, x,y \in J,\ \forall\, g \in \mathrm{Aut}(X)\ ((gx \in J) \Longrightarrow (gy \in J)).$$

Однородное линейно упорядоченное множество X называется *простым* [24, определение 6], если в X нет собственных регулярных промежутков (несобственные — или точки, или все X). Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *o-примитивной* [2].

Линейно упорядоченное множество X называется 2-*однородным*, если для любых пар точек $x < y$ и $x' < y'$ существует $g \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $g(x) = x'$, $g(y) = y'$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *o-2-транзитивной* [2].

Однородное линейно упорядоченное множество X называется *жестким* (rigid) [25], если для любых $x,y \in X$ существует единственный $g \in \mathrm{Aut}(X)$

такой, что $g(x) = y$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *регулярной* или *однозначно транзитивной* [2].

Факты 4. (1) 2-*Однородное линейно упорядоченное множество плотное.*

(2) 2-*Однородное линейно упорядоченное множество является ультраоднородным* [2, *лемма* 1.10.1] (*см, также* [22]), *т. е. для любых семейств различных* n *точек* $x_1 < \ldots < x_n$ *и* $y_1 < \ldots < y_n$ *существует* $g \in \mathrm{Aut}(X)$ *такой, что* $g(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

В [24, п. 2, п. 3.5] и [2, 3] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.10. *Для однородного линейно упорядоченного множества* X *следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество* X *простое;*

(2) *множество* X

(i) 2-*однородно* (*ультраоднородно*), *или*

(ii) *жестко и* (*порядково*) *изоморфно подгруппе* $\mathbb{R}$ (*изоморфной* $\mathrm{Aut}(X)$)*;*

(3) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *о-примитивна;*

(4) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$

(i) *о-2-транзитивна, или*

(ii) *однозначно транзитивна и является подгруппой абелевой группы* $\mathbb{R}$ (*см., также,* [25]). $\square$

Теорема 3.11. *Пусть* X — *простое* (*линейно упорядоченное*) *множество.*

(1) X *жестко* $\Longleftrightarrow$ *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *не является Roelcke-предкомпактной ни в какой допустимой групповой топологии при действии на* LOTS X $\Longleftrightarrow$ *действие* $\mathrm{Aut}(X)$ *на* X *не олигоморфно.*

(2) X *ультраоднородно* $\Longleftrightarrow$ *группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ *Roelcke-предкомпактна* $\Longleftrightarrow$ *группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ *Roelcke-предкомпактна* $\Longleftrightarrow$ *действие* $\mathrm{Aut}(X)$ *на* X *олигоморфно* $\Longrightarrow$ $\mathrm{Aut}(X)$ *олигоморфна.*

(3) *Группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ *Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ *Roelcke-предкомпактна.*

Доказательство. По теореме 3.4 (орбита единственна) выполнена вторая эквивалентность в п. (1) (перестановочная топология является допустимой групповой топологией, п. 2.3) и эквивалентность в п. (2): группа $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна $\Longleftrightarrow$ действие $\mathrm{Aut}(X)$ на X олигоморфно. Последняя импликация в п. (2) следует из определения 2.1.

Необходимость в первой эквивалентности в п. (1). По теореме 3.10 X является (неограниченной) подгруппой абелевой группы $\mathbb{R}$. Если X дискретно, то X изоморфно $\mathbb{Z}$, группа $\mathrm{Aut}(X)$ в топологии $\tau_\partial = \tau_p$ на $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и не Roelcke-предкомпактна.

Если X плотно, то X — плотное неограниченное подмножество $\mathbb{R}$, группа $\mathrm{Aut}(X)$ в топологии τ_p — всюду плотная неограниченная подгруппа абелевой топологической группы $\mathbb{R}$, на которой все групповые равномерности совпадают и не являются вполне ограниченными. Значит, $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ (по следствию 2.4 ни в какой допустимой групповой топологии) не является Roelcke-предкомпактной.

Необходимость в первой эквивалентности в п. (2). Базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на дискретном пространстве (X, τ_d) при действии

$$(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial) \curvearrowright (X, \tau_d)$$

образуют конечные покрытия

$$(\leftarrow, x_1) \cup \{x_1\} \cup (x_1, x_2) \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup \{x_n\} \cup (x_n, \rightarrow),\ x_1 < \ldots < x_n,\ n \in \mathbb{N},$$

и равномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена. По теореме 3.1 группа $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна.

Необходимость во второй эквивалентности в (2) следует из следствия 2.4.

Достаточность в первой эквивалентности в (1) и первых двух эквивалентностях в (2). Если группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является Roelcke-предкомпактной ни в какой допустимой групповой топологии, то $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ не Roelcke-предкомпактна и X не ультраоднородно. По теореме 3.10 оно жестко.

Если группа $\mathrm{Aut}(X)$ является Roelcke-предкомпактной в некоторой допустимой групповой топологии, то оно не жестко. По теореме 3.10 оно ультраоднородно.

Условие (3) является следствием (2). $\square$

Замечание 3.12. В теореме 3.11 группу автоморфизмов ультраоднородного простого множества можно заменить на любую ее подгруппу, действующую ультратранзитивно.

Roelcke-предкомпактность ультратранзитивных подгрупп группы автоморфизмов (ультраоднородных) линейно упорядоченных (и циклических) множеств в топологии поточечной сходимости (перестановочной топологии в терминах данной статьи) установлена в [9, предложение 6.6].

Примеры 3.13. (1) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, изоморфная $\mathbb{Z}$, не олигоморфна.

Действительно, предположив ее олигоморфность, имеем: во-первых, существует (счетное) множество X, действие $\mathbb{Z}$ на котором имеет конечное число орбит; во-вторых, одна из орбит бесконечна ($\mathbb{Z}$ не может эффективно действовать на конечном множестве); в-третьих, стабилизатор точки бесконечной орбиты тривиален (иначе орбита конечна) и получаем обычное действие группы $\mathbb{Z}$ на себе, которое не олигоморфно. Получено противоречие.

Однако на $\mathbb{Z}$ существует групповая топология σ, в которой $\mathbb{Z}$ предкомпактна, и, стало быть, $(\mathbb{Z}, \sigma)$ Roelcke-предкомпактна.

Действительно, характер, ядро которого тривиально, — изоморфизм $\mathbb{Z}$ на всюду плотную подгруппу окружности S^1 и, стало быть, $\mathbb{Z}$ — предкомпактная группа в индуцируемой топологии.

Никакая групповая топология, в которой $\mathbb{Z}$ предкомпактна, не может быть перестановочной топологией при действии $\mathbb{Z}$ на дискретном пространстве.

(2) Если X и Y — линейно упорядоченные множества, то через $X \otimes_\ell Y$ обозначается их *произведение* $X \times Y$ *с лексикографическим порядком.*

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{Q}$ ((линейно) изоморфно $\mathbb{Q}$) и $\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{P}$ ((линейно) изоморфно $\mathbb{P}$) — ультраоднородные множества. Их группы автоморфизмов по теореме 3.11 олигоморфны и Roelcke-предкомпактны в топологиях τ_∂ и τ_p при соответствующих действиях.

(3) Если X и Y — линейно упорядоченные множества, то через $X \lozenge Y$ обозначается их *конкатенация* (на дизъюнктном объединении X и Y линейный порядок следующий: $x < y$, если $x \in X$, $y \in Y$, ограничения линейного порядка на X и Y совпадают с линейными порядками на X и Y соответственно).

$\mathscr{L} = [0, \omega_1) \otimes_\ell [0,1)$ — длинный луч, $\mathscr{L}_-$ — длинный луч $\mathscr{L}$ с обратным линейным упорядочением.

Легко проверить, что $L = \mathscr{L} \setminus \{(0,0)\} \subset \mathscr{L}$, $L_- = \mathscr{L}_- \setminus \{(0,0)\} \subset \mathscr{L}_-$ и $\tilde{L} = L_- \lozenge \{0\} \lozenge L$ — ультраоднородные множества и по теореме 3.11 группы их автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(\star)$ олигоморфны и Roelcke-предкомпактны в топологиях τ_∂ и τ_p (см. [23, § 3, п. 3.3] для топологии поточечной сходимости).

(4) Для группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ LOTS «две стрелки Александрова»

$$\mathbf{D} = \{(0,1)\}\lozenge((0,1)\otimes_\ell \{0,1\})\lozenge\{(1,0)\}$$

наименьшей допустимой групповой топологией является топология поточечной сходимости τ_p, совпадающая с перестановочной τ_∂, так как

$$\mathrm{st}_{(x,i)} = [(x,1),[(x,1),\to)]\cap[(x,0),(\leftarrow,(x,0)]],\quad x\neq 0,1,\ i=0,1.$$

Легко проверить, что у действия две орбиты и максимальная эквиравномерность при действии $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial)\curvearrowright(\mathbf{D},\tau_d)$ вполне ограничена. Значит, по теореме 3.1 группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ олигоморфна и $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна по п. (в) следствия 3.2.

Возможен иной подход. LOTS $D=(0,1)\otimes_\ell\{-1,1\}$ является подпространством $\mathbf{D}$ и группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(D)$ и $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ в перестановочных топологиях топологически изоморфны. Можно показать, что группа $(\mathrm{Aut}(D),\tau_\partial)$ (τ_∂ — наименьшая допустимая групповая топология) топологически изоморфна группе $(\mathrm{Aut}(\mathbb{R}),\tau_\partial)$. Значит, группа $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна (п. (2)) и по теореме 3.4 олигоморфна.

(5) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{K})$ лексикографически упорядоченного квадрата

$$\mathbf{K} = [0,1]\lozenge((0,1)\otimes_\ell [0,1])\lozenge[0,1]$$

Roelcke-предкомпактна в топологиях τ_∂ и τ_p, так как легко проверить, что максимальная эквиравномерность при действии $(\mathrm{Aut}(\mathbf{K}),\tau_\partial)\curvearrowright(\mathbf{K},\tau_d)$ вполне ограничена (и у действия 9 орбит). Следовательно, она олигоморфна по теореме 3.4. Иной подход представлен в [26, § 5].

3.3. Однородные GO-пространства. *Обобщенно упорядоченное пространство* (GO-*пространство*) — линейно упорядоченное множество с топологией τ такой, что: (i) τ больше или равна топологии линейного порядка, (ii) базу τ образуют промежутки [27, определение 2.1].

Лемма 3.14. *В следующих топологиях однородное линейно упорядоченное множество X является GO-пространством и каждый элемент $\mathrm{Aut}(X)$ — гомеоморфизм:*

(1) *топология линейного порядка τ (база топологии — интервалы (x,y), $x<y\in X$), (X,τ) — (LOTS);*

(2) *топология «стрелки» $\tau_\to$ или $\tau_\leftarrow$ (база топологии — полуинтервалы $[x,y)$ (правая стрелка) или полуинтервалы $(x,y]$, (левая стрелка), $x<y\in X$);*

(3) *дискретная топология τ_d,*

$$\tau\le\left\{\begin{matrix}\tau_\to\\ \tau_\leftarrow\end{matrix}\right\}\le\tau_d,$$

$\tau=\left\{\begin{matrix}\tau_\to\\ \tau_\leftarrow\end{matrix}\right\}=\tau_d \iff X$ *— дискретное однородное линейно упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть σ — произвольная топология на X, в которой X является GO-пространством. Если X дискретно, то $\tau=\left\{\begin{matrix}\tau_\to\\ \tau_\leftarrow\end{matrix}\right\}=\tau_d$, так как для любого $x\in X$ существуют $x^-<x<x^+$ и интервалы (x^-,x), (x,x^+) — пустые множества.

Если X не дискретно, то пусть x — произвольная точка X. Промежутками, содержащими x, могут быть или интервалы (a,b), $a < x < b$, или полуинтервалы $[x,b)$, $x < b$, $(a,x]$, $a < x$. Случаи отрезков $[a,b]$, $[x,b]$, $[a,x]$ сводятся к предыдущим случаям, так как на GO-пространстве топология сильнее топологии линейного порядка.

Если рассматривать только открытые интервалы в качестве открытых окрестностей точки x, то они образуют базу топологии линейного порядка в точке x и в силу однородности X на X будет задана топология линейного порядка.

Если к открытым интервалам в качестве открытых окрестностей точки x добавить хотя бы один полуинтервал $[x,b)$ (соответственно $(a,x]$), то они образуют базу топологии в точке x вида $\{[x,b) \mid b > x\}$ (соответственно $\{(a,x] \mid a < x\}$) и в силу однородности X на X будет задана «топология стрелки» $\tau_{\rightarrow}$ (соответственно $\tau_{\leftarrow}$).

Если к открытым интервалам в качестве открытых окрестностей точки x добавить хотя бы один полуинтервал $[x,b)$ и хотя бы один полуинтервал $(a,x]$, то они образуют базу дискретной топологии в точке x и в силу однородности X на X будет задана дискретная топология.

Соотношения $\tau \le \left\{\begin{matrix}\tau_{\rightarrow} \\ \tau_{\leftarrow}\end{matrix}\right\} \le \tau_d$ очевидно выполняются.

Импликация $\tau = \tau_d \Longrightarrow X$ — дискретное однородное линейно упорядоченное множество следует из существования $x^- < x$ и $x < x^+$ таких, что (x^-, x), (x, x^+) — пустые множества. Обратная импликация установлена в начале доказательства.

Так как при биекции, сохраняющей порядок, образами интервалов и полуинтервалов являются интервалы и полуинтервалы соответственно, то элементы $\mathrm{Aut}(X)$ — гомеоморфизмы. $\square$

Следствие 3.15. (1) *На дискретном однородном линейно упорядоченном множестве топология, в которой X — однородное GO-пространство, единственна. X — дискретное* LOTS.

(2) $\tau_{\rightarrow} < \tau_d \iff \tau_{\leftarrow} < \tau_d$.

(3) $\left\{\begin{matrix}\tau_{\rightarrow} \\ \tau_{\leftarrow}\end{matrix}\right\} = \tau_d \iff \tau_d = \tau$.

(4) *Если существует биекция, меняющая порядок на X, то $(X, \tau_{\rightarrow})$ и $(X, \tau_{\leftarrow})$ гомеоморфны.* $\square$

Предложение 3.16. *Пусть X — однородное линейно упорядоченное множество.*

(1) *На группе $\mathrm{Aut}(X)$ топология поточечной сходимости τ_p является наименьшей допустимой групповой топологией для действия $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau)$. Топология τ_∂ является допустимой групповой топологией и $\tau_\partial \ge \tau_p$. Если X дискретно, то $\tau_\partial = \tau_p$.*

(2) *На группе $\mathrm{Aut}(X)$ перестановочная топология τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией для действий $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_{\rightarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_{\leftarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_d)$.*

Доказательство. $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ — топологическая группа [8].

(1) Доказано в [22, 23].

(2) Легко проверить, что перестановочная топология τ_∂ является допустимой групповой топологией для действий $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_{\rightarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_{\leftarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_d)$. В последнем случае она, очевидно, наименьшая.

Пусть σ — допустимая групповая топология, например, на группе $\mathrm{Aut}\,(X, \tau_{\to})$. Для любых точки x и ее окрестности $[x, y)$, $x < y$, существуют окрестность O единицы группы и окрестность точки x вида $[x, x')$, $x < x'$, такие, что $O[x, x') \subset [x, y)$. Тогда для любого гомеоморфизма g из окрестности $O \cap O^{-1}$ единицы группы имеем $g(x) \in [x, y)$ и $g^{-1}(x) \in [x, y)$. Если, например, $g(x) = z > x$, то $g^{-1}(x) < g^{-1}(z) = x$. Значит, $g(x) = x$ для любого $g \in O \cap O^{-1}$ и $O \cap O^{-1} \subset \mathrm{st}\ x$, т. е. $\sigma \geq \tau_\partial$ и τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(X)$ для действия $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_{\to})$. $\square$

Примеры 3.17. (1) Прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ [7, пример 1.2.2] — ультраоднородное линейно упорядоченное множество, являющееся GO-пространством.

По предложению 3.16 перестановочная топология τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией на группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{S})$ и группа $(\mathrm{Aut}(\mathbb{S}), \tau_\partial)$ изоморфна $(\mathrm{Aut}(\mathbb{R}), \tau_\partial)$ (см. (2) пример 3.13).

(2) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ GO-пространства «прямая Майкла» $\mathbb{M}$ [7, пример 5.1.32] естественным образом отождествляется с группами $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ и $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ автоморфизмов инвариантных подмножеств иррациональных чисел $\mathbb{P}$ в дискретной топологии и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в топологии линейного порядка соответственно (две орбиты действия).

Наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ является перестановочная топология $\tau_{\partial\mathbb{M}}$, наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ является топология поточечной сходимости $\tau_{p\mathbb{M}}$. Легко проверить, что $\tau_{\partial\mathbb{M}} \geq \tau_{p\mathbb{M}}$, поэтому наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ будет $\tau_{\partial\mathbb{M}}$. $(\mathrm{Aut}(\mathbb{M}), \tau_{\partial\mathbb{M}})$ топологически изоморфна $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}), \tau_\partial)$, Roelcke-предкомпактна и олигоморфна (п. (2), пример 3.13).

Благодарность. Автор благодарен профессору К. Л. Козлову за многочисленные полезные обсуждения, профессору В. Г. Пестову и профессору М. Г. Мегрелишвили за представленную полезную информацию, связанную с темой исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cameron P. J.* Oligomorphic permutation groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 152).
2. *Glass A. M. W.* Ordered permutations groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1981. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 55).
3. *Holland C.* Transitive lattice-ordered permutations groups // Math. Z. 1965. V. 87. P. 420–433.
4. *Pestov V.* Topological groups: Where to from here? // Topol. Proc. 1999. V. 24, N (Summer). P. 421–506.
5. *Rosendal C.* A topological version of the Bergman property // Forum Math. 2009. V. 21, N 2. P. 299–332.
6. *Tsankov T.* Unitary representations of oligomorphic groups // Geometric and Funct. Anal. 2012. V. 22, N 2. P. 528–555.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
8. *Roelcke W., Dierolf S.* Uniform structures on topological groups and their quotients. USA: McGraw-Hill Inc., 1981.
9. *Glasner E. Megrelishvili M.* Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups in topology, geometry and dynamics: V. A. Rokhlin–Memorial. Ed.: A. M. Vershik, V. M. Buchstaber, A. V. Malyutin // Contemp. Math. 2021. V. 772. P. 133–154.
10. *Райков Д. А.* О пополнении топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 6. С. 513–528.
11. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
12. *Гуран И.* Топологические группы и свойства их подпространств: Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981.

13. *Борубаев А. А.* Равномерная топология. Бишкек: Макспринт, 2013.
14. *Arens R.* Topologies for homeomorphism groups // Am. J. Math. 1946. V. 68, N 4. P. 593–610.
15. *Kozlov K. L.* Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms // Topol. Appl. 2022. V. 311. 26 c.
16. *Megrelishvili M.* Equivariant completions // Comment. Math. Univ. Carolin. 1994. V. 35, N 3. P. 539–547.
17. *Chatyrko V. A., Kozlov K. L.* The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions // Proc. 9th Prague Topol. Symp. Prague, 2001. P. 15–21.
18. *Rosendal C.* Global and local boundedness of Polish groups // Indiana Univ. Math. J. 2013. V. 62, N 5. P. 1621–1678.
19. *Gaughan E. D.* Topological group structures of infinite symmetric groups // Proc. Nat. Acad. Sci. 1967. V. 58, N 3. P. 907–910.
20. *Arhangel′skii A.V., van Mill J.* Topological homogeneity // Recent Progress in General Topology III, Ed.: K. P. Hart, J. van Mill. Atlantis Press, 2014. P. 1–68.
21. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
22. *Ovchinnikov S.* Topological automorphism groups of chain // Mathware & Soft Computing. 2001. V. 8, N 1. P. 47–60.
23. *Сорин Б. В.* Компактификации групп гомеоморфизмов линейно упорядоченных компактов // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 1. С. 118–137.
24. *Ohkuma T.* Structure of homogeneous chains // Kodai Math. Sem. Rep. 1953. V. 5, N 1. P. 1–12.
25. *Glass A. M. W., Gurevich Yu., Holland W. C., Shelah S.* Rigid homogeneous chains // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. V. 89, N 7. P. 7–17.
26. *Sorin B. V.* The Roelcke precompactness and compactifications of transformations groups of discrete spaces and homogeneous chains. arXiv:2310.18570 math[GN] 28 oct. 2023.
27. *Lutzer D. J.* On generalized ordered spaces. Dissertationes Math. 1971. 89.

Поступила в редакцию 16 мая 2024 г.
После доработки 27 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Сорин Борис Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра общей топологии и геометрии,
Ленинские горы, 1, Москва 119992
bvs@imtprofi.ru