

УДК 517.54+517.518

ЕМКОСТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ОБОБЩЕННЫЕ ГРАНИЦЫ

Д. А. Сбоев

Аннотация. Рассматривается емкостная метрика на римановых многообразиях. С ее помощью вводятся емкостные граничные элементы и изучается граничное поведение замкнутых отображений с ограниченным искажением. Получены свойства пространств емкостных граничных элементов, изучены взаимосвязи между граничными элементами при различных показателях.

В статье исследуются также геометрические свойства обобщенной границы в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Описаны свойства метрики, при которых обобщенная граница единственна с точностью до гомеоморфизма, построены примеры таких метрик в различных областях. В областях с локально конечно связной границей на римановых многообразиях показано, что любой элемент обобщенной границы содержится в носителе некоторого емкостного граничного элемента. В качестве следствия получены результаты о взаимосвязи простых концов и емкостных граничных элементов.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.314

Ключевые слова: риманово многообразие, емкостная метрика, емкостной граничный элемент, обобщенная граница, метрика Мазуркевича, простой конец, граничное поведение, замкнутое отображение, отображение с ограниченным искажением.

Вопрос описания граничного поведения различных классов отображений восходит к результатам Каратеодори [1], Остуда и Тейлора [2]. Пусть D, D' — области в $\mathbb{R}^2$, ограниченные жордановыми кривыми, и $f: D \rightarrow D'$ — конформное отображение. Тогда существует продолжение f до гомеоморфизма замкнутых областей $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$. Как показывает пример диска с разрезом, условие жордановости необходимо для существования гомеоморфного продолжения на границу. Если отказаться от этого условия на границу, то гомеоморфное продолжение возможно на некоторую *обобщенную границу*. Каратеодори в работе [1] ввел границу простых концов. Данная конструкция положила начало геометрическому подходу к исследованию граничного поведения отображений.

Отметим, что дальнейшее развитие изучения граничного поведения отображений заключается в нахождении подхода, который не основывается на геометрии конкретной области и не опирается на теорему Римана о конформном отображении. Отметим работу Шлезингера [3], в которой он определил P -последовательности точек областей в $\mathbb{C}$, основываясь на понятии экстремальной длины (модуля семейства кривых). Суть определения P -последовательностей заключается в том, что модуль семейства ассоциированных разрезов стремится

Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РНФ, проект № 23-21-00359.

к нулю. Далее на P -последовательностях вводится отношение эквивалентности P^* -пар. Классы P^* -пар P -последовательностей совпадают с простыми концами в смысле Каратеодори для плоских областей. В работе [4] были введены граничные элементы в $\mathbb{R}^n$, основанные на понятиях цепи подпространств Соболева и емкости. С помощью этой концепции были установлены результаты о граничном поведении квазиконформных отображений. Следующий шаг — введение емкостной метрики, с помощью которой определяются емкостные граничные элементы. Емкостная метрика была введена в работе [5] (см. также [6]). Очевидное преимущество емкостной метрики — независимость определения от геометрии области, а также универсальность конструкции граничных элементов: емкостные граничные элементы суть те элементы, которые присоединяются к области при пополнении по емкостной метрике (в соответствии с теоремой Хаусдорфа о пополнении). Более подробный обзор результатов о граничном поведении отображений в квазиконформном анализе приведен в статье [7].

Общий подход к описанию граничного поведения отображений может быть сформулирован в следующих трех пунктах:

- (1) ввести обобщенную границу, адекватную свойствам рассматриваемого класса отображений;
- (2) исследовать граничное поведение отображений с помощью введенной обобщенной границы;
- (3) установить взаимосвязь между обобщенной границей и границей в исходной топологии.

В работе [7] введена обобщенная граница, адекватная геометрии обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам, — граница емкостных граничных элементов в евклидовом пространстве, определенная с помощью весовой емкостной метрической функции. Посредством емкостных граничных элементов доказаны результаты о граничном поведении обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам, установлены взаимосвязи между емкостной границей и границей в исходной геометрии. Отметим также работу [8], в которой рассматриваются вопросы граничного поведения в подвижных областях с помощью обобщенной концепции емкостных граничных элементов.

В данной работе развиваются результаты [7]: рассматриваются емкостные граничные элементы на римановых многообразиях. Очевидное преимущество емкостной метрики — универсальность подхода. Многие доказательства опираются лишь на свойства емкости конденсаторов и топологию пространства, поэтому результаты о граничном поведении обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам и свойства емкостной метрики на римановых многообразиях устанавливаются с применением тех же идей, что и в [7].

В данной работе получены новые свойства емкостных границ, изучена взаимосвязь этих границ при различных показателях; исследовано граничное поведение не рассмотренного ранее при данном подходе класса отображений (замкнутые отображения с ограниченным искажением). Основная трудность в описании граничного поведения замкнутых отображений с ограниченным искажением — негомеоморфность таких отображений. С помощью полученных результатов по-новому доказываются известные ранее теоремы: существование гомеоморфного продолжения квазиконформного отображения на идеальную границу гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$, несуществование квазиконформного отображения между областью с гребнем и шаром.

Кроме того, в работе рассматриваются «естественные» обобщенные границы в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Например, в диске с разрезом от обобщенной границы ожидается, что в локально связных точках на границе элемент обобщенной границы совпадает с точкой границы в исходной топологии; если же точка на разрезе (граница локально конечно связна в этой точке), то обобщенная граница «различает берега разреза». Пример такой естественной границы — граница Мазуркевича, заданная как присоединенные элементы при пополнении области по метрике Мазуркевича. Если взять другую метрику, отличную от метрики Мазуркевича, то получим другую обобщенную границу. В работе рассмотрен класс метрик в областях с локально конечно связной границей, удовлетворяющих некоторым аксиомам. Доказано, что любые две такие метрики задают гомеоморфные обобщенные границы. Таким образом, можно ввести обобщенную границу области с локально конечно связной границей, которая зависит только от топологии области. В качестве следствия этих результатов получены теоремы о взаимосвязи простых концов [9] (границы Мазуркевича) и емкостной границы в ограниченных областях с локально конечно связной границей в римановых многообразиях.

В статье приводятся иллюстрирующие примеры вводимых понятий, а также примеры, устанавливающие существенность условий некоторых теорем.

Приведем краткое описание структуры работы.

В разд. 1 приведены необходимые сведения о римановых пространствах, пространствах Соболева и емкости на римановых многообразиях.

Разд. 2 начинается с доказательства леммы 2.2, где устанавливается взаимосвязь между диаметром пластин конденсатора и емкостью конденсатора. В области D риманова многообразия M , $\dim M = n$, фиксируем континуум F такой, что $D \setminus F$ связно, и определяем емкостную метрику $\rho_{p,F}$, где $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), следуя [7]. Такой выбор показателя p связан с тем, что при $p > n$ p -емкость точки всегда больше нуля, а при $p \leq n-1$ (если $n \geq 3$) p -емкость спрямляемой кривой равна нулю (см., например, [10, гл. 4]). Благодаря лемме 2.2 топология, индуцированная емкостной метрикой, эквивалентна исходной топологии в области. Вводится емкостная граница — присоединенные элементы при пополнении области по емкостной метрике $\rho_{p,F}$. В этом же разделе устанавливается теорема о независимости граничных элементов от выбора континуума F , изучаются взаимосвязи между граничными элементами при разных показателях.

В разд. 3 устанавливаются теоремы о граничном поведении для замкнутых отображений с ограниченным искажением: образ емкостного граничного элемента — емкостный граничный элемент. В качестве следствия данного подхода получено описание граничного поведения квазиконформных отображений в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, рассмотрен вопрос о существовании квазиконформного отображения между областью с гребнем и шаром.

Разд. 4 посвящен обобщенным границам в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Если в области D задана метрика ρ , то можно пополнить область по данной метрике. Присоединенные точки — элементы обобщенной границы $\partial_\rho D$. Приводятся условия на метрику, которые характеризуют обобщенную границу $\partial_\rho D$ с точностью до гомеоморфизма, устанавливаются свойства такой границы. В качестве следствия получены теоремы о непрерывной сюръекции границы простых концов [9] на емкостную

границу в областях римановых многообразий. Приведены достаточные условия на геометрию границы, при которых любой из подходов — граница Мазуркевича, граница простых концов, емкостная граница, обобщенная граница $\partial_g D$ — определяет одну и ту же обобщенную границу.

1. Предварительные сведения

Римановы многообразия. Подробное изложение римановой геометрии можно найти, например, в [11, 12].

Пусть M — n -мерное полное связное некомпактное риманово многообразие класса C^∞ с метрическим тензором g . Для точки $x \in M$ обозначим касательное пространство символом $T_x M$, и TM — касательное расслоение. Расстояние между точками $x, y \in M$ определяется как точная нижняя грань длин абсолютно непрерывных кривых γ с концевыми точками x и y :

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

где $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$.

В силу теоремы Ринова — Хопфа многообразие M геодезически полно и, следовательно, любые две точки $x, y \in M$ можно соединить геодезической длины $d(x, y)$. Полное риманово многообразие M обладает свойством Гейне — Бореля, т. е. любое замкнутое и ограниченное множество компактно.

Будем обозначать символом $B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$ *открытый шар* в римановой метрике, а символом $B^E(x, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$.

Объем в многообразии M определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта в M . Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ как изометрию между U и $(\varphi(U), \tilde{g})$, где $\tilde{g}_x(X, Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x \mathbb{R}^n$. Множество E , содержащееся в карте U , называется *измеримым*, если $\varphi(E)$ измеримо; объем E определяется формулой

$$\text{vol}_g(E) = \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det \tilde{g}} dx.$$

Объем произвольного множества E определяется как точная нижняя грань сумм

$$\text{vol}_g(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_g(E_i),$$

где $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, множества E_i дизъюнкты, измеримы и каждое содержится в одной карте.

Для функций $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 определен дифференциал $df : TM \rightarrow T\mathbb{R}$, в каждой карте (U, φ) дифференциал задается с помощью частных производных $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал в пространстве со скалярным произведением $(T_x M, g_x)$, существует единственный вектор ∇f , называемый *градиентом*, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_x M$. В координатах градиент ∇f выражается следующей формулой:

$$\nabla f = g^{-1} \frac{\partial f}{\partial x},$$

где g^{-1} — обратная матрица к g (кометрика), $\frac{\partial f}{\partial x}$ — вектор частных производных. Евклидов градиент $\frac{\partial f}{\partial x}$ обозначается символом $\nabla^E f$.

Пространства Соболева и емкость. Пусть E — измеримое множество в M . Пространства $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$, определяются стандартным образом. Норма функции $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ в $L_p(E)$ определяется по формуле

$$\|u\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |u|^p d\text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если функция u принадлежит пространству $L_p(K)$ для каждого компакта $K \subset E$, то u принадлежит пространству $L_{p,\text{loc}}(E)$.

Пусть $D \subset M$ — открытое множество. Функция $f \in L_{1,\text{loc}}(D)$ принадлежит пространству $L_p^1(D)$, $1 \leq p < \infty$, если существует векторное поле $X_f \in L_p(D)$ ¹⁾ такое, что равенство

$$\int_D f \operatorname{div} \varphi d\text{vol}_g = - \int_D g(X_f, \varphi) d\text{vol}_g$$

выполняется для всех векторных полей φ класса $C_0^1(D; TM)$, где $\operatorname{div} \varphi$ — дивергенция поля φ . Векторное поле X_f — *обобщенный градиент* функции f , обозначаемый далее символом ∇f . Полунорма в $L_p^1(D)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{L_p^1(D)} = \|\nabla f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D \|\nabla f\|^p d\text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство Соболева $W_p^1(D)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из функций $f \in L_p(D) \cap L_p^1(D)$. Норма в пространстве W_p^1 определяется равенством

$$\|f\|_{W_p^1(D)} = \|f\|_{L_p(D)} + \|f\|_{L_p^1(D)}.$$

Отметим, что соболевская функция $f \in L_p^1(M)$ в локальных координатах (U, φ) есть функция класса $L_{p,\text{loc}}^1(\varphi(U))$ в евклидовом смысле. При этом на каждом компакте норма градиента $\|\nabla f\|$ билипшицево эквивалентна норме $\|\nabla^E(f \circ \varphi^{-1})\|$. Пространство $W_{p,\text{loc}}^1(D)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из функций $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $u \in W_p^1(U)$ для любой компактно вложенного²⁾ открытого множества $U \Subset D$.

Более подробно о соболевских пространствах на римановых многообразиях см., например, [13].

Как обычно, *область* — открытое связное множество. Множество F называется *континуумом*, если F — связное компактное множество; F — *невырожденный континуум*, если F содержит хотя бы 2 точки. *Конденсатором* в области $D \subset M$ называется пара $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ континуумов $F_1, F_0 \subset M$. Если $F \Subset U$, то будем обозначать конденсатор $(F, \partial U)$ как пару (F, U) .

Непрерывная функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежащая пространству $W_{1,\text{loc}}^1(D)$, называется *допустимой для конденсатора* $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$, если

$$(1) u|_{F_1} \equiv 1, \quad (2) u|_{F_0} \equiv 0, \quad (3) 0 \leq u \leq 1,$$

¹⁾ Векторное поле X_f принадлежит пространству $L_p(D)$, если коэффициенты поля X_f суть функции класса $L_p(D)$.

²⁾ Множество $U \subset D$ называется *компактно вложенным*, если $\overline{U} \subset D$ и $\overline{U}$ компактно в D .

где $u|_{F_i}$ — сужение функции u на F_i , $i = 0, 1$. Множество таких функций будем обозначать символом $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Емкость конденсатора $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ в пространстве $L_p^1(D)$, $1 \leq p < \infty$, определяется следующим образом:*

$$\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D)) = \inf_{u \in \mathcal{A}(\mathcal{E}) \cap L_p^1(D)} \int_D \|\nabla u\|^p d \text{vol}_g.$$

Если множество функций $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \cap L_p^1(D)$ пусто, то полагаем $\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D)) = +\infty$.

Из определения емкости следует свойство монотонности.

Лемма 1.2. *Пусть $D, \tilde{D}$ — открытые множества в M такие, что $D \subset \tilde{D}$ и $\mathcal{E} = (T_1, T_0)$, $\mathcal{E}' = (T'_1, T'_0)$ — конденсаторы, где $T_i \subset T'_i$ для $i = 0, 1$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда выполнены следующие соотношения:*

$$\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D)) \leq \text{cap}(\mathcal{E}'; L_p^1(D)) \leq \text{cap}(\mathcal{E}'; L_p^1(\tilde{D})).$$

ПРИМЕР 1.3 (см., например, [14, пример 2.12]). В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, емкость кольцевого сферического конденсатора $\mathcal{E} = (B^E(x_0, r), B^E(x_0, R))$ выражается следующей формулой при $1 < p < \infty$:

$$\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(B^E(x_0, R))) = \begin{cases} \omega_{n-1} \left(\frac{|n-p|}{p-1} \right)^{p-1} |R^{\frac{p-n}{p-1}} - r^{\frac{p-n}{p-1}}|^{1-p}, & \text{если } p \neq n, \\ \omega_{n-1} \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1-n}, & \text{если } p = n. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.4. Пусть M — полное связное некомпактное риманово многообразие. Скалярное произведение на TM будем обозначать символом g , индуцированная метрика обозначается через d и vol_g — объем в многообразии M .

Тогда замыкание любой компактно вложенной подобласти $U \Subset M$ с индуцированным расстоянием d и объемом vol_g обладает следующими свойствами:

(1) пространство $\overline{U}$ обладает свойством Гейне — Бореля (proper space), т. е. любое замкнутое и ограниченное множество в $\overline{U}$ компактно;

(2) для каждого шара $B \subset \overline{U}$ выполняется (1, 1)-неравенство Пуанкаре: существует константа $C = C(U)$ такая, что для любой функции $u \in C^\infty(B)$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\text{vol}_g(B)} \int_B |u - u_B| d \text{vol}_g \leq C \text{rad}(B) \frac{1}{\text{vol}_g(B)} \int_B \|\nabla u\| d \text{vol}_g,$$

где $u_B = \text{vol}_g(B)^{-1} \int_B u d \text{vol}_g$ (доказательство неравенства Пуанкаре может быть получено аналогично [15, теорема 3.38 и § 3.3.6]);

(3) мера vol_g , ассоциированная с метрикой многообразия, n -Альфортс регулярна на внутренних шарах, т. е. существует константа $C > 0$ такая, что для любого шара $B \subset U$ выполняется двустороннее неравенство

$$\frac{1}{C} \text{rad}(B)^n \leq \text{vol}_g(B) \leq C \text{rad}(B)^n.$$

Свойства (1), (3) могут быть доказаны с помощью перехода в локальные карты.

В работе [16] были получены оценки на модуль кривых, соединяющих пластины кольцевых сферических конденсаторов в метрических пространствах с

мерой, удовлетворяющих свойствам (1)–(3) (в римановых многообразиях модуль семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора $(B(x, r), B(x, R))$, и емкость этого конденсатора совпадают, см., например, [17, предложение 10.2, замечание 10.8]).

Для конденсатора $\mathcal{E} = (B(x, r), B(x, R))$, где $0 < 2r < R$ и $B(x, R) \Subset U$, p -емкость оценивается сверху (см. [16, теорема 3.1]):

$$\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(U)) \leq \begin{cases} C_1 \frac{F(r/4, R)}{F(2r, R)^p}, & \text{если } 1 \leq p < n, \\ C_2 (\ln \frac{R}{r})^{1-n}, & \text{если } p = n, \end{cases}$$

где $F(r, R) = c(r^{1-\alpha} - R^{1-\alpha})$ и $\alpha = \frac{n-1}{p-1}$, константы C_1, C_2 зависят от области U .

Емкость конденсатора $\mathcal{E}$, где $0 < r < R$ и $B(x, 2R) \Subset U$, также оценивается снизу (см. [16, теоремы 4.3, 4.9]):

$$\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(U)) \geq \begin{cases} c_1 R^{n-p}, & \text{если } p > n, \\ c_2 \frac{r^{np}}{R^{np+p-n}}, & \text{если } 1 \leq p \leq n, \end{cases}$$

где константы c_1, c_2 зависят от области U .

Введем понятие p -параболического и p -гиперболического римановых многообразий (см., например, [18, 19]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Многообразие M имеет p -параболический тип, если для некоторого $t_0 > 0$ и некоторой точки $x \in M$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{cap}((B(x, t_0), B(x, t)); L_p^1(M)) = 0.$$

Если же имеет место неравенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{cap}((B(x, t_0), B(x, t)); L_p^1(M)) > 0,$$

то многообразие M имеет p -гиперболический тип.

Отметим, что p -параболичность можно определить, используя функцию исчерпания (более подробно см. [18]).

Гиперболичность и параболичность многообразия также связана с существованием непостоянных положительных решений уравнения типа p -лапласиана и свойствами изопериметрических функций (см., например, работы [18–21]).

ПРИМЕР 1.6. Из примера 1.3 выводим, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой имеет p -параболический тип при $p \geq n$. При $1 < p < n$ евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ имеет p -гиперболический тип.

ПРИМЕР 1.7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (см., например, [22, гл. 4]) — единичный евклидов круг $B^E(0, 1) = \{x^2 + y^2 < 1\}$ с метрическим тензором

$$g = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} \text{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Отметим, что метрика g в $\mathbb{H}^2$ конформно-евклидова, следовательно, тождественное отображение $\text{Id} : (\mathbb{H}^2, g) \rightarrow (B^E(0, 1), \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ конформно. Очевидно, что 2-емкость в $\mathbb{H}^2$ и 2-емкость в круге $B^E(0, 1)$ совпадают.

Расстояние в гиперболической плоскости d до точки 0 выражается через евклидово расстояние $|\cdot|$ следующим образом: $d(0, z) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$. Тогда приходим к соотношениям на емкость конденсаторов $\mathcal{E}_t = (B(0, t_0), B(0, t))$

$$\text{cap}(\mathcal{E}_t; L_2^1(\mathbb{H}^2)) \rightarrow \text{cap}((B^E(0, t_0), B^E(0, 1)); L_2^1(\mathbb{R}^2)) > 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $\tilde{t}_0 = \frac{e^{t_0}-1}{e^{t_0}-1}$ — евклидов радиус круга $B(0, t)$ в $\mathbb{H}^2$.

Таким образом, гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$ — многообразие 2-гиперболического типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. В примерах с гиперболической плоскостью (примеры 1.7, 2.13, 3.12) можно рассматривать не только двумерный случай, но и произвольное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ (модель в шаре $B^E(0, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой $g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$).

ПРИМЕР 1.9 [23, пример 5.3]. 1. Полное риманово многообразие M конечного объема $\text{vol}_g(M) < \infty$ имеет p -параболический тип для всех $p \geq 1$.

2. Пусть M — многообразие Картана — Адамара, т. е. полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Если секционная кривизна K_M имеет отрицательную мажоранту $K_M < -a^2 < 0$, то M имеет p -гиперболический тип для $p \geq 1$.

2. Емкостные граничные элементы и их свойства

Емкостная метрическая функция и ее свойства. Введем емкость компакта в пространстве W_p^1 , $1 \leq p < \infty$. Пусть D — область в римановом многообразии M размерности $n \geq 2$, E — некоторый компакт в D и $p \geq 1$. Определим емкость компакта E по формуле

$$\text{cap}(E; W_p^1(D)) = \inf \|u\|_p, \quad u|_E = 1,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(D)$ таким, что $u = 1$ в окрестности E .

Сформулируем некоторые свойства этой емкости.

Лемма 2.1. Пусть $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$) и D — область в M . Выполнены следующие утверждения:

(1) если континуумы E_k содержатся в $U \Subset M$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и

$$\text{cap}(E_k; W_p^1(U)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

то $\text{diam } E_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;

(2) если E — невырожденный континуум, то $\text{cap}(E; W_p^1(D)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (1) достаточно рассмотреть конечное покрытие U картами $(V_i, \varphi_i)_{i=1}^N$, при этом можно считать, что $\varphi_i(V_i) = B^E(0, 1)$, и подчиненное разбиение единицы $(\lambda_i)_{i=1}^N$. Применяя [24, § 9.1.2, предложение 1], получаем, что диаметры $E_k \cap \text{supp } \lambda_i$ стремятся к нулю для всех $i = 1, \dots, N$, отсюда заключаем, что $\text{diam } E_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

П. (2) может быть доказан с помощью переноса допустимой функции в локальную карту (V, φ) со свойством $\varphi(V) = B^E(0, r)$, где образ $\varphi(E)$ содержит невырожденный субконтинуум. Продолжая перенесенную функцию с шара $B^E(0, r)$ и применяя [24, § 9.1.2, предложение 1], получаем требуемое.

В силу ACL свойства соболевских функций и формулы Ньютона — Лейбница в $\mathbb{R}^2$ на 1-емкость компакта $E \subset D$ выполняется следующее соотношение: $\text{diam } E \leq \text{cap}(E; L_1^1(D))$ (ср. с [24, § 9.1.2, предложение 1]). Значит, при $n = 2$ утверждения пп. (1), (2) выполняются при $1 \leq p \leq 2$. $\square$

Следующая лемма изначально была доказана в $\mathbb{R}^n$ в работе [7]. Приведем ее доказательство в случае римановых многообразий с некоторыми модификациями.

Лемма 2.2. Пусть D — область в римановом многообразии M , $\dim M = n$, и T — невырожденный континуум в D , B — фиксированный шар такой, что $\overline{B} \cap T = \emptyset$. Предположим также, что $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$) и $(T_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность континуумов, содержащихся в B .

Соотношение $\text{cap}((T_{1,k}, T); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\text{diam}(T_{1,k}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Так как емкость монотонна (см. лемму 1.2), без ограничения общности можно считать, что континуум T содержится в некотором шаре B' и $\overline{B} \cap \overline{B'} = \emptyset$.

Пусть $n - 1 < p < n$. Пусть также $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такая последовательность функций, что u_k — допустимая функция для конденсатора $(T_{1,k}, T)$ и имеет место сходимость

$$\int_D \|\nabla u_k\|^p d \text{vol}_g \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Покажем, что последовательность $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю в $L_{1,\text{loc}}(D)$. Для этого воспользуемся неравенством Пуанкаре в шаре B' (см. пример 1.4)

$$\frac{1}{\text{vol}_g(B')} \int_{B'} |u_k - c_k| d \text{vol}_g \leq C \text{diam}(B') \left(\frac{1}{\text{vol}_g(B')} \int_{B'} \|\nabla u_k\|^p d \text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

В силу неравенства (1) заключаем, что $u_k \rightarrow c_k$ в $L_1(B')$, при этом $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность. Значит, с точностью до подпоследовательности имеет место сходимость $u_k \rightarrow c_0$ при $k \rightarrow \infty$ в $L_1(B')$.

Допустим, что $c_0 \neq 0$. Тогда функции $v_k = \frac{c_0 - u_k}{c_0}$ обладают следующими свойствами:

$$(a) \|v_k\|_{W_p^1(B')} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (b) v_k|_T = 1.$$

Из свойств (a), (b) следует, что $\text{cap}(T; W_p^1(B')) = 0$; противоречие с п. (2) леммы 2.1, значит, $c_0 = 0$.

Покажем, что имеет место сходимость $u_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $L_{1,\text{loc}}(D)$. Рассматривая произвольный шар $\tilde{B}$ в D , который пересекается с B' по множеству ненулевой меры, в силу неравенства Пуанкаре (1) в шаре $\tilde{B}$ получаем, что $u_k \rightarrow 0$ в $L_1(\tilde{B})$. Таким образом, в силу связности D получаем, что $u_k \rightarrow 0$ в $L_{1,\text{loc}}(D)$.

Применяя неравенство Пуанкаре в шаре B_1 , заключаем, что последовательность $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к 0 при $k \rightarrow \infty$ в пространстве $W_p^1(B_1)$, следовательно, имеет место сходимость $\text{diam } T_{1,k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в силу леммы 2.1 п. (1).

Случай $p = n$ сводится к рассмотренной ситуации с помощью рассуждения, приведенного в [7, лемма 2.1].

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Допустим противное: $\text{diam}(T_{1,k}) \rightarrow 0$ и существует константа β такая, что выполняется неравенство

$$\text{cap}((T_{1,k}, T); L_p^1(D)) \geq \beta > 0 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, так как $\text{diam}(T_{1,k}) \rightarrow 0$, то можно считать, что некоторая подпоследовательность континуумов $(T_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ (обозначена тем же символом) содержится в достаточно малом шаре $B(x_0, \varepsilon)$ и существует шар $B(x_0, r)$ такой, что дополнение $D \setminus B(x_0, r)$ содержит фиксированный континуум T . Используя

лемму 1.2 и оценки емкости сферического кольцевого конденсатора из примера 1.4, получаем противоречие. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Доказательство леммы 2.2 не изменится, если вместо фиксированного континуума T рассмотреть конечное дизъюнктивное объединение континуумов. Следовательно, дальнейшие результаты о емкостных граничных элементах тоже не изменятся.

Фиксируем невырожденный континуум F в области $D \subset M$, $\dim M = n$, такой, что $D \setminus F$ — связное множество. Следуя [7], определим емкостную метрическую функцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Емкостная метрическая функция между точками x, y из $D \setminus F$ определяется по формуле

$$\rho_{p,F}(x, y) = \inf_{\gamma} \text{cap}((\gamma, F); L_p^1(D))^{1/p},$$

где инфимум берется по всем кривым γ в $D \setminus F$ с концевыми точками x, y .

Теорема 2.5. В случае $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$) метрическая функция $\rho_{p,F}$ — метрика в области $D \setminus F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аксиомы симметричности и неравенства треугольника для функции $\rho_{p,F}$ проводится аналогично евклидову случаю, описанному в [7]. Докажем аксиому тождества: $\rho_{p,F}(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Равенство $\rho_{p,F}(x, x) = 0$ следует из оценки на емкость сферического кольцевого конденсатора (см. пример 1.4). Пусть $\rho_{p,F}(x, y) = 0$, и допустим, что $x \neq y$. Тогда существуют кривые γ_k , соединяющие точки x, y для всех $k = 1, 2, \dots$, и $\text{cap}((\gamma_k, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, точка x содержится в некотором шаре $B(x, r)$, при этом $\overline{B(x, r)}$ не пересекается с точкой y , поэтому диаметр любой подкривой $\tilde{\gamma}_l$, содержащейся в $B(x, r)$, больше либо равен r . Следовательно, $\text{diam}(\tilde{\gamma}_l) \geq r$, что противоречит лемме 2.2. $\square$

Далее в работе рассматриваем только те p , которые удовлетворяют неравенству $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$).

Следующее утверждение показывает, что сходимость по емкостной метрике к точке $y \in D \setminus F$ эквивалентна сходимости в римановой метрике.

Предложение 2.6. Пусть $y \in D \setminus F$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — некоторая последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\rho_{p,F}(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$,
- 2) $d(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модифицируя доказательство [7, предложение 2.10] очевидным образом и учитывая, что $\text{cap}((\{x\}, F); L_p^1(D)) = 0$ для всех $x \in D \setminus F$ (см. пример 1.4), получаем требуемое. $\square$

Обозначим символом $\overline{M}$ одноточечную компактификацию многообразия M (компактификацию Александрова), см., например, [25, гл. 4, § 41(X), теорема 5]. Присоединенную точку будем обозначать символом ∞ . Напомним, что окрестности точки ∞ суть все множества вида $M \setminus K$, где K — компактное множество в M .

Пополнение области по емкостной метрике. Пусть F — фиксированный континуум в области D такой, что $D \setminus F$ связно и $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$). Обозначим символом $D_{\rho,p}$ метрическое пространство $D \setminus F$ с

метрикой $\rho_{p,F}$. Определим отношение эквивалентности на фундаментальных в метрике $\rho_{p,F}$ последовательностях $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}, (z_l)_{l \in \mathbb{N}}$ в $D_{\rho,p}$ по правилу

$$(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \sim (z_l)_{l \in \mathbb{N}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \rho_{p,F}(y_l, z_l) \rightarrow 0.$$

Тогда множество эквивалентных последовательностей с метрикой

$$\rho_{p,F}(h_1, h_2) = \lim_{l \rightarrow \infty} \rho_{p,F}(x_l, y_l),$$

где $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}, (y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ суть представители классов h_1, h_2 соответственно, образует метрическое пространство, которое обозначим символом $\overline{D_{\rho,p}}$. По теореме Хаусдорфа (см. [26]) пространство $\overline{D_{\rho,p}}$ — полное метрическое пространство. Далее, если $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в метрике $\rho_{p,F}$, то символом $[(x_l)_{l \in \mathbb{N}}]$ будем обозначать класс эквивалентности данной последовательности.

Сформулируем возможное поведение представителей классов в пространстве $\overline{D_{\rho,p}}$.

Теорема 2.7. Пусть $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ — класс эквивалентности последовательностей и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель класса h . Тогда возможно следующее поведение $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$:

(1.1) $y_l \rightarrow y \in D \setminus F$ в римановой метрике при $l \rightarrow \infty$ и предел y не зависит от выбора представителя $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$;

(1.2) $y_l \rightarrow y \in F$ в римановой метрике при $l \rightarrow \infty$ и предел y не зависит от представителя $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

В противном случае выполняется следующее:

(2.1) если последовательность $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ограничена в римановой метрике, то имеет место сходимость $\text{dist}(y_l, \partial D) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;

(2.2) если $\lim_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то $\text{dist}(y_{l_k}, \partial D') \rightarrow 0$ для любой ограниченной подпоследовательности $(y_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$;

(2.3) если $\lim_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) = \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то последовательность $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $y = \infty$ в топологии пространства $\overline{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данного утверждения повторяет шаги доказательства предложения 2.17 в [7] с необходимыми изменениями. $\square$

При пополнении $D \setminus F$ по емкостной метрике $\rho_{p,F}$ точки $y \in D \setminus F$ отождествляются естественным образом с классом эквивалентности постоянной последовательности $i(y) = (y, y, \dots)$. Из теоремы 2.7 выводим, что если $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель класса $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ и $y_l \rightarrow y \in D \setminus F$ в римановой метрике при $l \rightarrow \infty$, то $h = [i(y)]$.

Обозначим символом $[D]$ все классы фундаментальных последовательностей в емкостной метрике, частичные пределы которых в римановой метрике принадлежат D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Дополнение $H_{\rho,p}(D) = \overline{D_{\rho,p}} \setminus [D]$ называется *емкостной границей* области D . Метрика на $H_{\rho,p}(D)$ — сужение метрики $\rho_{p,F}$. Классы эквивалентности в $H_{\rho,p}(D)$ называются *емкостными граничными элементами*.

Определим носитель граничного элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$. Тогда *носитель* $\mathcal{S}(h)$ граничного элемента h есть множество всех частичных пределов представителей $(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \in h$ в топологии пространства $\overline{M}$.

Из теоремы 2.7 следует, что носитель $\mathcal{S}(h)$ содержится в $\partial D \cup \{\infty\}$ для любого граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$. Используя теорему 2.7, выводим, что $H_{\rho,p}(D)$ — замкнутое подмножество в $\overline{D_{\rho,p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Пусть $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$. Из фундаментальности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ в емкостной метрике следует, что для любых подпоследовательностей $(x_{l_m})_{m \in \mathbb{N}}$, $(x_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$ существуют кривые γ_{mk} , соединяющие точки x_{l_m} , x_{l_k} , такие, что

$$\text{cap}((\gamma_{mk}, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0 \quad \text{при } m, k \rightarrow \infty.$$

Покажем, что кривые γ_{mk} покидают любой компакт $K \subset D$ для достаточно больших m и k . Допустим, что это не так: существуют подпоследовательности $(x_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$ и $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, компакт $K \subset D$ и кривые γ_k , соединяющие точки x_{l_k} и x_{m_k} , такие, что $\text{cap}((\gamma_k, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и при этом найдутся точки $z_k \in \gamma_k$ такие, что $z_k \in K$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда $\rho_{p,F}(x_{l_k}, z_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в силу монотонности емкости (см. лемму 1.2) и, значит, последовательность $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна в емкостной метрике $\rho_{p,F}$ и принадлежит классу h . Отсюда следует, что носитель h будет содержать некоторую точку $z_0 \in K \subset D$; противоречие с теоремой 2.7.

Рассмотрим примеры емкостных граничных элементов в некоторых областях.

ПРИМЕР 2.11 (область с гребнем I). Пусть $2 < p \leq 3$ и $\alpha > p - 1$. Положим

$$R^\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| < x^\alpha, x \in (0, 1), z \in (-1, 1)\},$$

и пусть $R = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [-1, 1]\}$ — гребень. Фиксируем континуум F в R^α такой, что $R^\alpha \setminus F$ связно. Тогда гребень R — носитель *одного* граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(R^\alpha)$.

Используя кусочно-линейные функции, выводим, что $\text{cap}(C_\varepsilon; L_p^1(R^\alpha)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где $C_\varepsilon = (R^\alpha \cap \{x \leq \varepsilon\}, F)$. Из этого получаем следующее:

(1) любая последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к гребню R в евклидовой метрике, фундаментальна в метрике $\rho_{p,F}$,

(2) любые две последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящиеся к гребню R в евклидовой метрике, эквивалентны по метрике $\rho_{p,F}$.

ПРИМЕР 2.12 («расческа тополога» I). Пусть $1 \leq p \leq 2$ и S — квадрат $(0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Удалим из S отрезок $I_k = [1/2, 1] \times \{2^{-k}\}$ для каждого $k = 1, 2, \dots$. Полученную область обозначим символом D . Тогда отрезок $J = [1/2, 1] \times \{0\}$ — носитель *одного* граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$.

Рассмотрим множества $E_k = ((1/2 - 2^{-k}, 1) \times (0, 2^{-k})) \cap D$ с границей C_k в D . Из монотонности емкости (см. лемму 1.2) и леммы 2.2 следует, что $\text{cap}((C_k, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, любая последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к J в евклидовой топологии, будет фундаментальна в емкостной метрике, так как точки x_m и x_n можно соединить кривой $\gamma_{mn} \subset E_k$ для некоторого k , при этом $k \rightarrow \infty$ при $m, n \rightarrow \infty$ (рис. 1). Из сходимости $\text{cap}((C_k, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ выводим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\text{cap}((\gamma_{mn}, F); L_p^1(D)) \leq \text{cap}((E_k, F); L_p^1(D)) = \text{cap}((C_k, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0.$$

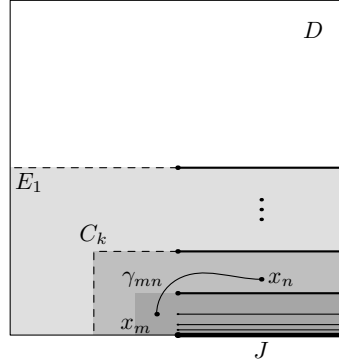


Рис. 1. К примеру 2.12.

Аналогично можно показать, что любые две последовательности, сходящиеся к отрезку J в евклидовой метрике, эквивалентны в метрике $\rho_{p,F}$.

ПРИМЕР 2.13. Пусть F — замыкание евклидова шара $B^E(0, a)$, где a — некоторое число, $0 < a < 1$. Рассмотрим гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2$ и емкостную метрику $\rho_{2,F}$ в ней.

Как было замечено в примере 1.7, 2-емкость в $\mathbb{H}^2$ совпадает с евклидовой 2-емкостью. Так как $\mathbb{H}^2$ — единичный круг $B^E(0, 1)$, то для любой функции из пространства $L_2^1(\mathbb{H}^2)$ существует продолжение $\tilde{u} \in L_2^1(\mathbb{R}^2)$ (здесь пространство Соболева в евклидовом смысле). Отсюда заключаем, что в гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ метрика $\rho_{2,F}$ билиппшицево эквивалентна емкостной метрике $\rho_{2,F}^E$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$. В силу леммы 2.2 сходимость по метрике $\rho_{2,F}^E$ эквивалентна сходимости в евклидовой топологии.

Таким образом, приходим к описанию емкостных граничных элементов в $\mathbb{H}^2$:

$$H_{\rho,2}(\mathbb{H}^2) = \partial B^E(0, 1).$$

Отметим, что окружность $\partial B^E(0, 1)$ — абсолют (идеальная граница) гиперболической плоскости (см., например, [22]). Представители граничных элементов $h \in H_{\rho,2}(\mathbb{H}^2)$ суть все последовательности, сходящиеся в евклидовой топологии к фиксированной точке на окружности $\partial B^E(0, 1)$.

Теперь рассмотрим одноточечную компактификацию $\mathbb{H}^2$. При компактификации присоединенная точка ∞ отождествляется со всеми точками граничной окружности (абсолюта). Пусть $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — последовательности, сходящиеся к различным точкам x и y на граничной окружности. Обозначим классы эквивалентности последовательностей $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ символами h_x и h_y соответственно. Эти последовательности неэквивалентны, так как евклидово расстояние между точками x_l и y_l ограничено снизу для всех l , начиная с некоторого номера. С другой стороны, $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y) = \{\infty\}$ и гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$ локально связна³⁾ в точке ∞ .

Совпадение носителей различных элементов h_x , h_y связано с тем, что емкость точки ∞ не равна 0 (см. пример 1.7).

Существование различных граничных элементов $H_{\rho,p}(M)$ с совпадающими носителями — бесконечно удаленной точкой ∞ — достаточное условие p -гиперболичности многообразия.

³⁾Область D называется *локально связной* в точке $x \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x существует подокрестность V такая, что $V \cap D$ связно.

Предложение 2.14. Пусть M локально связно в точке ∞ . Если существуют два различных граничных элемента $h_1, h_2 \in H_{\rho,p}(M)$ такие, что $\mathcal{S}(h_1) = \mathcal{S}(h_2) = \{\infty\}$, где ∞ — присоединенная точка в $\overline{M}$, то многообразие M имеет p -гиперболический тип.

Доказательство. Фиксируем шар $B(x_0, r)$ и положим $F = \overline{B(x_0, r)}$ (пространство граничных элементов не зависит от выбора континуума F , см. теорему 2.16 ниже). Пусть h_1, h_2 — различные граничные элементы. Тогда существуют ρ -фундаментальные последовательности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}, (y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ такие, что $d(x_l, x_0) \rightarrow \infty$ и $d(y_l, x_0) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ для некоторой точки $x_0 \in M$. Без ограничения общности можно считать, что точки x_l, y_l содержатся в дополнении $M \setminus B(x_0, R_l)$, где R_l — некоторый радиус, $R_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Так как M локально связно в ∞ , точки x_l, y_l можно соединить кривой γ_l , содержащейся в $M \setminus B(x_0, R_l)$. Отсюда выводим неравенства

$$0 < \rho(h_1, h_2)^p \leq \text{cap}((\gamma_n, B(x_0, r)); L_p^1(M)) \\ \leq \text{cap}((M \setminus B(x_0, R_l), B(x_0, r)); L_p^1(M)).$$

Следовательно, M имеет p -гиперболический тип. $\square$

Замечание 2.15. Условие локальной связности в ∞ существенно. Если M — боковая поверхность цилиндра, то M имеет p -параболический тип при $p > 1$. С другой стороны, на цилиндре существуют неэквивалентные емкостные граничные элементы с носителями в точке ∞ .

Свойства граничных элементов в целом. Следующая теорема показывает, что емкостные граничные элементы не зависят от выбора континуума F .

Теорема 2.16. Пусть D — область в M и $F, \tilde{F}$ — дизъюнктные континуумы в D такие, что $D \setminus F$ и $D \setminus \tilde{F}$ связны, $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$). Тогда существует гомеоморфизм между $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\tilde{\rho},p}(D)$, где $\rho = \rho_{p,F}$, $\tilde{\rho} = \rho_{p,\tilde{F}}$.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.17. Пусть $(\gamma_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — последовательность кривых таких, что γ_l не пересекается с F и $\tilde{F}$ для всех $l = 1, 2, \dots$, и $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$). Тогда соотношение $\text{cap}((\gamma_l, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\text{cap}((\gamma_l, \tilde{F}); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\text{cap}((\gamma_l, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда существует последовательность функций $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ такая, что каждая функция u_l — допустимая функция для конденсатора (γ_l, F) , и выполняется соотношение

$$\int_D \|\nabla u_l\|^p d \text{vol}_g \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Рассуждая аналогично доказательству необходимости в лемме 2.2, заключаем, что $u_l \rightarrow 0$ в пространстве $L_{1,\text{loc}}(D)$ при $l \rightarrow \infty$. Значит, выделяя подпоследовательность, можно считать, что также имеет место сходимость $u_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ п. в. в D .

Пусть v — функция класса $L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $v|_{\tilde{F}} = 0$ и $v = 1$ вне некоторой окрестности континуума $\tilde{F}$, $0 \leq v \leq 1$. Тогда функции $\tilde{u}_l = u_l v$ будут

допустимыми для конденсаторов $(\gamma_l, \tilde{F})$ и выполняется неравенство

$$\left(\int_D \|\nabla \tilde{u}_l\|^p d \operatorname{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_D \|\nabla u_l\|^p v^p d \operatorname{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D \|\nabla v\|^p u_l^p d \operatorname{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, $\operatorname{cap}((\gamma_l, \tilde{F}); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

В силу симметрии между F и $\tilde{F}$ лемма доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2.16.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.16. Фиксируем дизъюнктные континуумы F и $\tilde{F}$ в D и обозначим $\rho = \rho_{p,F}$, $\tilde{\rho} = \rho_{p,\tilde{F}}$.

Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$ — граничный элемент и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \in h$ — представитель этого элемента.

ШАГ 1. Покажем, что $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в метрике $\tilde{\rho}$.

Допустим противное: последовательность $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ не фундаментальна в метрике $\tilde{\rho}$. Значит, существуют подпоследовательности $(y_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ такие, что $\tilde{\rho}(y_{m_l}, y_{k_l}) > \beta$ для некоторого числа $\beta > 0$. С другой стороны, исходная последовательность фундаментальна в метрике ρ , поэтому $\rho(y_{m_l}, y_{k_l}) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Пусть $(\gamma_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — последовательность кривых с концевыми точками y_{m_l} и y_{k_l} , которые не пересекаются с F и $\tilde{F}$, и $\operatorname{cap}((\gamma_l, F); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ (такие кривые существуют в силу замечания 2.10). Тогда по лемме 2.17 заключаем, что $\operatorname{cap}((\gamma_l, \tilde{F}); L_p^1(D)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\tilde{\rho}(y_{m_l}, y_{k_l}) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$; противоречие.

ШАГ 2. Итак, полагаем $\Phi(h) = [(y_l)_{l \in \mathbb{N}}]_{\tilde{\rho}}$. В силу леммы 2.17 это определение корректно. При этом из определения носителя заключаем, что $\mathcal{S}(h) = \mathcal{S}(\Phi(h))$.

ШАГ 3. Чтобы показать непрерывность Φ достаточно показать, что из сходимости $\rho(h^l, h) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ следует, что $\tilde{\rho}(\Phi(h^l), \Phi(h)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Рассуждая от противного аналогично шагу 1, получаем непрерывность Φ .

Таким образом, в силу симметрии между F и $\tilde{F}$ отображение $\Phi : H_{\rho,p}(D) \rightarrow H_{\tilde{\rho},p}(D)$ — гомеоморфизм. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Теорема 2.16 верна в случае, когда континуумы F и $\tilde{F}$ пересекаются. Действительно, рассмотрим третий континуум F' , который не пересекается с F и $\tilde{F}$. Тогда существуют гомеоморфизмы $H_{\rho,p}(D) \rightarrow H_{\rho',p}(D)$ и $H_{\rho',p}(D) \rightarrow H_{\tilde{\rho},p}(D)$ и, следовательно, пространства $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\tilde{\rho},p}(D)$ гомеоморфны.

Теперь рассмотрим взаимосвязь между емкостными граничными элементами при разных показателях. При ограничениях на геометрию границы можно показать, что граничные элементы не зависят от показателя p , т. е. они гомеоморфны.

Нам потребуется следующая лемма о жесткости топологии компактного хаусдорфова пространства.

Лемма 2.19. Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство и $\varphi : X \rightarrow Y$ — непрерывное биективное отображение. Тогда φ — гомеоморфизм.

Теорема 2.20. Пусть D — область в римановом многообразии M конечного объема $\text{vol}_g(D) < \infty$ и $n-1 < p < q \leq n$ ($1 \leq p < q \leq 2$, если $n = 2$). Если некоторая окрестность $H_{\rho,q}(D)$ компактна, то существует непрерывная сюръекция

$$\iota : H_{\rho,q}(D) \rightarrow H_{\rho,p}(D).$$

Если все носители граничных элементов $H_{\rho,p}(D)$ одноточечны, то ι — гомеоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный континуум F такой, что $D \setminus F$ связно. Далее будем опускать F из обозначений метрик, т. е. вместо $\rho_{p,F}$, $\rho_{q,F}$ будем писать ρ_p и ρ_q соответственно.

Если $n-1 < p \leq q \leq n$, то в силу неравенства Гёльдера выполняется оценка

$$\|f\|_p \leq \text{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_q$$

для всех функций $f \in L_q(D)$. Определим отображение $\iota : (D \setminus F, \rho_q) \rightarrow (D \setminus F, \rho_p)$ формулой $\iota(x) = x$ для всех $x \in D \setminus F$.

Пусть $x, y \in D \setminus F$ и γ — кривая, соединяющая эти точки, и $u \in L_q^1(D)$ — допустимая функция для конденсатора (γ, F) . Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\rho_p(x, y) \leq \text{cap}((\gamma, F); L_p^1(D))^{\frac{1}{p}} \leq \|\nabla u\|_p \leq \text{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \|\nabla u\|_q.$$

Отсюда выводим, что $\rho_p(x, y) \leq \text{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \rho_q(x, y)$. Следовательно, отображение ι липшицево в емкостных метриках, поэтому существует единственное продолжение $\iota : \overline{D_{\rho,q}} \rightarrow \overline{D_{\rho,p}}$ на пополнения метрических пространств. Из теоремы 2.7 следует, что сужение

$$\iota|_{H_{\rho,q}(D)} : H_{\rho,q}(D) \rightarrow H_{\rho,p}(D)$$

переводит граничные элементы в граничные элементы.

Докажем сюръективность отображения ι . Пусть $\theta \in H_{\rho,p}(D)$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель граничного элемента θ . В силу компактности окрестности $H_{\rho,q}(D)$ существует подпоследовательность $(x_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $\rho_q(x_{l_k}, h) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторого элемента $h \in H_{\rho,q}(D)$. Отсюда следует, что $\iota(h) = \theta$, и, значит, ι — сюръективное отображение.

Пусть все носители граничных элементов $H_{\rho,p}(D)$ одноточечны. Покажем, что ι — инъективное отображение. Допустим, что это не так: существуют различные емкостные граничные элементы $\theta, \theta' \in H_{\rho,q}(D)$ такие, что $\iota(\theta) = \iota(\theta') = h$. Пусть $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ суть представители элементов θ и θ' соответственно. В силу предположения последовательности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ эквивалентны в метрике ρ_p . Так как носители граничных элементов одноточечны, то существуют подпоследовательности (обозначены теми же символами) $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$, сходящиеся к одной точке $\mathcal{S}(h)$. В силу [7, предложение 2.28]⁴⁾ существуют кривые γ_l , соединяющие точки x_l , y_l при $l = 1, 2, 3, \dots$, такие, что $\text{diam } \gamma_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

СЛУЧАЙ 1. Если $\mathcal{S}(h) \in \partial D$, то, используя монотонность емкости и лемму 2.2, выводим неравенства

$$\rho_q(x_l, y_l) \leq \text{cap}((\gamma_l, F); L_q^1(D))^{1/q} \leq \text{cap}((\gamma_l, F); L_q^1(M))^{1/q} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

⁴⁾Доказательство данного утверждения переносится на случай римановых многообразий с очевидными модификациями.

Получаем противоречие с тем, что $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}, (y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представители различных элементов в $H_{\rho,q}(D)$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $\mathcal{S}(h) = \{\infty\}$. Докажем вспомогательный результат о емкости точки ∞ в областях конечной меры. Пусть $F \subset B(o, r)$ для некоторой точки $o \in D$. Тогда $\text{cap}((\{\infty\}, F); L_s^1(D)) = 0$ для всех $s \geq 1$. Действительно, рассмотрим гладкую функцию u такую, что $u|_{\overline{B}(o, r)} = 1$, $u|_{M \setminus B(o, R)} = 0$ и $|\nabla u| \leq C(R - r)^{-1}$. Имеем

$$\text{cap}((\{\infty\}, F); L_s^1(D)) \leq \int_D |\nabla u|^s d \text{vol}_g \leq \text{vol}_g(D) C(R - r)^{-s} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Далее получаем оценки (ниже $B(o, R_l)$ — такой шар, что $\gamma_l \subset M \setminus B(o, R_l)$)

$$\begin{aligned} 0 < \rho_q(x_l, y_l) &\leq \text{cap}((\gamma_l, F); L_q^1(D))^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \text{cap}((M \setminus B(o, R_l), F); L_q^1(D))^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что ι — инъекция.

В силу леммы 2.19 отображение ι — гомеоморфизм. $\square$

Сформулируем достаточные условия односточности носителей граничных элементов. Для этого введем понятие сильно достижимой точки.

Пусть $p \geq 1$ и D — область, $x \in \partial D$. Точка $x \in \partial D$ называется *p-сильно достижимой*, если для любой окрестности U точки x существуют подокрестность $V \subset U$, компакт $F \subset D$ и число $\delta > 0$ такие, что для всех континуумов F_1 в D , пересекающих ∂U и ∂V , емкость конденсатора $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ ограничена снизу: $\text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D)) > \delta$. Граница ∂D называется *p-сильно достижимой*, если каждая точка $x \in \partial D$ *p-сильно достижима*.

Модифицируя рассуждение [7, предложение 4.4], получаем, что в областях с *p-сильно достижимой* границей все граничные элементы имеют *одноточечный* носитель.

Достаточное условие компактности окрестности граничных элементов приведено в следствии 4.5 — условие локальной конечной связности границы ∂D .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.21. В теореме 2.20 условие односточности носителей существенно. Пусть R^α — область с гребнем степени $1 < \alpha < 2$, тогда гребень R 3-сильно достижим (см. [27, теорема 5.4]) и, следовательно, в $H_{\rho,3}(R^\alpha)$ точки гребня представляют различные граничные элементы. С другой стороны, при $2 < p < \alpha + 1$ гребень R отождествляется в один элемент в пространстве $H_{\rho,p}(R^\alpha)$ (см. пример 2.11).

3. Граничное поведение отображений классов Соболева

В данном разделе установим теоремы о граничном поведении замкнутых отображений с ограниченным искажением: эти отображения липшицевы в емкостных метриках; образ граничного элемента — граничный элемент. Аналогичные идеи могут быть применены для изучения граничного поведения обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам на римановых многообразиях. При топологических ограничениях на границы областей будут получены теоремы о граничном поведении в исходной геометрии.

Далее D, D' — области в римановых многообразиях $(M, g), (N, \bar{g})$ одинаковой размерности $n \geq 2$, символом d_N обозначим риманову метрику в N .

Следуя Ю. Г. Решетняку (см. [28]), определим отображения класса W_q^1 , $1 \leq q < \infty$, со значениями в римановом многообразии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Отображение $f : D \rightarrow D'$ принадлежит $W_{q,\text{loc}}^1(D; D')$, $1 \leq q < \infty$, если выполнены следующие условия:

(1) отображение f принадлежит $L_{q,\text{loc}}(D; D')$: функция $d_N(z_0, f(\cdot))$ принадлежит $L_{q,\text{loc}}(D)$ для некоторой точки $z_0 \in D'$,

(2) существует функция $w \in D$ класса $L_{q,\text{loc}}(D)$ такая, что для любой точки $z \in N$ функция $[f]_z(x) = d_N(z, f(x))$ принадлежит пространству $W_{q,\text{loc}}^1(D)$ и выполнено поточечное неравенство

$$\|\nabla[f]_z(x)\| \leq w(x) \quad \text{для п. в. } x \in D. \quad (2)$$

Существует наименьшая функция w (верхняя огибающая семейства $\|\nabla[f]_z\|$), удовлетворяющая неравенству (2) (подробнее см. [28, § 1.4]). Верхняя огибающая — норма обобщенного дифференциала $\|Df\|$ отображения f .

Другие эквивалентные определения отображений класса Соболева между римановыми многообразиями приведены в [29, предложение 1].

Якобиан отображения f определяется следующим образом:

$$\mathcal{J}(x, f) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ B(y, r) \ni x}} \frac{\text{vol}_g(f(B(y, r)))}{\text{vol}_g(B(y, r))}.$$

Если отображение f класса $W_{q,\text{loc}}^1(D; D')$, то f аппроксимативно дифференцируемо для п. в. $x \in D$ (см., например, [10, гл. 6]) и для отображений класса Соболева выполнена формула замены переменной (см., например, [30, теоремы 3.2.5, 3.1.8]).

Граничное поведение замкнутых отображений с ограниченным искажением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Отображение $f : D \rightarrow D'$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

(1) $f \in W_{n,\text{loc}}^1(D; D')$,

(2) существует константа $K \geq 1$ такая, что выполняется поточечная оценка

$$\|Df(x)\|^n \leq K \mathcal{J}(x, f) \quad \text{для п. в. } x \in D.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Наименьшая константа K в неравенстве выше — *коэффициент внешнего искажения*, обозначаемый через $K_O(f)$. Вместе с коэффициентом внешнего искажения вводится также *коэффициент внутреннего искажения* $K_I(f)$ — наименьшая константа K' , удовлетворяющая неравенству

$$\mathcal{J}(x, f) \leq K' \left(\inf_{X \in T_x M, \|X\|_{T_x M} = 1} \|Df(x)\langle X \rangle_{T_{f(x)} N}\| \right)^n \quad \text{для п. в. } x \in D.$$

Коэффициенты $K_O(f)$ и $K_I(f)$ связаны следующими соотношениями (см. [31]):

$$K_I(f) \leq K_O(f)^{n-1} \quad \text{и} \quad K_O(f) \leq K_I(f)^{n-1}.$$

В [31, § 4] приведено другое определение отображений с ограниченным искажением на римановых многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть M, N — n -мерные римановы многообразия класса C^1 . Непрерывное отображение $f : M \rightarrow N$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если найдется число $K \in [1, \infty)$ такое, что для всех

$a \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют допустимые карты $t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенные в окрестностях точек $a \in M$, $b = f(a) \in N$, изометричные⁵⁾ в точках a, b соответственно, для которых суперпозиция $\tilde{f} = s \circ f \circ t^{-1}$ — отображение с ограниченным искажением, причем $K_O(\tilde{f}) \leq K + \varepsilon$.

Наименьшая константа K называется *коэффициентом внешнего искажения* f .

Преимущество определения 3.4 — возможность использовать локальные результаты, полученные в $\mathbb{R}^n$, в случае римановых многообразий.

Следующее предложение выражает связь между определениями 3.2 и 3.4.

Предложение 3.5. Пусть M, N — римановы многообразия одинаковой размерности и $f : M \rightarrow N$ — непрерывное отображение. Тогда определения 3.4 и 3.2 эквивалентны, причем коэффициент внешнего искажения не зависит от выбора определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данного утверждения достаточно воспользоваться эквивалентными определениями отображений класса Соболева на римановых пространствах (см. [29, предложение 1]) и учесть следующее наблюдение. Пусть $\varepsilon > 0$ и карта $t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ изометрична в точке $a \in M$, тогда существует достаточно малая окрестность U' такая, что в этой окрестности выполняется следующая оценка на метрический тензор: $1 - \varepsilon \leq \|g\| \leq 1 + \varepsilon$. $\square$

В [32] приведен обзор основных результатов отображений с ограниченным искажением на римановых многообразиях, а также другие подходы к определению этого класса отображений.

Сформулируем топологические свойства отображений с ограниченным искажением. Напомним, что отображение $f : D \rightarrow D'$ называется *дискретным*, если множество $f^{-1}(y)$ дискретно для всех $y \in D'$, и *открыто*, если образ любого открытого множества открыт.

Теорема 3.6 [31]. Пусть $f : D \rightarrow D'$ — непрерывное непостоянное отображение с ограниченным искажением между областями в римановых многообразиях. Тогда f открыто и дискретно.

Доказательство теоремы 3.6 можно получить с помощью перехода в локальные координаты (см. определение 3.4), см. также [32].

В силу открытости непостоянных отображений с ограниченным искажением можно считать, что $D' = f(D)$.

В следующем определении все топологические операции рассматриваются в топологии компактифицированного пространства $\overline{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Отображение $f : D \rightarrow D'$ называется *замкнутым*, если образ замкнутого в индуцированной топологии в D множества замкнут в индуцированной топологии в D' .

Замкнутые отображения с ограниченным искажением наследуют многие свойства отображений с ограниченным искажением в нормальных областях (о нормальных областях см., например, [17]).

Следующие топологические свойства замкнутых, непрерывных, открытых и дискретных отображений приведены в [33, 34]. В этом и следующих результатах требуется ориентируемость многообразий, чтобы ввести понятие локального индекса отображения в точке (о локальном индексе см., например, [17, 32, 34]).

⁵⁾ Карта $t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется изометричной в точке $a \in U$, если перенесенный риманов тензор $\tilde{g}$ в точке $t(a)$ — тождественная матрица.

Теорема 3.8 [33, 34]. Пусть M, N — ориентируемые связные римановы многообразия одинаковой размерности $n \geq 2$, D, D' — области в M и N соответственно, $f : D \rightarrow D'$ — непостоянное замкнутое непрерывное отображение с ограниченным искажением. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) f — замкнутое отображение,
- (2) любая последовательность точек D , сходящаяся к точке границы ∂D , переводится f в последовательность, не имеющую подпоследовательностей, сходящихся к некоторой точке $f(D)$,
- (3) f — собственное отображение⁶⁾,
- (4) $N(f, D) = \sup\{N(y, f, D) \mid y \in D\} = p$, где $N(y, f, D)$ — мощность множества прообразов $f^{-1}(y)$ в D (индикатриса Банаха), причем для любого $y \in D'$ выполняется равенство

$$p = \sum_{j=1}^k i(x_j, f), \quad f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Нам понадобится следующая оценка на емкость образа конденсатора. В случае евклидовых пространств это доказано в работе [35], обобщающей результаты [36].

Теорема 3.9 [35, теорема 3.2]. Пусть M, N суть ориентируемые римановы многообразия одинаковой размерности $n \geq 2$, D, D' — области в M и N соответственно, $f : D \rightarrow D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Пусть также $\mathcal{E} = (T_1, T_0)$ — конденсатор в D , тогда выполнена оценка

$$\text{cap}(\tilde{f}\mathcal{E}; L_n^1(D')) \leq K_I(f) \text{cap}(\mathcal{E}; L_n^1(D)),$$

где $\tilde{f}\mathcal{E} = (f(T_1), f(T_0) \setminus f(D \setminus T_0))$.

Доказательство теоремы 3.9 переносится на римановы многообразия с очевидными модификациями.

Перейдем к описанию граничного поведения непрерывных замкнутых отображений с ограниченным искажением.

Пусть M, N — ориентируемые римановы многообразия размерности $n \geq 2$, D, D' суть области в M и N соответственно и $f : D \rightarrow D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Выберем континуум $F' \subset D' \setminus f(B_f)$, где B_f — множество ветвления отображения f , так, что $D' \setminus F'$ связно. Можно считать, что F' — некоторый достаточно малый шар. Тогда прообраз $f^{-1}(F')$ — конечное объединение дизъюнктивных континуумов, причем, уменьшая F' , можем считать, что $D \setminus f^{-1}(F')$ связно. Положим $F = f^{-1}(F') = F_1 \cup \dots \cup F_p$, где p — максимальная кратность f . Компакт F обладает следующим свойством: если γ — кривая, не пересекающая F , то в силу теоремы 3.9 выполняется оценка

$$\text{cap}((f(\gamma), f(F)); L_n^1(D')) \leq K_I(f) \text{cap}((\gamma, F); L_n^1(D)).$$

Выбор компакта F не влияет на описание граничного поведения в терминах граничных элементов (см. замечание 2.3 и теорему 2.16).

⁶⁾ Отображение f называется *собственным*, если прообраз компактного множества компактен.

Теорема 3.10. Пусть M, N — ориентируемые римановы многообразия размерности $n \geq 2$, D, D' суть области в M и N соответственно и $f : D \rightarrow D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Тогда отображение $f : D_{\rho,n} \rightarrow D'_{\rho,n}$ липшицево в емкостных метриках и существует единственное продолжение $\bar{f} : \overline{D_{\rho,n}} \rightarrow \overline{D'_{\rho,n}}$ на пополнения пространств.

Более того, $\bar{f}$ переводит граничные элементы в граничные элементы:

$$\bar{f}|_{H_{\rho,n}(D)} : H_{\rho,n}(D) \rightarrow H_{\rho,n}(D').$$

Доказательство. Из теоремы 3.9 заключаем, что выполнено неравенство

$$\text{cap}(f(\mathcal{E}); L_n^1(D'))^{\frac{1}{n}} \leq K_I(f)^{\frac{1}{n}} \text{cap}(\mathcal{E}; L_n^1(D))^{\frac{1}{n}}$$

для любого конденсатора $\mathcal{E} = (T, F)$ в D , где $f(\mathcal{E}) = (f(T), f(F))$ в силу выбора компакта F . Поэтому f — липшицево отображение в емкостных метриках, т. е.

$$\rho_{n,f(F)}(f(x), f(y)) \leq K \rho_{n,F}(x, y) \quad \text{для } x, y \in D \setminus F,$$

где $K = K_I(f)^{\frac{1}{n}}$, и, следовательно, существует единственное продолжение $\bar{f}$ на пополнения пространств с той же константой Липшица.

Покажем, что $\bar{f}$ переводит граничные элементы в граничные элементы. Пусть $h \in H_{\rho,n}(D)$ — граничный элемент и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель h . Тогда последовательность $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к границе $\partial D \cup \{\infty\}$ (см. теорему 2.7). Так как отображение $\bar{f}$ липшицево в емкостной метрике, то $(f(x_l))_{l \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в емкостной метрике в образе.

Так как f — замкнутое, непрерывное, открытое и дискретное отображение, то в силу теоремы 3.8 последовательность $(f(x_l))_{l \in \mathbb{N}}$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся к точкам D' , поэтому $[(f(x_l))_{l \in \mathbb{N}}] \in H_{\rho,n}(D')$ (см. теорему 2.7). $\square$

Напомним, что граница ∂D локально связна в точке $x \in \partial D$, если для любой окрестности U существует подокрестность $x \in V$ такая, что $V \cap D$ связно. Рассуждая аналогично [7], в областях с локально связной границей можно установить следующую теорему о граничном поведении.

Следствие 3.11. Пусть $f : D \rightarrow D'$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 3.10. Тогда если D локально связна в точке $y \in \partial D$, то y принадлежит носителю $\mathcal{S}(h)$ некоторого граничного элемента $h \in H_{\rho,n}(D)$.

Более того, если носитель $\mathcal{S}(\bar{f}(h))$ состоит из одной точки x , то отображение $f : D \rightarrow D'$ продолжается по непрерывности в точки $y \in \mathcal{S}(h)$ и выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow y, \\ z \in D}} f(z) = x \quad \text{для любой точки } y \in \mathcal{S}(h).$$

Граничное поведение обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам. Пусть D, D' — области в римановых многообразиях M и N соответственно и $1 < q \leq p < \infty$. Пусть также $\varphi : D' \rightarrow D$ — гомеоморфизм, обладающий следующими свойствами:

- (i) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(D'; D)$;
- (ii) φ имеет конечное искажение: $\|D\varphi\| = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in D' \mid \mathcal{J}(x, \varphi) = 0\}$;

(iii) функция искажения $K_{q,p}(x, \varphi)$ (см. определение в [29, § 5]) принадлежит пространству $L_\sigma(D')$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Гомеоморфизм φ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p}(D'; D)$, если φ удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Из условий (i)–(iii) выводим, что $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмы индуцируют ограниченный оператор композиции пространств Соболева

$$\varphi^* : L_p^1(D) \cap W_{\infty, \text{loc}}^1(D) \rightarrow L_q^1(D') \quad (1 \leq q \leq p < \infty).$$

При ограничениях на геометрию многообразия выполнение условий (i)–(iii) необходимо для индуцирования ограниченного оператора (см. [29, § 5]).

Пусть φ — $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизм. Тогда для любого конденсатора $\mathcal{E}$ в D имеет место следующее неравенство на емкость (ниже если $\mathcal{E} = (T, F)$, то $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) = (\varphi^{-1}(T), \varphi^{-1}(F))$):

$$\text{cap}(\varphi^{-1}(\mathcal{E}); L_q^1(D'))^{\frac{1}{q}} \leq K \text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D))^{\frac{1}{p}},$$

где K — интегральная норма функции $K_{q,p}(\cdot, \varphi)$ в $L_\sigma(D')$.

Пусть $f : D \rightarrow D'$ — обратный гомеоморфизм к φ , т. е. $f = \varphi^{-1}$, тогда f изменяет емкость конденсаторов следующим образом (ниже если $\mathcal{E} = (T, F)$, то $f(\mathcal{E}) = (f(T), f(F))$):

$$\text{cap}(f(\mathcal{E}); L_q^1(D'))^{\frac{1}{q}} \leq K \text{cap}(\mathcal{E}; L_p^1(D))^{\frac{1}{p}},$$

где $\mathcal{E}$ — произвольный конденсатор в D .

Отметим, что если $f = \varphi^{-1}$, $\varphi \in \mathcal{Q}_{q,p}(M, N)$, и N имеет p -параболический тип, то M имеет q -параболический тип; аналогично если M имеет q -гиперболический тип, то N имеет p -гиперболический тип.

Аналоги результатов прошлого раздела о граничном поведении замкнутых отображений с ограниченным искажением могут быть получены для гомеоморфизмов $f = \varphi^{-1}$, где $\varphi \in \mathcal{Q}_{q,p}$, с помощью тех же самых идей (см. [7], где эти теоремы были получены в случае $M = N = \mathbb{R}^n$).

Приложения. Рассмотрим граничное поведение квазиконформных отображений в гиперболической плоскости (ср. с [37, теоремы 10.1, 12.1], где этот результат был установлен другим методом).

ПРИМЕР 3.12. Пусть $\mathbb{H}^2$ — модель Пуанкаре гиперболической плоскости. Как известно из примера 2.13, граничные элементы $\mathbb{H}^2$ — точки на граничной окружности $\partial B^E(0, 1)$. Пусть $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ — квазиконформное отображение. Тогда

$$\text{cap}(f(\mathcal{E}); L_2^1(\mathbb{H}^2))^{\frac{1}{2}} \leq K \text{cap}(\mathcal{E}; L_2^1(\mathbb{H}^2))^{\frac{1}{2}}$$

для любого конденсатора $\mathcal{E}$ в $\mathbb{H}^2$, где K — некоторая константа.

Используя наблюдения из примера 2.13 и применяя теорему 3.10, заключаем, что отображение f допускает следующее граничное поведение: любая последовательность точек $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$, сходящаяся в евклидовой топологии к точке x на идеальной границе, переходит в последовательность $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$, которая сходится в евклидовой топологии к некоторой точке $y \in \partial B^E(0, 1)$.

Таким образом, квазиконформное отображение $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ продолжается до гомеоморфизма замкнутых шаров $\bar{f} : \overline{B^E(0, 1)} \rightarrow \overline{B^E(0, 1)}$ в евклидовой топологии. Более того, $\bar{f}|_{\partial B^E(0, 1)}$ — гомеоморфизм в евклидовой топологии на $\partial B^E(0, 1)$.

Аналогично доказывается, что непрерывное замкнутое непостоянное отображение с ограниченным искажением $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{f} : \overline{B^E(0,1)} \rightarrow \overline{B^E(0,1)}$ в евклидовой топологии.

Применим понятие слабой плоскости и описание граничного поведения к вопросу существования квазиконформного гомеоморфизма между областью с гребнем (см. пример 2.11) и областью с n -слабо плоской границей (ср. с [38, теорема 10.5], где данный результат был установлен другим методом).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. Граница ∂D области D называется n -слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $P > 0$ существует подокрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что для любых континуумов F_0 и F_1 в D , пересекающих ∂U и ∂V , выполняется оценка на p -емкость конденсатора $\mathcal{E} = (F_0, F_1)$: $\text{cap}(\mathcal{E}; L_n^1(D)) \geq P$.

Граница ∂D называется n -слабо плоской, если она n -слабо плоская в любой точке $x_0 \in \partial D$.

Нам понадобится следующее утверждение об отсутствии слабой плоскости гребня в области R^α из примера 2.11.

Предложение 3.14 [27, теорема 5.3]. Граница ∂R^α не 3-слабо плоская в точках гребня R при $\alpha > 1$.

Предложение 3.15. Не существует квазиконформного гомеоморфизма $f : R^\alpha \rightarrow B$ между областью с гребнем R^α степени $\alpha > 1$ и областью B с 3-слабо плоской границей.

В частности, не существует квазиконформного отображения между шаром и областью с гребнем R^α , где $\alpha > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R^\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_2| \leq x_1^\alpha, x_1 \in (0, 1), x_3 \in (-1, 1)\}$, $\alpha > 1$. Обозначим символом R гребень $\{(0, 0, t) \mid t \in [-1, 1]\}$.

Обозначим символом $\bar{f}$ продолжение гомеоморфизма f до замыканий (в евклидовом смысле) областей (см. следствие 3.11) $\bar{f} : \overline{R^\alpha} \rightarrow \overline{B}$. При этом $f(R) = x_0 \in \partial B$ (это следует из примера 2.11 и того, что в слабо плоских точках носитель граничного элемента состоит из одной точки, см. [7, § 4]).

Так как граница ∂B слабо плоская в точке x_0 , существует последовательность континуумов E_n, F_n такая, что $\text{cap}((E_n, F_n); L_3^1(B)) \rightarrow \infty$, $\text{dist}(F_n, x_0) \rightarrow 0$ и $\text{dist}(E_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $f^{-1}(E_n) = V_n$ и $f^{-1}(F_n) = W_n$. Множества V_n и W_n — континуумы, и имеют место соотношения $\text{dist}(V_n, R) \rightarrow 0$ и $\text{dist}(W_n, R) \rightarrow 0$.

Покажем, что $\text{dist}(V_n, W_n) \rightarrow 0$. Допустим, что это не так. Тогда существуют две различные точки v, w на гребне R такие, что $\text{dist}(V_n, v) \rightarrow 0$ и $\text{dist}(W_n, w) \rightarrow 0$. Так как f — квазиконформное отображение, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{cap}((E_n, F_n); L_3^1(B)) &\leq K \text{cap}((V_n, W_n); L_3^1(R^\alpha)) \\ &\leq K \text{cap}((V_n, W_n); L_3^1(B^E(0, 2))) < \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\text{cap}((E_n, F_n); L_3^1(B)) \rightarrow \infty$; противоречие. Таким образом, существует точка $w \in R$ такая, что $\text{dist}(V_n, w) \rightarrow 0$ и $\text{dist}(W_n, w) \rightarrow 0$.

Так как f — квазиконформный гомеоморфизм, рассуждая от противного, заключаем, что в точке $w \in R$ граница ∂R^α 3-слабо плоская; противоречие с предложением 3.14. $\square$

4. Обобщенные границы в метрических пространствах

Обобщенные границы в областях с локально конечно связной границей. Пусть X — локально связное метрическое пространство со свойством Гейне — Бореля. Такие пространства полны, сепарабельны и локально линейно связны⁷⁾.

Нам понадобится понятие локальной конечной связности границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Область D *локально конечно связна* в точке $x_0 \in \partial D$, если для любого $r > 0$ существует открытое множество G такое, что $x_0 \in G \subset B(x_0, r)$ и $G \cap D$ состоит из конечного числа компонент связности (число компонент может зависеть от r).

Область D *локально конечно связна на границе*, если D локально конечно связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Здесь и далее D — область с локально конечно связной границей ∂D , d — метрика в объемлющем пространстве.

Без ограничения общности можем считать, что D — *ограниченная* область и, следовательно, $\overline{D}$ — компактное множество. Действительно, если X — сепарабельное локально компактное метрическое пространство, то одноточечная компактификация $\overline{X}$ — сепарабельное метризуемое пространство (см., например, [25, гл. 4, § 41(X), теорема 5]). Тогда в $\overline{X}$ область D ограничена и ее замыкание компактно.

Пусть $x \in \partial D$ и $r_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Так как граница локально конечно связна в точке x , существуют компоненты связности $G^1(x, r_l), \dots, G^k(x, r_l) \subset G \subset B(x, r_l)$ (число k может зависеть от l). Последовательность $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к $x \in \partial D$, называется *ассоциированной* с последовательностью вложенных компонент связности $G(x, r_1) \supset G(x, r_2) \supset \dots$, если $x_l \in G(x, r_l)$ для всех $l = 1, 2, \dots$.

Последовательность вложенных компонент связности $(G(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$ *делит* последовательность $(F(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$, если для любого $l = 1, 2, \dots$ найдется такой номер k_0 , что для всех $k \geq k_0$ выполняется включение $G(x, r_k) \subset F(x, r_l)$. Последовательность вложенных компонент связности $(G(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$ *эквивалентна* последовательности $(F(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$, если последовательности $(G(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$ и $(F(x, r_l))_{l \in \mathbb{N}}$ делят друг друга.

Для метрики ϱ в D определим следующие свойства:

(M1) *сходимость по ϱ эквивалентна сходимости по d* : если $x \in D$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — некоторая последовательность в D , то сходимость $\varrho(x_l, x) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $d(x_l, x) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;

(M2) *одноточечность носителей*: для любой ϱ -фундаментальной последовательности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ множество ее частичных пределов состоит из одной точки;

(M3) *согласованность с последовательностью компонент связности*: если $x_l \rightarrow x_0 \in \partial D$ при $l \rightarrow \infty$ и последовательность $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ассоциирована с последовательностью вложенных компонент связности, то $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ϱ -фундаментальна;

(M4) *ϱ различает последовательности компонент связности*: если $x_l \rightarrow x_0 \in \partial D$, $y_l \rightarrow x_0$ при $l \rightarrow \infty$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ассоциированы с неэквивалентными последовательностями компонент связности, то $\varrho(x_l, y_l) \not\rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;

(M5) *ϱ различает точки границы*: пусть x_0 и y_0 суть точки границы ∂D , $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — ϱ -фундаментальные последовательности и $x_l \rightarrow x_0$, $y_l \rightarrow y_0$

⁷⁾Локальная линейная связность такого пространства — следствие теоремы Мазуркевича — Мура — Менгера (см., например, [25, § 50(II), теорема 1]).

при $l \rightarrow \infty$; если $x_0 \neq y_0$, то $\varrho(x_l, y_l) \not\rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Пусть ϱ — метрика в D , удовлетворяющая условиям (M1)–(M5). Пополнение метрического пространства (D, ϱ) обозначим символом $\overline{D}^\varrho$. Из свойства (M1) следует, что можно отождествить точки D с классами эквивалентности стационарных последовательностей. Обозначим присоединенные элементы символом $\partial_\varrho D = \overline{D}^\varrho \setminus D$. Полученное множество $\partial_\varrho D$ — естественная обобщенная граница для области с локально конечно связной границей. Будет показано, что $\partial_\varrho D$ не зависит от выбора метрики ϱ , удовлетворяющей свойствам (M1)–(M5) (см. теорему 4.6). Далее мы будем изучать свойства этой границы $\partial_\varrho D$.

Пусть $\theta \in \overline{D}^\varrho$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель θ . Тогда в силу (M2) и компактности $\overline{D}$ существует предел $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l$ в исходной метрике d , который обозначим символом $S_\varrho(\theta)$. Данный предел не зависит от выбора представителя в силу (M2). Используя свойства (M1), (M3), выводим, что $\partial_\varrho D$ — замкнутое подмножество в $\overline{D}^\varrho$.

Лемма 4.2. Пусть ϱ — метрика в D , удовлетворяющая (M1), (M2), и $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность элементов $\overline{D}^\varrho$, $\theta \in \overline{D}^\varrho$. Если $\varrho(\theta_k, \theta) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то имеет место сходимость $S_\varrho(\theta_k) \rightarrow S_\varrho(\theta)$ при $k \rightarrow \infty$ в топологии объемлющего пространства.

Доказательство. В силу (M1) утверждение леммы выполнено для $\theta \in D$. Пусть $\theta \in \partial_\varrho D$. Обозначим символами $(x_l^k)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ представителей θ_k и θ соответственно, причем можно считать, что $\varrho(x_k^k, \theta_k) < \frac{1}{k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности $(x_k^k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ϱ -эквивалентны. Применяя (M2), заключаем, что $S_\varrho(\theta_k) \rightarrow S_\varrho(\theta)$ при $k \rightarrow \infty$. $\square$

Из леммы 4.2 выводим следующее утверждение.

Следствие 4.3. Пусть ϱ — метрика в D , удовлетворяющая свойствам (M1)–(M3). Тогда существует непрерывная сюръекция $\iota : \partial_\varrho D \rightarrow \partial D$.

Доказательство. Зададим отображение $\iota : \partial_\varrho D \rightarrow \partial D$ формулой $\partial_\varrho D \ni \theta \mapsto S_\varrho(\theta)$. В силу леммы 4.2 отображение ι непрерывно. Сюръективность следует из конечной связности ∂D и свойства (M3). $\square$

Теорема 4.4. Пусть метрика ϱ удовлетворяет свойствам (M1), (M3). Тогда пространство $\overline{D}^\varrho$ компактно, в частности, $\partial_\varrho D$ компактно.

Доказательство. Пусть $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность в $\overline{D}^\varrho$. Обозначим символом $(x_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ представителей классов θ_m , выберем диагональную последовательность $(x_k^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Эта последовательность предкомпактна в топологии $\overline{D}$, и, следовательно, выделяя подпоследовательность, получаем сходящуюся к некоторой точке $x \in \overline{D}$ последовательность $(x_k^k)_{k \in \mathbb{N}}$ (обозначена тем же символом).

Если $x \in D$, то в силу (M1) имеет место сходимость $\varrho(x_l^l, x) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что подпоследовательность $(\theta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к x по метрике ϱ .

Если $x \in \partial D$, то ввиду конечной связности ∂D в точке x существуют вложенная последовательность компонент связности $(G(x, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ и подпоследовательность $(x_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$ такие, что $(x_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$ ассоциирована с $(G(x, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$. По свойству (M3) заключаем, что последовательность $(x_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$ ϱ -фундаментальна. Обозна-

чим класс эквивалентности, содержащий последовательность $(x_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$, символом θ . Тогда $\varrho(\theta_i, \theta) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. $\square$

Емкостная метрика в ограниченных областях в римановых многообразиях с локально конечно связной границей обладает свойствами (M1), (M3), поэтому пространство $H_{\rho,p}(D)$ компактно и некоторая окрестность $H_{\rho,p}(D)$ компактна. Если же D — неограниченная область, то нужно учитывать емкость бесконечно удаленной точки. Определим емкость конденсатора $\mathcal{E} = (\{\infty\}, F)$ в пространстве $L_p^1(D)$ следующим образом:

$$\text{cap}((\{\infty\}, F); L_p^1(D)) = \inf_u \int_D \|\nabla u\|^p d\text{vol}_g,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C(D) \cap L_p^1(D)$ таким, что $u|_{D \setminus \overline{B(x,r)}} = 1$, r — достаточно большой радиус, и $u|_F = 0$. Если многообразие M имеет p -параболический тип, то p -емкость точки ∞ равна нулю.

Следствие 4.5. Пусть D — область с локально конечно связной границей в римановом многообразии M размерности $n \geq 2$, $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\text{cap}((\{\infty\}, F); L_p^1(D)) = 0$. Тогда пространство $H_{\rho,p}(D)$ и некоторая окрестность $H_{\rho,p}(D)$ компактны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем континуум $F = \overline{B(x_0, r_0)}$, где $x_0 \in D$ и r_0 — достаточно малый радиус, так, что $D \setminus F$ связно. Из условий следствия следует, что емкостная метрика в $D \setminus \overline{B(x_0, \lambda r_0)}$, где $\lambda > 1$, обладает свойствами (M1), (M3), поэтому требуемое следует из теоремы 4.4. $\square$

Теорема 4.6. Пусть ϱ и ϱ' — метрики в D , удовлетворяющие свойствам (M1)–(M5). Тогда пространства $\overline{D}^\varrho$ и $\overline{D}^{\varrho'}$ гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v|_D = \text{id}_D$. В силу свойства (M1) отображение $v|_D : (D, \varrho) \rightarrow (D, \varrho')$ непрерывно.

Пусть $\theta \in \overline{D}^\varrho \setminus D$ и $S_\varrho(\theta) = x \in \partial D$. Выберем представителя $(x_l)_{l \in \mathbb{N}} \in \theta$, тогда последовательность $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ассоциирована с некоторой последовательностью компонент связности (в силу свойства (M4)), поэтому по свойству (M3) последовательность $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ϱ' -фундаментальна. Обозначим класс эквивалентности последовательности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ символом $\xi \in \overline{D}^{\varrho'}$. Определим $v(\theta)$ формулой $v(\theta) = \xi$. В силу свойств (M1)–(M4) определение v корректно. Отметим, что в силу (M2) для носителей выполняется равенство $S_\varrho(\theta) = S_{\varrho'}(v(\theta))$.

Отображение v инъективно. Допустим противное: существуют точки θ, θ' из $\overline{D}^\varrho$ такие, что $v(\theta) = v(\theta') = \xi \in \overline{D}^{\varrho'}$. Пусть $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ суть представители элементов θ, θ' соответственно. В силу (M4) последовательности $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ассоциированы с одной последовательностью компонент связности. Рассматривая последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, получаем в силу свойства (M3), что $\varrho(x_l, y_l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\theta = \theta'$.

Отображение v сюръективно. Пусть $\xi \in \overline{D}^{\varrho'}$ и $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель ξ . В силу компактности $\overline{D}^\varrho$ существует подпоследовательность (обозначена тем же символом) $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к θ в $\overline{D}^{\varrho'}$. По построению отображения v заключаем, что $v(\theta) = \xi$.

Отображение v непрерывно. Сужение $v|D$ непрерывно в силу свойства (M1). Докажем, что из сходимости по метрике ϱ к элементу $\theta \in \partial_\varrho D$ следует сходимость к $v(\theta)$ по метрике ϱ' .

Допустим противное: пусть $\varrho(\theta_l, \theta) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, но $\varrho'(v(\theta_l), v(\theta)) > \beta$ для всех $l \in \mathbb{N}$. В силу компактности $\overline{D}^{\varrho'}$ существует подпоследовательность (обозначена тем же символом) $(v(\theta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ такая, что $v(\theta_l) \rightarrow \xi$ при $l \rightarrow \infty$ в метрике ϱ' , причем $\xi \neq v(\theta)$. Так как v — биекция, то $\xi = v(\zeta)$ для некоторого элемента $\zeta \in \partial_\varrho D \setminus \{\theta\}$. Но из равенства $S_\varrho(\theta_l) = S_{\varrho'}(v(\theta_l))$, леммы 4.2 и свойства (M5) заключаем, что у последовательности $(S_\varrho(\theta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ существует два различных предела в метрике d ; противоречие.

Таким образом, v — непрерывная биекция между компактным и хаусдорфовым пространствами, значит, v — гомеоморфизм (см. лемму 2.19). $\square$

Свойства (M1)–(M5) для метрики ϱ означают, что обобщенная граница $\partial_\varrho D$ не отождествляет точки исходной границы и «различает берега разрезов». Из теоремы 4.6 следует, что такая обобщенная граница зависит только от топологии исходной области, а не выбора метрики ϱ .

Приведем пример такой метрики ϱ . Напомним, что мы рассматриваем локально связные метрические пространства со свойством Гейне — Бореля.

ПРИМЕР 4.7. Пусть D — область с локально конечно связной границей. Если D — неограниченная область, то перейдем к метрике $\bar{d}$ на компактифицированном пространстве $\bar{X}$, где D ограничена.

Метрика Мазуркевича определяется по формуле

$$d_M(x, y) = \inf \text{diam } E,$$

где точная нижняя грань берется по всем связным множествам $E \subset D$, содержащим $x, y \in D$. Тогда свойства (M1)–(M5) для метрики d_M выполнены.

О свойствах метрики Мазуркевича более подробно см., например, [9; 25, § 49(VII); 39].

Емкостная граница учитывает функциональные свойства классов отображений (контролируемое изменение емкости конденсаторов), поэтому возникают емкостные граничные элементы с носителем, состоящим из нескольких точек (см. примеры 2.11, 2.12). Однако всегда существует непрерывная сюръекция из обобщенной границы в емкостные граничные элементы.

Теорема 4.8. Пусть D — область в римановом многообразии M , $\dim M = n \geq 2$, с локально конечно связной границей ∂D , $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\text{cap}((\{\infty\}, F); L_p^1(D)) = 0$.

Если метрика ϱ в D обладает свойствами (M1)–(M5), то существует непрерывная сюръекция $\iota : \partial_\varrho D \rightarrow H_{p,p}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение ι задается аналогично отображению v из теоремы 4.6, сюръективность доказывается аналогично сюръективности v с использованием следствия 4.5.

Остается доказать непрерывность. Пусть θ_l , $l = 1, 2, \dots$, θ суть элементы $\partial_\varrho D$ такие, что $\varrho(\theta_l, \theta) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Аналогично доказательству леммы 4.2 выберем представителей $(x_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ элементов θ_l и θ соответственно. В силу локальной конечной связности ∂D и того, что $\text{cap}((x, F); L_p^1(D)) = 0$ для всех $x \in \partial D \cup \{\infty\}$, можно выбрать диагональную последовательность $(x_l^l)_{l \in \mathbb{N}}$ так, что $\rho_{p,F}(x_l^l, \iota(\theta_l)) < \frac{1}{l}$ для всех l . Тогда последовательность $(x_l^l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель θ , поэтому в силу (M4) данная последовательность ассоциирована с

последовательностью вложенных компонент связности. Из этого заключаем, что $(x_l^i)_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к $\iota(\theta)$ в емкостной метрике $\rho_{p,F}$. Значит, выполняются соотношения

$$\rho_{p,F}(\iota(\theta_l), \iota(\theta)) \leq \rho_{p,F}(\iota(\theta_l), x_l^i) + \rho_{p,F}(x_l^i, \iota(\theta)) \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad \square$$

Следствие 4.9. Пусть D — область в римановом многообразии M , $\dim M = n \geq 2$, с локально конечно связной границей ∂D , $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\text{cap}((\{\infty\}, F); L_p^1(D)) = 0$.

Если все носители емкостных граничных элементов одноточечны для некоторого p , то существует гомеоморфизм между $\partial_e D$ и $H_{\rho,p}(D)$. Более того, если $\text{vol}_g(D) < \infty$, то $\partial_e D$ гомеоморфна любой емкостной границе $H_{\rho,r}(D)$, где $r \in [p, n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем континуум $F = \overline{B(x_0, r_0)}$, где $x_0 \in D$ и r_0 — достаточно малый радиус, такой, что $D \setminus F$ связно. При данных предположениях емкостная метрика $\rho_{p,F}$ обладает свойствами (M1)–(M5) на области $D \setminus \overline{B(x_0, \lambda r_0)}$, где $\lambda > 1$, поэтому в силу теоремы 4.6 граница $\partial_e D$ гомеоморфна $H_{\rho,p}(D)$. Если $\text{vol}_g(D) < \infty$, то в силу теоремы 2.20 пространства $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\rho,r}(D)$ гомеоморфны для любого $r \in (p, n]$. $\square$

Одноточечность носителей граничных элементов выполняется, например, в областях с p -сильно достижимой границей (см. [7, предложение 4.4]).

Емкостные граничные элементы и простые концы. Далее рассматриваются только ограниченные области D в римановом многообразии M , $\dim M \geq 2$.

В работе [9] были введены простые концы для ограниченных областей в метрических пространствах. Сравним конструкции граничных элементов и простых концов в модельном метрическом пространстве — римановом многообразии.

Ограниченное связное множество $E \subsetneq D$ называется *допустимым*, если $\overline{E} \cap \partial D \neq \emptyset$. Последовательность $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ допустимых множеств называется *цепью*, если выполнены следующие условия:

- (a) $E_{k+1} \subset E_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$,
- (b) $\text{dist}(D \cap \partial E_{k+1}, D \cap \partial E_k) > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$,
- (c) *тело* цепи $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{E}_k$ содержится в ∂D .

Для цепей вводится частичный порядок по делению, определяются эквивалентные цепи (см. [9]). Класс эквивалентных по делению цепей $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ называется *концом* и обозначается через $[E_k]$. *Тело конца* $I[E_k]$ определяется как тело любого представителя, и это определение корректно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. *Простой конец* — конец, который не делится другим концом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Простые концы [9] не совпадают с простыми концами Каратеодори, см. пример 4.12 ниже.

Пусть $\partial_P D$ — множество простых концов в D . Символом $\overline{D}_P$ обозначим замыкание области D простыми концами, т. е. $\overline{D}_P = D \cup \partial_P D$.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 4.12 ([9, пример 5.1], «расческа тополога» II). Пусть D — область из примера 2.12.

Множества $E_k = ((1/2 - 2^{-k}, 1) \times (0, 2^{-k})) \cap D$ определяют конец с телом $I[E_k] = I \cup \{x_0\}$, где $I = (1/2, 1] \times \{0\}$ и $x_0 = (1/2, 0)$. Однако $[E_k]$ — не простой конец, так как цепь $F_k = B(x_0, 2^{-k}) \cap D$ делит его.

В подходе через емкостные граничные элементы отрезок $[1/2, 1] \times \{0\}$ — носитель одного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$, $1 \leq p \leq 2$ (см. пример 2.12).

ПРИМЕР 4.13 (область с гребнем II). Пусть $2 < p \leq 3$. Рассмотрим область R^α , $\alpha > p - 1$,

$$R^\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_2| \leq x_1^\alpha, x_1 \in (0, 1), x_3 \in (-1, 1)\}.$$

Обозначим символом $R = \{(0, 0, t) \mid t \in [-1, 1]\}$ гребень. В примере 2.11 было показано, что R — носитель одного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(R^\alpha)$.

С другой стороны, любая точка на гребне *достижима*⁸⁾, следовательно, в силу [9, следствие 7.8] любой точке $x \in R$ соответствует простой конец $[F_k^x]$ с телом $I[F_k^x] = \{x\}$.

В ограниченных областях с локально конечно связной границей простые концы метризуемы и граница простых концов гомеоморфна границе Мазуркевича (см. [9, следствие 10.9]), поэтому граница простых концов $\partial_p D$ непрерывно отображается на емкостные граничные элементы $H_{\rho,p}(D)$; при условии одноточечности носителей $H_{\rho,p}(D)$ при некотором $p \in (n - 1, n]$ ($p \in [1, 2]$, если $\dim M = 2$) граница простых концов гомеоморфна любой емкостной границе $H_{\rho,r}(D)$, где $r \in [p, n]$. Условие одноточечности носителей существенно, как показывает пример 4.13.

В работе [40] были получены результаты о граничном поведении для замкнутых, непрерывных, открытых и дискретных Q -отображений в метрических пространствах с помощью границы простых концов. Сформулируем данный результат в модельном случае, ориентируемых римановых многообразий, для непрерывных замкнутых отображений с ограниченным искажением.

Теорема 4.14. Пусть D — ограниченная область с локально конечно связной границей в римановом многообразии M , $\dim M = n \geq 2$, D' — область в N . Допустим, что $f : D \rightarrow D'$, $f(D) = D'$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Более того, пусть D' — область с n -сильно достижимой границей.

Тогда существует непрерывное продолжение $f : \overline{D}_P \rightarrow \overline{D}'$, $f(\overline{D}_P) = \overline{D}'$, и, следовательно, $\overline{D}'$ компактно.

Покажем, как теорема 4.14 следует из результатов настоящей статьи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из локально конечной связности границы ∂D и оценок на емкость (см. пример 1.4) следует, что любая точка границы ∂D содержится в носителе некоторого емкостного граничного элемента. Условие n -сильной достижимости границы $\partial D'$ обеспечивает одноточечность носителей граничных элементов $H_{\rho,n}(D')$ (см. [7, § 4]). Применяя следствие 4.3, заключаем, что существует сюръекция $\vartheta : H_{\rho,n}(D') \rightarrow \partial D'$. Тогда требуемое отображение $\tilde{f}$ — композиция следующих отображений:

$$\partial_p D \xrightarrow{\iota} H_{\rho,n}(D) \xrightarrow{\tilde{f}} H_{\rho,n}(D') \xrightarrow{\vartheta} \partial D',$$

где отображение ι существует в силу теоремы 4.8, а $\tilde{f}$ — в силу теоремы 3.10.

⁸⁾Граничная точка $x \in \partial D$ *достижима*, если существует непрерывная кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ такая, что $\gamma([0, 1)) \subset D$ и $\gamma(1) = x$.

Остается показать, что $\bar{f}$ сюръективно. Пусть $y \in \partial D'$, тогда существует последовательность $y_l \in D'$, $l = 1, 2, \dots$, такая, что $y_l \rightarrow y$ при $l \rightarrow \infty$. В силу компактности $\bar{D}$ и замкнутости f существует последовательность точек $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ таких, что $x_l \in f^{-1}(y_l)$ и $x_l \rightarrow x \in \partial D$ при $l \rightarrow \infty$ в римановой метрике. Выделяя подпоследовательность, можно считать, что $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ассоциирована с некоторой последовательностью компонент связности, поэтому существует простой конец $[E_k] \in \partial_P D$ такой, что $\bar{f}([E_k]) = y$. $\square$

Отметим, что в данном доказательстве компактность $\bar{D}'$ не используется, ср. с доказательством [40, теорема 1.1].

Благодарность. Автор благодарит научного руководителя С. К. Водопьянова за обсуждение результатов этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carathéodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. 1913. V. 73, N 3. P. 323–370.
2. Osgood W. F., Taylor E. H. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definitions // Trans. Am. Math. Soc. 1913. V. 14, N 2. P. 277–298.
3. Schlesinger E. C. Conformal invariants and prime ends // American Journal of Mathematics. 1958. V. 80, N 1. P. 83–102.
4. Водопьянов С. К. О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 630–633.
5. Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1040–1042.
6. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–65.
7. Vodopyanov S. K., Molchanova A. O. The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{p,q}$ -homeomorphisms // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. V. 87, N 4. P. 47–90.
8. Водопьянов С. К., Павлов С. В. О граничных значениях в геометрической теории функций в областях с подвижными границами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 489–516.
9. Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. Prime ends for domains in metric spaces // Adv. Math. 2013. V. 238. P. 459–505.
10. Эванс Л. К., Гарнепи Р. Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
11. Шарафутдинов В. А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.
12. Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию. СПб: Наука, 1994.
13. Hebey E. Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1999.
14. Heinonen J., Kipelaian T., Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Mineola N.Y.: Dover Publications, 2006.
15. Saloff-Coste L. Aspects of Sobolev-type inequalities. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2002.
16. Adamowicz T., Shanmugalingam N. Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Fennici Math. 2010. V. 35, N 2. P. 609–626.
17. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993.
18. Кесельман В. М. О римановых многообразиях α -параболического тип // Изв. вузов. Математика. 1985. № 4. С. 81–83.
19. Зорич В. А., Кесельман В. М. О конформном типе риманова многообразия // Функцион. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 2. С. 40–55.
20. Holopainen I. Positive solutions of quasilinear elliptic equations on Riemannian manifolds // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 3, N 3. P. 651–672.
21. Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. Classification of metric measure spaces and their ends using p -harmonic functions // Ann. Fennici Math. 2022. V. 47, N 2. P. 1025–1052.
22. Anderson J. W. Hyperbolic geometry. London: Springer-Verl., 2005.

23. Holopainen I., Pankka P. p -Laplace operator, quasiregular mappings and Picard-type theorems // Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi, Delhi: Narosa Publishing House, 2007. P. 117–150.
24. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
25. Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
26. Hausdorff F. Set theory. New York: Am. Math. Soc., 2021.
27. Näkki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n -space // Ann. Fennici Math. 1971. N 484. P. 1–50.
28. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
29. Водопьянов С. К. Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1128–1154.
30. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
31. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
32. Kangasniemi I. Notes on quasiregular maps between Riemannian manifolds. 2021. 70 p. arXiv:2109.01638.
33. Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n -space // Ann. Fennici Math. 1976. N 11. P. 1–44.
34. Vuorinen M. Conformal geometry and quasiregular mappings. Bertin; Heidelberg: Springer-Verl., 1988.
35. Srebro U. Conformal capacity and quasiregular mappings // Ann. Fennici Math. 1973. N 529. P. 1–8.
36. Полецкий Е. А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2 (10). С. 261–272.
37. Mostow G. D. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms // Publications Mathématiques de l’IHÉS. 1968. V. 34. P. 53–104.
38. Gehring F. W., Väisälä J. The coefficients of quasiconformality of domains in space // Acta Math. 1965. V. 114, N 1. P. 1–70.
39. Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. The Mazurkiewicz distance and sets that are finitely connected at the boundary // J. Geometric Anal. 2016. V. 26. P. 873–897.
40. Sevost’yanov E. On boundary extension of mappings in metric spaces in the terms of prime ends // Ann. Fennici Math. 2019. V. 44, N 2. P. 65–90.

Поступила в редакцию 19 ноября 2024 г.

После доработки 19 ноября 2024 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Сбоев Данил Алексеевич (ORCID 0009-0008-4027-9161)

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

dnlsboev@gmail.com