

УДК 512.563

СУПЕРАТОМНАЯ БУЛЕВА АЛГЕБРА С ВЫДЕЛЕННОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ, ТЕОРИЯ КОТОРОЙ НЕ ИМЕЕТ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

Аннотация. Построена суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, элементарная теория которой не имеет простой модели.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.313

Ключевые слова: булева алгебра, булева алгебра с выделенной подалгеброй, локальная алгебра, элементарная теория, конечно-аксиоматизируемая теория, разрешимая теория, элементарная эквивалентность.

Работа посвящена изучению теоретико-модельных свойств булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Далее будем называть их просто алгебрами. В такой алгебре подалгебра изоморфна самой булевой алгебре, более того, подалгебра совпадает с булевой алгеброй по модулю идеала Фреше.

Любая полная теория имеет счетные однородные модели, которые создают хороший базис для исследования. Интересен вопрос существования однородных моделей при дополнительных условиях минимальности или максимальности. Алгебраическая система называется *атомной*, если в ней реализуются только главные типы. Атомная модель является однородной. Счетная атомная модель называется *простой*. Простая модель, если она существует, элементарно вкладывается в любую модель полной теории. Полная теория T имеет простую модель тогда и только тогда, когда алгебра Линденбаума — Тарского $\mathfrak{B}_n(T)$ атомная для любого $n \in \mathbb{N}$. Атомами в алгебре $\mathfrak{B}_n(T)$ являются полные формулы. Каждая полная формула задает главный тип теории.

Хорошо известно [1], что любая бесконечная булева алгебра имеет простую модель, две счетные атомные булевы алгебры элементарно-эквивалентны и $\mathfrak{B}_\omega$ — простая модель теории атомных булевых алгебр. Существует ровно счетное число различных элементарных теорий булевых алгебр. Элементарная теория любой булевой алгебры имеет простую модель [2]. Если добавить в сигнатуру булевых алгебр одноместный предикат, выделяющий идеал, то ситуация с числом элементарных теорий и простых моделей существенно меняется [3–7]. В [7] доказано, что существует ровно счетное число различных элементарных теорий счетных суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом; элементарная теория любой счетной суператомной булевой алгебры с одним выделенным идеалом имеет простую модель. В [8] доказано, что существует континуум элементарных теорий булевых алгебр с одним выделенным идеалом,

Работа Пальчунова Д. Е. выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0011).

© 2025 Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.

не имеющих простых моделей. В [3–9] исследовались теоретико-модельные и алгоритмические свойства булевых алгебр с выделенными идеалами.

Авторы исследуют булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Ранее авторами было доказано [10, 11] существование континуума различных элементарных теорий счетных суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины, каждая из которых имеет простую модель и не имеет счетно-насыщенной модели.

В статье построена счетная суператомная булева алгебра $\mathfrak{A}$ с выделенной подалгеброй $\mathfrak{B}$ такая, что элементарная теория этой булевой алгебры с выделенной подалгеброй не имеет простой модели. Причем эта алгебра (булева алгебра с выделенной подалгеброй) принадлежит классу K_3 , из чего следует, что подалгебра $\mathfrak{B}$ «практически совпадает» с булевой алгеброй $\mathfrak{A}$.

Поясним подробнее, что это означает. Во-первых, каждый атом подалгебры это либо атом булевой алгебры, либо объединение двух атомов булевой алгебры, либо объединение трех атомов булевой алгебры.

Во-вторых, любой атом булевой алгебры лежит под некоторым атомом подалгебры, т. е. он либо является атомом подалгебры, либо является «половинкой» атома подалгебры: одним из двух атомов булевой алгебры, объединением которых является атом подалгебры, либо является «третьей» атома подалгебры: одним из трех атомов булевой алгебры, в объединении дающих атом подалгебры.

В-третьих, любой элемент булевой алгебры является объединением элемента подалгебры и конечного числа атомов булевой алгебры, т. е. состоит из элемента подалгебры и нескольких «кусочков» атомов подалгебры. При этом булева алгебра и ее подалгебра изоморфны: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

У такой очень просто устроенной счетной суператомной булевой алгебры с выделенной подалгеброй элементарная теория не имеет простой модели. Это сильно контрастирует с тем, что элементарная теория любой булевой алгебры имеет простую модель и что элементарная теория любой счетной суператомной булевой алгебры с выделенным идеалом имеет простую модель. Более того, все элементарные теории указанных алгебр имеют и счетно-насыщенные модели.

1. Основные определения и предварительные результаты

Будем рассматривать булевы алгебры в сигнатуре $\sigma = \langle \cup, \cap, C, 0, 1 \rangle$. В настоящей работе, если не оговорено иное, мы рассматриваем только счетные алгебры. Пусть $\sigma^* = \langle \sigma, P \rangle$, где P — символ одноместного предиката, выделяющего подалгебру. Булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть просто *алгеброй*. Через $P^{\mathfrak{A}} = \{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models P(a)\}$ обозначим основное множество выделенной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

Суператомную булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть *суператомной алгеброй*. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра, $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим $\hat{a} = \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\}$. Для элемента $a \in P^{\mathfrak{A}}$ определим алгебру, заданную элементом a :

$$(a) = \langle \hat{a}, \cup, \cap, C^a, 0, a, P^{\mathfrak{A}} \cap \hat{a} \rangle, \text{ где } C^a(b) = a \cap C(b).$$

Прямая сумма $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ определяется стандартным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины n* , если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ лежат не более

n атомов алгебры $\mathfrak{A}$ и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$. Такая подалгебра $\mathfrak{B}$ также называется *подалгеброй конечной ширины*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = \text{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе множество $|\mathfrak{B}|$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$.

Обозначим [10] через K_n класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [10]. Обозначим $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, если найдется $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *неисчезающей*, если из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [10]. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если число попарно элементарно неэквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ конечно, т. е. существуют $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ такие, что для произвольной неисчезающей $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}_i$ для некоторого $i \leq n$.

Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *локальным*, если найдется элемент $b \geq a$ такой, что $P(b)$ и алгебра (b) локальна. Элемент a называется *нелокальным*, если он не является локальным.

Следуя [10], приведем построение счетной последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, языка σ^* с одной свободной переменной.

Пусть φ, ψ — формулы с одной свободной переменной языка σ^* , T — теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй. Обозначим:

$\varphi \leq \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \rightarrow (\exists y \leq x)\varphi(y))$;

$\varphi \# \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \rightarrow (\forall y \leq x)\neg\varphi(y))$.

Формулы φ и ψ называются [10] *независимыми*, если $\varphi \# \psi$ и $\psi \# \varphi$.

Определим отношение линейного порядка на конечных подмножествах множества натуральных чисел без нуля. Пусть $A = \{a_1 > a_2 > \dots > a_l\}$, $B = \{b_1 > b_2 > \dots > b_m\} \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — два произвольных конечных подмножества множества натуральных чисел без нуля. Положим $A < B$, если $(a_1, a_2, \dots, a_l, 0, \dots, 0) < (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ в лексикографическом порядке, и $A \leq B$, если $A < B$ или $A = B$ (добавляем нули так, чтобы длины кортежей стали равными).

Обозначим $X = \{A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2 \leq \|A\| < \omega\}$. Занумеруем множество X в порядке возрастания: пусть $\Omega : X \rightarrow \mathbb{N}$ — взаимно-однозначное отображение всех конечных неоднородных подмножеств множества натуральных чисел без нуля на множество натуральных чисел такое, что $\Omega(A) < \Omega(B) \iff A < B$. Очевидно, что такое отображение можно определить так, чтобы оно было алгоритмически эффективным.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и соответственно класс K_n . Перейдем к построению последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ [10]. Построение будем вести по индукции.

БАЗИС ИНДУКЦИИ:

$T_1(x) = ((x - \text{атом}) \ \& \ P(x))$;

$T_l(x) = ((x - \text{объединение } l \text{ атомов}) \& P(x) \ \& \ (\forall y \leq x) \bigwedge_{i < l} \neg T_i(y))$ для

$2 \leq l \leq n$.

При помощи формулы

$$Q(x) = \exists y \exists z ((x = y \cup z) \ \& \ (y \cap z = 0) \ \& \ (\forall w \leq y)(w \neq 0 \rightarrow \neg P(w)) \ \& \ (\forall w \leq z)(w \neq 0 \rightarrow \neg P(w)))$$

определим для $2 \leq j \leq n$

$$T_{n+j-1}(x) = \left(P(x) \ \& \ (\neg Q(x) \ \& \ (\exists y \leq x) T_j(y)) \right. \\ \left. \& \left(\bigwedge_{i \neq j, i \leq n} (\forall y \leq x) \neg T_i(y) \right) \ \& \ (\forall y, z \leq x) ((y \cap z = 0 \rightarrow (Q(y) \vee Q(z))) \right).$$

Для формул $T_k(x)$, $n < k \leq 2n-1$, обозначим $T_{R_k}(x) = T_k(x)$ для множества $R_k = \{k+1-n\}$; $R_k^* = \{i \leq n \mid i \neq k+1-n\}$.

Шаг индукции. Предположим, что формулы $T_1(x), \dots, T_m(x)$ построены. Пусть $R \in X$, $R \subset \{1, 2, \dots, m\}$, такое, что $T_i \# T_j$ для любых $i, j \in R$, $i \neq j$, и имеющее наименьший номер $l = \Omega(R)$ такой, что множество R_l еще не было использовано при построении формул $T_1(x), \dots, T_m(x)$, т. е. $R = R_l$. Пусть $R = \{i_1, \dots, i_k\}$. Определим множество R^* и вспомогательные формулы $\pi_R(x)$, $T_R(x)$ следующим образом:

$$R^* = \{i \leq m \mid (T_i \# T_j) \text{ для всех } j \in R\};$$

$$\pi_R(x) = (\exists x_{i_1} \dots \exists x_{i_k}) \left(\bigwedge_{i \neq j, i, j \in R} (x_i \cap x_j = 0) \right. \\ \left. \& \left(\bigcup_{i \in R} x_i = x \right) \ \& \ \left(\bigwedge_{i \neq j, i, j \in R} (\forall z \leq x_i) \neg T_j(z) \right) \right),$$

$$T_R(x) = \left(\neg \pi_R(x) \ \& \ P(x) \ \& \ (\forall y \leq x) \left(\left(\bigvee_{i \in R} (\forall z \leq y) \neg T_i(z) \right) \rightarrow \pi_R(y) \right) \right. \\ \left. \& \ \left((\forall y \leq x) \bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y) \right) \ \& \ (\forall y \leq x) (\forall z \leq x) (y \cap z = 0 \rightarrow (\pi_R(y) \vee \pi_R(z))) \right).$$

Полагаем $T_{m+1}(x) = T_R(x)$. Обозначим $R_{m+1} = R$ и $R_{m+1}^* = R^*$.

При помощи построенной последовательности формул для каждой алгебры $\mathfrak{A}$ и каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ определена характеристическая функция $w_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$$w_a(0) = 0, \text{ если } \mathfrak{A} \models P(a); \\ w_a(0) = 1, \text{ если } \mathfrak{A} \models \neg P(a); \\ w_a(m) = 0, \text{ если } \mathfrak{A} \models (\forall y \leq a) \neg T_m(y), \ m \geq 1 \text{ и} \\ w_a(m) = \sup \{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x_1, \dots, x_k \leq a) \left(\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \cap x_j = 0 \right) \ \& \ \left(\bigwedge_{i \leq k} T_m(x_i) \right) \right) \},$$

$m \geq 1$, иначе.

Положим $w_{\mathfrak{A}} = w_{1_{\mathfrak{A}}}$.

Теорема 1.5 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные булевы алгебры с выделенными подалгебрами, принадлежащими классу K_n . Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{B}}$.

Рассмотрим обогащение сигнатуры $\sigma_1 = \sigma^* \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ конечным числом константных символов. Через $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ обозначим булеву алгебру с выделенной подалгеброй в обогащенной константами сигнатуре, где $a_1, \dots, a_k$ — значения в модели $\mathfrak{A}$ константных символов $c_1, \dots, c_k$ соответственно.

Пусть $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ и $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ — булевы алгебры с выделенными подалгебрами в обогащенной константами сигнатуре σ_1 , $A_0 \subseteq \mathfrak{A}$ и $B_0 \subseteq \mathfrak{B}$. Отображение $f : A_0 \rightarrow B_0$ назовем *частичным изоморфизмом* из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в

$(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если множество A_0 определяет подалгебру в алгебре $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, множество B_0 — подалгебру в алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ (в частности, $a_1, \dots, a_k \in A_0$ и $b_1, \dots, b_k \in B_0$) и отображение f является изоморфизмом соответствующих подалгебр, т. е. для любых $a, b \in A_0$ выполнено

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b); \quad f(a \cap b) = f(a) \cap f(b); \quad f(C(a)) = C(f(a));$$

$$P(a) \iff P(f(a)); \quad f(0) = 0; \quad f(1) = 1; \quad f(a_1) = b_1, \dots, f(a_k) = b_k.$$

Обозначим $\text{dom } f = A_0$, $\text{im } f = B_0$.

Отображение $f : A_0 \rightarrow B_0$ назовем *конечным частичным изоморфизмом*, если это отображение является частичным изоморфизмом и его область определения $\text{dom } f = A_0$ конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 [10]. Будем говорить, что алгебра $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ *m-эквивалентна* алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ и обозначать $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если существуют непустые множества $F_0, \dots, F_m$ конечных частичных изоморфизмов из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $l < m$, $f \in F_l$, $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ найдутся $g_1, g_2 \in F_{l+1}$ такие, что $g_1, g_2 \supset f$, $a \in \text{dom } g_1$ и $b \in \text{im } g_2$.

Будем обозначать $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ для алгебр без выделенных констант, т. е. если $\sigma_1 = \sigma^*$.

Пусть ϕ — предложение языка σ^* . *Длиной* предложения ϕ , обозначим $ln(\phi)$, называется число кванторов в этой формуле. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.7. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры с выделенной подалгеброй, $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, ϕ — предложение языка σ^* и $ln(\phi) \leq m$. Тогда $\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{B} \models \phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине предложения ϕ . Доказательство подобно доказательству теоремы 24.1 из [12].

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра с выделенной подалгеброй и $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим:

$M(a) \equiv \{m \neq 0 \mid w_a(m) \neq 0\}$ — носитель характеристической функции w_a .

Начиная с [11], мы определяем носитель функции w_a на ненулевых элементах, поскольку нумерация формул $\{T_k \mid k \geq 1\}$ начинается с единицы, а $w_a(0) = 0 \iff P(a)$.

$N(a) \equiv \{m \in M(a) \mid \forall l \in M(a) (T_m \leq T_l \rightarrow m = l)\}$ — множество максимальных элементов множества $M(a)$ относительно следующего порядка: $\leq(m, l) \iff T_m \leq T_l$.

$$M(\mathfrak{A}) \equiv M(1^{\mathfrak{A}}); \quad N(\mathfrak{A}) \equiv N(1^{\mathfrak{A}}).$$

Заметим, что если множество $N(a)$ конечно, то множество $M(a)$ также конечно.

Следующее определение является уточнением подобного определения из [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8 [11]. Элемент a булевой алгебры с выделенной подалгеброй называется *локальным*, если $M(a)$ конечно, *m-простым*, если $M(a)$ конечно, $N(a) = \{m\}$ и выполнено $P(a)$. Элемент a называется *простым*, если либо $a \in F(\mathfrak{A})$ и найдутся число $l \leq n$ и l -простой элемент $d \geq a$, либо a является m -простым для некоторого m .

В [10] мы считали, что любой элемент $a \in F(\mathfrak{A})$ является простым. Однако в этом случае множество $N(a)$ может не быть одноэлементным, а в случае, когда

$N(a) = \emptyset$, найдутся элементы $a_i \leq a$ и i -простые элементы $b_i \geq a_i$, $1 \leq i \leq n$, такие, что $a = a_1 \cup \dots \cup a_n$. Естественнее считать простыми элементами те элементы, для которых множество $\{i \mid a_i \neq 0\}$ одноэлементно. Уточненное определение оставляет все доказанные утверждения в [10] верными, поскольку любой элемент идеала Фреше в таком случае является объединением конечного числа простых элементов. Уточненное определение авторами введено в [11].

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой* (*m -простой*), если $1^{\mathfrak{A}}$ есть простой (*m -простой*) элемент.

Предложение 1.9 [10]. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $a \in \mathfrak{A}$. В алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено $T_l(a)$ тогда и только тогда, когда элемент a является l -простым и $w_a(l) = 1$.

Предложение 1.10 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n . Тогда любой элемент алгебры $\mathfrak{A}$ является объединением конечного числа попарно не пересекающихся простых элементов.

Предложение 1.11 [10]. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. Тогда для любого $a \in \mathfrak{A}$ найдутся элементы $b, c \leq a$ такие, что $b \cup c = a$, $b \cap c = 0$, $P(b)$ и $c \in F(\mathfrak{A})$.

Предложение 1.12 [10]. (а) Если $n \geq 2$, то процесс построения формул $T_l(x)$ не прервется, т. е. для любого l формула $T_l(x)$ будет построена.

(б) Если $n \geq 3$, то найдется бесконечное множество A такое, что $T_i \# T_j$ для различных $i, j \in A$.

Предложение 1.13 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — l -простые алгебры, принадлежащие классу K_n . Предположим, что $w_{\mathfrak{A}}(l), w_{\mathfrak{B}}(l) \geq 2^m$ и $l > n$. Тогда $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Предложение 1.14 [10]. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была локальной, необходимо и достаточно, чтобы множество $M(\mathfrak{A})$ было конечным.

Предложение 1.15 [10]. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. Тогда

(а) для любых непересекающихся элементов $a, b \in P(\mathfrak{A})$ и числа $l \in \mathbb{N}$ выполняется $w_{a \cup b}(l) = w_a(l) + w_b(l)$, если $w_a(l) < \infty$ или $w_b(l) < \infty$, и $w_{a \cup b}(l) = \infty$ в противном случае;

(б) для любых локальных элементов $a \leq b$ выполняется $w_a \leq w_b$;

(в) если a — k -простой элемент и $2 \leq k \leq n$, то $w_a(k) < \infty$.

Предложение 1.16 [10]. Пусть множества R, R^* из построения последовательности формул T_m , $m \geq 1$. Справедливы следующие утверждения:

(1) для любого $i \in R$ справедливо $T_i \leq T_R$;

(2) для любого $i \in R^*$ справедливо $T_i \# T_R$;

(3) если $i < j$, то $T_j \# T_i$;

(4) для любых i, j либо $T_i \leq T_j$, либо $T_i \# T_j$;

(5) $T_i \leq T_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$ или найдутся множества $R_1, \dots, R_k$ такие, что $i \in R_1$, $T_{l_1} = T_{R_1}$, $l_1 \in R_2, \dots, T_j = T_{R_k}$.

Определим формулы:

$$T_{n+j-1}^*(x) = P(x) \& \left(\neg Q(x) \& (\exists y \leq x) T_j(y) \& \left(\bigwedge_{i \neq j, i \leq n} (\forall y \leq x) \neg T_i(y) \right) \right)$$

для $2 \leq j \leq n$,

$$T_l^*(x) = \left(\neg \pi_R(x) \& P(x) \& (\forall y \leq x) \left(\left(\bigvee_{i \in R} (\forall z \leq y) \neg T_i(z) \right) \rightarrow \pi_R(y) \right) \& \left((\forall y \leq x) \bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y) \right) \right),$$

где множества R и R^* из определения формулы $T_l(x)$, $l > 2n - 1$.

Предложение 1.17. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \exists x T_l(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем для $l > 2n - 1$, для $n < l \leq 2n - 1$ доказательство аналогично.

Заметим, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ если $\mathfrak{A} \models T_l^*(a)$, то $\mathfrak{A} \models T_l(a)$ или $\mathfrak{A} \models (\exists y \leq a \exists z \leq a)(y \cap z = 0 \ \& \ T_l^*(y) \ \& \ T_l^*(z))$. Рассмотрим множество

$$Y = \{y \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models T_l^*(y)\}.$$

Пусть $y_0 \in Y$ имеет наименьший тип суператомности $\tau(y_0) = (\alpha_0, n_0)$, т. е. для любого элемента $y \in Y$ с типом суператомности (α, n) выполнено:

$$(\alpha_0 < \alpha) \text{ или } (\alpha_0 = \alpha) \ \& \ (n_0 \leq n).$$

Предположим, что $\mathfrak{A} \models (b \cap c = 0 \ \& \ T_l^*(b) \ \& \ T_l^*(c))$ для некоторых $b, c \leq y_0$. Пусть $\tau(b) = (\alpha_1, n_1)$, $\tau(c) = (\alpha_2, n_2)$. В силу минимальности элемента $\tau(y_0)$ заключаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ и $n_0 + n_0 \leq n_1 + n_2 \leq n_0$. Противоречие. Стало быть, $\mathfrak{A} \models T_l(y_0)$. Предложение доказано.

Предложение 1.18. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$, $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$, $\mathfrak{A} \models T_s(x)$. Тогда $s \leq l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем для $l > 2n - 1$, для $n < l \leq 2n - 1$ доказательство аналогично. Предположим противное. Выберем наименьшее $s > l$, для которого $\mathfrak{A} \models T_s(x)$. Пусть $T_s = T_{R_s}$ и $T_l = T_{R_l}$. Если $p \in R_s$, то в силу минимальности s заключаем, что $p \leq l$. Если $p = l$, то найдется $p_1 \in R_s$ такое, что $p \neq p_1$. В этом случае $p_1 \leq l$ и $p_1 \neq l$. Следовательно, $p_1 < l$. Стало быть, $p_1 \in R_l$. Последнее влечет, что $T_{p_1} \leq T_p$. Противоречие. Значит, $p < l$. Таким образом, для каждого $p \in R_s$ найдется $q \in R_l$ такое, что $T_p \leq T_q$ и $p \leq q$. Последнее означает, что $R_s < R_l$ и $\Omega(R_s) < \Omega(R_l)$. Следовательно, $s \leq l$.

Предложение 1.19. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$, $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$. Тогда $\mathfrak{A}$ — l -простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложений 1.17 и 1.18.

2. Теория без простой модели

В этом разделе построим алгебру из класса K_n , $n \geq 3$, теория которой не имеет простой модели.

В [11] доказана следующая

Теорема 2.1 [11]. Пусть каждое разложение $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ счетной алгебры $\mathfrak{A} \in K_n$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) если $\mathfrak{B}$ локальна, то для любого $l \in N(\mathfrak{B})$ если $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$, то $w_{\mathfrak{C}}(l) < \infty$;
- (б) если $\mathfrak{B}$ нелокальная, то $\mathfrak{C}$ локальная.

Тогда $\mathfrak{A}$ — простая модель.

Заметим, что здесь $P(1^{\mathfrak{A}})$, $P(1^{\mathfrak{B}})$, $P(1^{\mathfrak{C}})$. Стало быть, алгебру $\mathfrak{B}$ можно заменить алгеброй (b) , алгебру $\mathfrak{C}$ — алгеброй (c) , где $b, c \in \mathfrak{A}$, $b \cap c = 0$, $b \cup c = 1$, $P(b)$, $P(c)$, и теорема останется верной.

В [10] для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ построена алгебра $\mathfrak{N}_k \models T_k(1)$. Алгебра $\mathfrak{N}_k$ является локальной, неисчезающей и простой моделью для всех $k \in \mathbb{N}$. С использованием введенных алгебр $\mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, и конструкции прямой суммы в [11] построена простая модель для каждой элементарной теории локальной модели. Для каждого числа k алгебра $\mathfrak{A}_k$ удовлетворяет условию (а) из теоремы 2.1.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.2. *Локальная алгебра $\mathfrak{A} \in K_n$ является простой моделью своей теории тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in \mathfrak{A}$ если $l \in N(b)$ и $w_b(l) = \infty$, то $w_{1 \setminus b}(l) < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A}$ — простая модель, $b \in \mathfrak{A}$, $l \in N(b)$, $w_b(l) = \infty$, $c = 1 \setminus b$ и $w_c(l) = \infty$. Возможны два случая:

- 1) $l \in N(c)$;
- 2) $l \notin N(c)$.

В обоих случаях в силу предложений 1.10, 1.15(а) существует разложение $b = b_1 \cup \dots \cup b_k$ такое, что $b_i \cap b_j = 0$ при $i \neq j$ и b_i — простые элементы, причем b_1 — l -простой элемент и $w_{b_1}(l) = \infty$. Заменяя b на b_1 , без ограничения общности полагаем, что b — l -простой элемент и $w_b(l) = \infty$.

СЛУЧАЙ 1: $l \in N(c)$. Аналогично найдется l -простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_d(l) = \infty$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{B} = (b)$, $\mathfrak{M} = (d)$ и $\mathfrak{N} = (1 \setminus (b \cup d))$.

Рассмотрим $(\mathfrak{A}, b) = (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0)$. Пусть $\phi(x)$ — полная формула в $\text{Th}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} \models \phi(b)$, пусть $m = \text{ln}(\phi)$. Так как $w_b(l) = \infty$, найдутся непересекающиеся элементы $e_1, \dots, e_{2^m} \leq b$ такие, что $T_l(e_i)$ для всех $1 \leq i \leq 2^m$. Возьмем $b_0 = e_1 \cup \dots \cup e_{2^m}$. В силу предложения 1.15(а) получаем, что $w_{b_0}(l) = 2^m$. Пусть $\mathfrak{B}_0 = (b_0)$. Из $w_b(l) = \infty$ на основании предложения 1.15(в) следует, что $l > n$. Применяя предложение 1.13, заключаем, что $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{B}_0$. Поэтому $(\mathfrak{B}, b) \equiv_m (\mathfrak{B}_0, b_0)$. Обозначим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{A}_0, b_0) = (\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) \equiv_m (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) = (\mathfrak{A}, b).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$. Кроме того, $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$ — l -простые с $w_1(l) = \infty$. По теореме 1.5 $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}$. Кроме того, $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$ и ϕ — полная формула в $\text{Th}(\mathfrak{A}_0) = \text{Th}(\mathfrak{A})$. Следовательно, $w_{b_0}(l) = w_b(l) = \infty$. Противоречие.

СЛУЧАЙ 2: $l \notin N(c)$.

В этом случае найдется l^* -простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_d(l^*) = 1$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{B} = (b)$, $\mathfrak{M} = (d)$ и $\mathfrak{N} = (1 \setminus (b \cup d))$.

Рассмотрим $(\mathfrak{A}, b) = (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0)$. Пусть $\phi(x)$ — полная формула в $\text{Th}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} \models \phi(b)$, пусть $m = \text{ln}(\phi)$. Так как $w_b(l) = \infty$, найдется l -простой элемент $b_0 \leq b$ такой, что $w_{b_0}(l) = 2^m$.

Пусть $\mathfrak{B}_0 = (b_0)$. Тогда $(\mathfrak{B}, b) \equiv_m (\mathfrak{B}_0, b_0)$. Обозначим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{A}_0, b_0) = (\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) \equiv_m (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) = (\mathfrak{A}, b).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$. Кроме того, $T_{l^*}(b_0 \cup d)$, $T_{l^*}(b \cup d)$, $T_{l^*}(d)$. По теореме 1.5 $(\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \equiv (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0)$. Поэтому $(\mathfrak{A}_0, b_0) \equiv (\mathfrak{A}, b)$. Кроме того, $(\mathfrak{A}_0, b_0) \models \phi(b_0)$ и ϕ — полная формула в $\text{Th}(\mathfrak{A}_0, b_0) = \text{Th}(\mathfrak{A}, b)$. Следовательно, $w_{b_0}(l) = w_b(l) = \infty$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Следует из теоремы 2.1.

Утверждение 2.3. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ — локальная алгебра, являющаяся простой моделью, $a \in \mathfrak{A}$ и выполнено $P(a)$. Тогда (a) — простая модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \leq a$, $l \in N(c)$ и $w_c(l) = \infty$. В силу теоремы 2.2 получаем $w_{1 \setminus c}(l) < \infty$. Следовательно, $w_{a \setminus c}(l) \leq w_{1 \setminus c}(l) < \infty$. Значит, (a) — простая модель.

Утверждение 2.4. Пусть $d \in \mathfrak{N}_i$ и d — l -простой элемент. Тогда $w_d(l) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d — l -простой элемент и $w_d(l) = \infty$. Тогда $l \in N(d)$. Алгебра $\mathfrak{N}_i$ является простой моделью. Следовательно, $w_{C(d)}(l) < \infty$. Заметим, что $w_{\mathfrak{N}_i}(l) \geq w_d(l) = \infty$. Тогда $w_{\mathfrak{N}_i}(l) = \infty$. Из $\mathfrak{N}_i \equiv (d) \times C(d)$ в силу неисчезаемости алгебры $\mathfrak{N}_i$ получаем, что $\mathfrak{N}_i \equiv (d)$. Так как $\mathfrak{N}_i \models T_i(1)$, то $(d) \models T_i(1)$. Значит, $N(d) = \{i\}$, $i = l$ и $1 = w_d(i) = w_d(l) = \infty$. Полученное противоречие завершает обоснование.

Утверждение 2.5. (а) Пусть $\mathfrak{A} = \sum_{i \in \mathbb{N}} (a_i)$, где a_i — локальные элементы для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ такого, что $P(a)$, если a — нелокальный элемент, то элемент $C(a)$ локальный.

(б) Пусть $\mathfrak{A} = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((a_i) \times (b))$, где a_i — локальные элементы для всех $i \in \mathbb{N}$, $T_l(b)$ для некоторого числа $l \in \mathbb{N}$, $l \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M(a_i)$ и $a \in \mathfrak{A}$. Тогда если a — нелокальный элемент, то $w_a(l) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если a — нелокальный элемент, то по определению прямой суммы найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{i > k} a_i \leq a$. Тогда $C(a) \leq a_1 \cup \dots \cup a_k$. В этом случае $M(C(a)) \subset M(a_1) \cup \dots \cup M(a_k)$ — конечное множество. Следовательно, $C(a)$ — локальный элемент.

П. (б) обосновывается аналогично п. (а).

Предложение 2.6. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n , $l \in N(\mathfrak{A})$, $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$. Тогда найдется l -простой элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $w_a(l) = \infty$ и $w_{1 \setminus a}(l) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{A}$ локальная, в силу предложения 1.10 $1^{\mathfrak{A}} = a_1 \cup \dots \cup a_k$ — объединение конечного числа простых элементов. Без ограничения общности можно считать, что a_1 — l -простой элемент, $w_l(a_1) = \infty$, а элементы $a_2, \dots, a_k$ не являются l -простыми. Предположим, что $w_{a_i}(l) \neq 0$ для некоторого $2 \leq i \leq k$. Тогда найдется число l^* такое, что a_i — l^* -простой элемент и $T_l \leq T_{l^*}$. Последнее влечет, что $l \notin N(\mathfrak{A})$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Утверждение 2.7. Пусть $a \in \mathfrak{N}_i \times \mathfrak{N}_j$ для $i, j \in \mathbb{N}$ и выполнено $P(a)$. Тогда (a) — простая модель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра (a) локальна. Пусть $c \leq a$, $w_c(l) = \infty$ и $l \in N(c)$. Обозначим $d_1 = 1^{\mathfrak{N}_i}$, $d_2 = 1^{\mathfrak{N}_j}$. Тогда $c = (c \cap d_1) \cup (c \cap d_2)$. Так как $w_c(l) = \infty$, без ограничения общности можно считать, что $w_{c \cap d_1}(l) = \infty$. Поскольку $l \in N(c)$, то $l \in N(c \cap d_1)$. Поэтому в силу предложения 2.6 найдется l -простой элемент $c_1 \leq c \cap d_1$ такой, что $w_{c_1}(l) = \infty$. Применяя утверждение 2.4, заключаем, что $w_{c_1}(l) < \infty$. Противоречие. Стало быть, для любого $c \leq a$ если $l \in N(c)$, то $w_c(l) < \infty$. Следовательно, в силу теоремы 2.2 алгебра (a) является простой моделью своей теории.

Перейдем к описанию конструкции алгебры, которая не имеет простой модели.

Пусть $n \geq 3$. Тогда в силу предложения 1.12 существует бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_i \# T_j$ для всех $i, j \in A$. Несложно доказать существование множества A , дополнительно удовлетворяющего условию $T_1, T_2, \dots, T_n \leq T_i$ для всех $i \in A$.

Зафиксируем произвольное число $l \in A$. Разобьем множество $\{T_i \mid i \in A, i \neq l\}$ на бесконечное множество троек формул:

$$\{A_0^k, B_0^k, C_0^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{T_i \mid i \in A, i \neq l\}.$$

Определим по индукции последовательность формул A_i^k, B_i^k, C_i^k следующим образом.

БАЗИС ИНДУКЦИИ: A_0^k, B_0^k, C_0^k определены.

ШАГ ИНДУКЦИИ: $A_{i+1}^k = T_{\{B_i^k, C_i^k\}}, B_{i+1}^k = T_{\{A_i^k, C_i^k\}}, C_{i+1}^k = T_{\{A_i^k, B_i^k\}}.$

Утверждение 2.8. Для любых чисел $i, j, k, s \in \mathbb{N}$ если $k \neq s$, то справедливо следующее:

- (а) $A_i^k \leq B_{i+1}^k, A_i^k \leq C_{i+1}^k, A_i^k \leq A_{i+2}^k, A_i^k \leq B_{i+2}^k, A_i^k \leq C_{i+2}^k, A_i^k \# B_i^k, A_i^k \# C_i^k, A_i^k \# A_{i+1}^k;$
- (б) $B_i^k \leq A_{i+1}^k, B_i^k \leq C_{i+1}^k, B_i^k \leq B_{i+2}^k, B_i^k \leq A_{i+2}^k, B_i^k \leq C_{i+2}^k, B_i^k \# A_i^k, B_i^k \# C_i^k, B_i^k \# B_{i+1}^k;$
- (в) $C_i^k \leq B_{i+1}^k, C_i^k \leq A_{i+1}^k, C_i^k \leq C_{i+2}^k, C_i^k \leq A_{i+2}^k, C_i^k \leq B_{i+2}^k, C_i^k \# A_i^k, C_i^k \# B_i^k, C_i^k \# C_{i+1}^k;$
- (г) $A_i^k \# A_j^s, A_i^k \# B_j^s, A_i^k \# C_j^s;$
- (д) $B_i^k \# A_j^s, B_i^k \# B_j^s, B_i^k \# C_j^s;$
- (е) $C_i^k \# A_j^s, C_i^k \# B_j^s, C_i^k \# C_j^s.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Истинность (а), (б) и (в) следует непосредственно из построения формул и предложения 1.16.

(г) Докажем, что $A_i^k \# A_j^s$. Предположим, что $A_i^k \leq A_j^s$. Тогда $A_0^k \leq A_i^k$ или $B_0^k \leq A_i^k$, или $C_0^k \leq A_i^k$. Пусть $A_0^k \leq A_i^k$. Тогда $A_0^k \leq A_j^s$. Индукцией по j докажем, что такого быть не может. Если $j = 0$, то нарушается условие о независимости формул с нижним нулевым индексом. Шаг индукции. Пусть $A_0^k \leq A_j^s$ и $j \geq 1$. Если $A_0^k = A_j^s$, то одна из формул $A_0^s, B_0^s, C_0^s \leq A_0^k$. Противоречие. Следовательно, $A_0^k \neq A_j^s$ и, стало быть, $A_0^k \leq B_{j-1}^s$ или $A_0^k \leq C_{j-1}^s$. Индукционное предположение ведет к противоречию, что завершает доказательство утверждения 2.8. Остальные пункты доказываются аналогично.

Исходя из определения m -эквивалентности без труда доказываются следующие факты.

Утверждение 2.9. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (а) для любого $a \in \mathfrak{A}$ найдется элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b);$
- (б) для любого $b \in \mathfrak{B}$ найдется элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определения 1.6.

Утверждение 2.10. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Тогда если $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определения 1.6.

Утверждение 2.11. Пусть $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i, i \in \mathbb{N}$, — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй и $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{B}_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i \equiv_m \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определения 1.6.

Предложение 2.12. Пусть на алгебре $\mathfrak{A}$ истинна одна из формул $A_m^k(1)$, $B_m^k(1)$ или $C_m^k(1)$, а на алгебре $\mathfrak{B}$ истинна одна из формул $A_s^k(1)$, $B_s^k(1)$ или $C_s^k(1)$ и $m \leq s$. Если модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ простые, то $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Доказательство. Заметим, что если на $\mathfrak{A}$ истинна одна из формул $A_m^k(1)$, $B_m^k(1)$, то множество $N(\mathfrak{A})$ одноэлементно и, следовательно, алгебра $\mathfrak{A}$ локальна исходя из определения последовательности формул $T_k(x)$. Аналогично алгебра $\mathfrak{B}$ также локальна. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — простые модели своих элементарных теорий.

Требуемое утверждение докажем индукцией по числу m .

Базис индукции $m = 0$. Имеем $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$.

Шаг индукции. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A} \models A_{m+1}^k(1)$ и $\mathfrak{B} \models C_{s+1}^k(1)$ и $s \geq m$.

Напомним, что в [10] для каждого числа i построена алгебра $\mathfrak{N}_i$ такая, что $\mathfrak{N}_i \models T_i(1)$. В [11] доказано, что построенная алгебра является простой моделью своей элементарной теории.

Так как $\mathfrak{A} \models A_{m+1}^k = T_{\{B_m^k, C_m^k\}}(1)$, найдется число $t \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{A} \models T_t(1)$. По условию $\mathfrak{A}$ — простая модель своей элементарной теории и $\mathfrak{N}_t \models T_t(1)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_t$.

По построению $A_{m+1}^k = T_{\{B_m^k, C_m^k\}}$. Пусть $T_p = B_m^k$, $T_v = C_m^k$. Тогда $\mathfrak{N}_p \models B_m^k(1)$ и $\mathfrak{N}_v \models C_m^k(1)$. Рассмотрим прямую сумму $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p^{(i)} \times \mathfrak{N}_v^{(i)})$, где $\mathfrak{N}_p^{(i)} \cong \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_v^{(i)} \cong \mathfrak{N}_v$. Тогда $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p^{(i)} \times \mathfrak{N}_v^{(i)})$ — простая модель, на которой истинно предложение $A_{m+1}^k(1)$.

Напомним, что предложение $A_{m+1}^k(1) = T_{\{B_m^k, C_m^k\}}(1)$ аксиоматизирует полную теорию. Кроме того, $\mathfrak{A} \models A_{m+1}^k(1)$. Поэтому $\mathfrak{A} \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p^{(i)} \times \mathfrak{N}_v^{(i)})$. В силу единственности простой модели имеем $\mathfrak{A} \cong \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p^{(i)} \times \mathfrak{N}_v^{(i)})$.

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$\mathfrak{A} = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((b_i) \times (c_i)), \quad \mathfrak{B} = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((a'_i) \times (b'_i)),$$

где $(b_i) \models B_m^k(1)$, $(c_i) \models C_m^k(1)$, $(a'_i) \models A_s^k(1)$, $(b'_i) \models B_s^k(1)$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

В силу индукционного предположения $(a'_i) \equiv_m (b_i) \equiv_m (b'_i) \equiv_m (c_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, ввиду утверждения 2.11 $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Докажем, что $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$. Для этого достаточно показать, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ найдется $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$. Существование такого же элемента $a \in \mathfrak{A}$ для элемента $b \in \mathfrak{B}$ доказывается аналогично.

Рассмотрим следующие случаи.

СЛУЧАЙ 1: выполнено $B_m^k(a)$ или $C_m^k(a)$. Рассмотрим элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $B_s^k(b)$. По индукционному предположению $(a) \equiv_m (b)$. Так как $\mathfrak{A}$ — локальная и простая модель, в силу утверждения 2.3 $(C(a))$ — простая модель. Заметим, что $(C(a)) \models A_{m+1}^k(1)$. Стало быть, $\mathfrak{A} \equiv (C(a))$. Следовательно, $\mathfrak{A} \cong (C(a))$. Аналогично $\mathfrak{B} \cong (C(b))$. Далее,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, a) &\cong ((a), a) \times (C(a), 0) \equiv ((a), a) \times (\mathfrak{A}, 0) \\ &\equiv_m ((b), b) \times (\mathfrak{B}, 0) \equiv ((b), b) \times (C(b), 0) \cong (\mathfrak{B}, b), \end{aligned}$$

т. е. $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

СЛУЧАЙ 2: выполнено $T_j(a)$, при этом $((T_j \leq B_m^k) \text{ и } (T_j \neq B_m^k))$ или $((T_j \leq C_m^k) \text{ и } (T_j \neq C_m^k))$ для некоторого j . Тогда $T_j \leq A_{m-1}^k$ или $T_j \leq B_{m-1}^k$, или $T_j \leq C_{m-1}^k$. В силу утверждения 2.8 $A_{m-1}^k, B_{m-1}^k, C_{m-1}^k \leq C_{s+1}^k$. Стало быть, найдется элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $T_j(b)$. Значит, по теореме 1.15 $(a) \equiv (b)$. Так как $(C(a)) \equiv \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \equiv (C(b))$, то $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

СЛУЧАЙ 3: $a \leq d$, $\neg P(a)$, $T_i(d)$ для $i \leq n$ и некоторого элемента $d \in \mathfrak{A}$. Так как $T_1, T_2, \dots, T_n \leq C_{s+1}^k$, найдется элемент $e \in \mathfrak{B}$ такой, что $T_i(e)$. Тогда найдется $b \leq e$ с таким же числом атомов, что и у элемента $a \in \mathfrak{A}$. Значит, $((d), a) \cong ((e), b)$.

Отсюда следует, что $(\mathfrak{A}, a) \cong ((d), a) \times (C(d), 0) \equiv ((d), a) \times (\mathfrak{A}, 0) \equiv_m ((e), b) \times (\mathfrak{B}, 0) \equiv ((e), b) \times (C(e), 0) \equiv (\mathfrak{B}, b)$, т. е. $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

СЛУЧАЙ 4: найдутся элементы $c, d \in \mathfrak{A}$ такие, что $a = c \cup d$, $P(c)$, $d \in F(\mathfrak{A})$, $c \cap d = 0$, $(c) \neq \mathfrak{A}$. В этом случае элемент $c = c_1 \cup \dots \cup c_k$ — объединение конечного числа непересекающихся простых элементов. Пусть c_1 — r -простой элемент для некоторого r . Напомним, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_t$. Поскольку изоморфизм сохраняет элементарную характеристику, в силу утверждения 2.4 $w_{c_1}(r) < \infty$. Значит, элемент c есть объединение конечного числа элементов, удовлетворяющих случаю 1 или случаю 2, а элемент d есть объединение конечного числа элементов из случая 3.

Можно считать, что элементы, входящие в упомянутое разложение элементов c и d , попарно не пересекаются. Тогда можно конечное число раз применить утверждения, доказанные для случаев 1–3, и утверждение 2.10. Поэтому в силу утверждения 2.9 существование требуемого элемента $b \in \mathfrak{B}$ доказано.

СЛУЧАЙ 5: $C(a) = c \cup d$, $P(c)$, $d \in F(\mathfrak{A})$, $c \cap d = 0$, $(C(c)) \neq \mathfrak{A}$. Тогда для $C(a)$ имеет место случай 4. Заметим, что задача для элемента a найти элемент b с $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$ равносильна задаче найти элемент b с $(\mathfrak{A}, C(a)) \equiv_m (\mathfrak{B}, C(b))$. Поэтому этот случай симметричен случаю 4.

Заметим, что исходя из определения прямой суммы и того, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_t$, для любого элемента $a \in P^{\mathfrak{A}}$ либо $((a) \cong \mathfrak{A} \text{ и } (C(a)) \neq \mathfrak{A})$, либо $((a) \neq \mathfrak{A} \text{ и } (C(a)) \cong \mathfrak{A})$. Поэтому в силу предложения 1.11 для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ возможны только случаи 4 или 5. Таким образом, разбор случаев завершен и предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{D} \models T_i(1)$ и $\mathfrak{D}_k \models A_k^k(1)$ — алгебры, являющиеся простыми моделями. Для каждой алгебры $\mathfrak{B} = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{D})$ и числа $m \in \mathbb{N}$ определим алгебру

$$\mathfrak{B}^{(m)} = (\mathfrak{M}'_i \times \mathfrak{D}) \times \sum_{i \in \mathbb{N}, i \neq m} (\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{D}),$$

где $\mathfrak{M}'_i \models A_{m+1}^m(1)$ — алгебра, являющаяся простой моделью.

Построим последовательность алгебр $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k, \dots$ следующим образом:

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D});$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1^{(1)}; \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_2^{(2)};$$

$$\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_1^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_6 = \mathfrak{A}_2^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_7 = \mathfrak{A}_3^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_8 = \mathfrak{A}_4^{(3)}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $r = 2^{k-1}$. Тогда определим

$$\mathfrak{A}_{r+1} = \mathfrak{A}_1^{(k)}, \quad \mathfrak{A}_{r+2} = \mathfrak{A}_2^{(k)}, \dots, \mathfrak{A}_{r+r} = \mathfrak{A}_r^{(k)}.$$

Утверждение 2.13. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{A}_i$ является простой моделью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$. Заметим, что множество $M(\mathfrak{A}_i)$ бесконечно. Следовательно, $\mathfrak{A}_i$ — нелокальная алгебра. Для любого разложения $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ найдется $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(a) \cong \mathfrak{B}$ и $C(a) \cong \mathfrak{C}$, при этом выполнено $P(a)$. В силу утверждения 2.5 тогда либо (a) локальна, либо $C(a)$ локальна. Стало быть, если $\mathfrak{B}$ нелокальная, то $\mathfrak{C}$ локальная и условие (б) теоремы 2.1 выполнено.

Пусть a локальный, $j \in N(a)$ и $w_a(j) = \infty$. По построению алгебры $\mathfrak{A}_i$ выполнено

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{s \in \mathbb{N}} (d_s),$$

где для любого s имеем (d_s) — простая модель и, кроме того, $(d_s) \models T_l(1)$, либо $(d_s) \models A_k^m(1)$ для некоторых m и k . Значит, $(d_s) \models T_t(1)$ для некоторого t . Поэтому для каждого $s \in \mathbb{N}$ найдется $t \in \mathbb{N}$ такой, что $(d_s) \cong \mathfrak{N}_t$. Тогда $a \leq d_1 \cup \dots \cup d_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a = (a \cap d_1) \cup \dots \cup (a \cap d_k)$. Так как $w_a(j) = \infty$, то $w_{a \cap d_s}(j) = \infty$ для некоторого $s \leq k$. Так как $j \in N(a)$, то $j \in N(a \cap d_s)$. Найдутся число $r \in \mathbb{N}$ и непересекающиеся l_p -простые элементы e_p для $1 \leq p \leq r$ такие, что $a \cap d_s = e_1 \cup \dots \cup e_r$. Без ограничения общности предположим, что $w_{e_1}(j) = \infty$. В этом случае $l_1 = j$ или $j < l_1$ и $T_j \leq T_{l_1}$. Последнее влечет, что $j \notin N(a)$. Значит, $l_1 = j$. Так как алгебра (d_s) — простая модель, в силу утверждения 2.4 $w_{e_1}(j) < \infty$. Противоречие. Аналогично $w_{e_2}(j) < \infty, \dots, w_{e_r}(j) < \infty$. Стало быть, $w_{a \cap d_s}(j) < \infty$. Противоречие. По теореме 2.1 алгебра $\mathfrak{A}_i$ является простой моделью своей элементарной теории.

Предложение 2.14. Для каждых $i, m \in \mathbb{N}$ найдется $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{A}_j$ и $\mathfrak{A}_i \not\equiv \mathfrak{A}_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим число s такое, что $i \leq 2^{s-1}$ и $s \geq m$. Пусть $\mathfrak{A}_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D})$. Так как $i \leq 2^{s-1}$, то $\mathfrak{M}_s \models A_s^s(1)$. Рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{A}_i^{(s)} = (\mathfrak{M}'_s \times \mathfrak{D}) \times \sum_{k \neq s} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D}).$$

Так как $\mathfrak{M}'_s \models A_{s+1}^s(1)$, в силу утверждения 2.10 и предложения 2.12 получаем

$$\mathfrak{A}_i^{(s)} \equiv_s (\mathfrak{M}_s \times \mathfrak{D}) \times \sum_{k \neq s} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D}) \equiv \mathfrak{A}_i.$$

Так как $s \geq m$, то, взяв $j = i + 2^{s-1}$, получим $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_i^{(s)} \equiv_m \mathfrak{A}_i$. Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Будем говорить, что формула T_s *отделима под элементом a* , если $w_a(s) = 0$ или найдется s -простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_{a \setminus b}(s) = 0$.

Предложение 2.16. Пусть $a \in \mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Элемент a является локальным тогда и только тогда, когда формула T_l отделяется под элементом a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Предположим, что a — нелокальный элемент и формула T_l отделяется под элементом a . В силу построения модели $\mathfrak{A}_i$ и утверждения 2.5 заключаем, что $w_a(l) = \infty$. Следовательно, найдется l -простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_{a \setminus b}(l) = 0$. Как ранее отмечалось, l -простой элемент

является локальным. Значит, элемент b локальный. Следовательно, элемент $a \setminus b$ нелокальный. Тем самым в силу утверждения 2.5 $w_{a \setminus b}(l) = \infty$. Противоречие.

($\Rightarrow$) Пусть a — локальный элемент и $w_a(l) \neq 0$. Тогда $a \leq b_0 \cup c_0 \cup \dots \cup b_k \cup c_k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$w_a(l) = w_{b_0 \cap a}(l) + w_{c_0 \cap a}(l) + \dots + w_{b_k \cap a}(l) + w_{c_k \cap a}(l).$$

Заметим, что

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{s \in \mathbb{N}} ((b_s) \times (c_s)),$$

причем $(b_s) \cong \mathfrak{N}_{j_s}$ и $(c_s) \cong \mathfrak{N}_l$. В силу утверждения 2.8 формулы $T_{j_0}, T_{j_1}, T_{j_2}, \dots$ попарно независимы.

Кроме того, если $T_{i_j} \leq T_l$, то $A_0^k \leq T_l$, $B_0^k \leq T_l$ или $C_0^k \leq T_l$ для некоторого k , что невозможно по построению. Также по построению $\neg(T_l \leq T_{i_j})$ для всех i и j . Поэтому $T_l \# T_{i_j}$ для всех i и j .

Так как $T_l \# T_{i_j}$ для всех $j \leq k$, то $w_{b_s}(l) = 0$ для всех $s \leq k$. Значит, $w_a(l) \leq w_{c_1}(l) + w_{c_2}(l) + \dots + w_{c_k}(l)$. Так как $w_{c_i}(l) = 1$ для всех $i \leq k$, то $w_a(l) \leq k < \infty$. Отсюда следует, что найдется l -простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_b(l) = w_a(l)$. Стало быть, формула T_l отделима под элементом a .

Предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{B}$ — суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины и $J = \{a \in \mathfrak{B} \mid \text{формула } T_l \text{ отделима под элементом } a\}$.

Утверждение 2.17. Множество $J \subset \mathfrak{B}$ — идеал, причем $a \in J \iff \mathfrak{B} \models \Phi_J(a)$, где $\Phi_J(x) = ((\exists y \leq x)((y - l\text{-простой элемент}) \& (w_{x \setminus y}(l) = 0))) \vee (w_x(l) = 0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что J — идеал. Так как $w_0(l) = 0$, то $0 \in J$. Пусть $a \in J$ и $b \leq a$. Тогда $w_a(l) = 0$ или найдется l -простой элемент $c \leq a$ такой, что $w_{a \setminus c}(l) = 0$. Предположим, что $w_b(l) \neq 0$. Тогда $w_b(l) = w_{b \cap c}(l) + w_{b \setminus c}(l)$. Отсюда следует, что $b \cap c$ l -простой и $w_{b \setminus c}(l) = 0$. Последнее означает, что $b \in J$. Непосредственно проверяется, если $a \in J$ и $b \in J$, то $a \cup b \in J$.

В силу предложения 1.19 утверждение о том, что элемент является l -простым, записывается следующей формулой:

$$(x \text{ } l\text{-простой}) = \left(P(x) \& \left((\forall y \leq x) \left(\bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y) \right) \right) \& ((\exists y \leq x) T_l(y)) \right. \\ \left. \& \left((\forall y \leq x) \left(\left(\bigvee_{i \in R} ((\forall z \leq y) \neg T_i(z)) \right) \rightarrow \pi_R(y) \right) \right) \right),$$

где $R = R_l$, $R^* = R_l^*$, π_r из определения формулы T_l .

Тогда

$$\Phi_J(x) = (((\exists y \leq x)((y - l\text{-простой элемент}) \& ((\neg \exists z \leq (x \setminus y)) T_l(z)))) \vee \neg((\exists y \leq x) T_l(y))).$$

Утверждение 2.18. $1^{\mathfrak{A}_i}/J$ — атом для всех $i \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого элемента $a \in \mathfrak{A}_i$ либо a локальный, либо $C(a)$ локальный. Стало быть, в силу предложения 2.16 либо $a \in J$, либо $C(a) \in J$. Следовательно, фактор алгебра $\mathfrak{A}_i/J$ — атом. Утверждение доказано.

Определим формулу:

$$(x/J - \text{атом}) = (x \notin J) \& (\forall a \leq x)(a \in J \iff x \setminus a \notin J).$$

Положим

$$\mathfrak{A} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i.$$

Пусть T — полная теория. Напомним, что если существует формула ϕ , совместная с теорией T , такая, что формула ϕ неполнима в теории T , а именно, для любой формулы ψ , совместной с теорией T , из $T \vdash (\psi \rightarrow \phi)$ следует, что ψ не является полной формулой, то теория T не имеет простой модели.

Заметим, что формула $(x/J - \text{атом})$ совместна с теорией $\text{Th}(\mathfrak{A})$, так как $\mathfrak{A}_i \models ((1/J) - \text{атом})$. Докажем, что указанная формула неполнима в данной полной теории.

Утверждение 2.19. $\mathfrak{A}$ — нелокальная алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $M(\mathfrak{A})$ — бесконечное множество.

Обозначим через $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}|_\sigma$ ограничение алгебры $\mathfrak{A}$ на сигнатуру σ .

Утверждение 2.20. Булева алгебра $\mathfrak{A}^*/J$ изоморфна булевой алгебре $\mathfrak{B}_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 2.18.

Теорема 2.21. Теория $\text{Th}(\mathfrak{A})$ не имеет простой модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим формулу $\Phi(x) = (x/J - \text{атом})$. Предположим, что теория $T = \text{Th}(\mathfrak{A})$ имеет простую модель. Тогда найдется полная относительно теории T совместная с теорией T формула $\Psi(x)$ такая, что $\text{Th}(\mathfrak{A}) \vdash (\Psi(x) \rightarrow \Phi(x))$. Так как Ψ совместна с T , найдется элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$. Стало быть, для некоторого числа k выполнено $a \leq 1^{\mathfrak{A}_1} \cup \dots \cup 1^{\mathfrak{A}_k}$. Пусть $b = 1^{\mathfrak{A}_1}$. Так как $a/J - \text{атом}$, без ограничения общности будем считать, что $(b \cap a)/J - \text{атом}$. Тогда $c = b \setminus (b \cap a) \in J$ и $d = (1^{\mathfrak{A}_2} \cap a) \cup \dots \cup (1^{\mathfrak{A}_k} \cap a) \in J$. Заметим, что $a = (b \setminus c) \cup d = (a \cap b) \cup d$. Напомним, что

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}), \quad \mathfrak{D} \models T_l(1), \quad \mathfrak{D}_i \models A_i^l(1).$$

Значит, найдутся непересекающиеся элементы $e_i, q_i \in \mathfrak{A}_1$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((e_i) \times (q_i)), \quad \mathfrak{D}_i \cong (e_i), \quad \mathfrak{D} \cong (q_i).$$

Так как $(a \cap b)/J - \text{атом}$, то $a \notin J$ и $a \cap b \notin J$. Значит, формула T_l не отделяется под элементом $a \cap b$. Следовательно, в силу предложения 2.17 элемент $a \cap b = b \setminus c$ нелокальный и $c \leq e_1 \cup q_1 \cup \dots \cup e_s \cup q_s$ для некоторого числа $s \in \mathbb{N}$. Обозначим $r = (e_1 \cup q_1 \cup \dots \cup e_s \cup q_s) \setminus c$.

Рассмотрим число $m = \max\{k, s, \ln(\Psi)\} + 1$ (здесь $\ln(\Psi)$ — длина предложения Ψ). Обозначим $j = 2^{m-1} + 1$, $b' = 1^{\mathfrak{A}_j}$. Заметим, что $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_1^{(m)}$ и, следовательно, найдутся непересекающиеся элементы $e'_i, q'_i \in \mathfrak{A}_j$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\mathfrak{A}_j \cong ((e'_m) \times (q'_m)) \times \sum_{i \neq m} ((e'_i) \times (q'_i)),$$

$$(e'_m) \models A_{m+1}^m(1), \quad (e'_i) \cong (e_i), \quad i \neq m, \quad (q'_i) \cong (q_i).$$

Так как $m > s$, найдутся непересекающиеся элементы $c', r' \leq e'_1 \cup q'_1 \cup \dots \cup e'_s \cup q'_s$ такие, что

$$\begin{aligned} ((e_1 \cup q_1 \cup \dots \cup e_s \cup q_s), c) &\cong ((e'_1 \cup q'_1 \cup \dots \cup e'_s \cup q'_s), c'), \\ ((e_1 \cup q_1 \cup \dots \cup e_s \cup q_s), r) &\cong ((e'_1 \cup q'_1 \cup \dots \cup e'_s \cup q'_s), r'), \\ c' \cup r' &= e'_1 \cup q'_1 \cup \dots \cup e'_s \cup q'_s. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_1, b \setminus c) &\cong ((e_1 \cup q_1 \cup \dots \cup e_s \cup q_s), r) \times ((e_m) \times (q_m), e_m \cup q_m) \\ &\times \sum_{i \neq m, i > s} ((q_i) \times (e_i), q_i \cup e_i) \equiv_m ((e'_1 \cup q'_1 \cup \dots \cup e'_s \cup q'_s), r') \times ((e'_m) \times (q'_m), e'_m \cup q'_m) \\ &\times \sum_{i \neq m, i > s} ((q'_i) \times (e'_i), q'_i \cup e'_i) \cong (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c'), \end{aligned}$$

так как

$$(e_m) \times (q_m) \cong \mathfrak{D}_m \times \mathfrak{D} \equiv_m \mathfrak{D}'_m \times \mathfrak{D} \cong (e'_m) \times (q'_m).$$

Утверждение $\mathfrak{D}_m \equiv_m \mathfrak{D}'_m$ выполнено в силу предложения 2.13, поскольку $\mathfrak{D}_m \models A_m^m(1)$ и $\mathfrak{D}'_m \models A_{m+1}^m(1)$.

Пусть $a' = (b' \setminus c') \cup d$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, a) &\cong (\mathfrak{A}_1, b \setminus c) \times (\mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k, d) \times (\mathfrak{A}_j, 0) \times \sum_{i \neq j, i > k} (\mathfrak{A}_i, 0) \\ &\equiv_m (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c') \times (\mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k, d) \times (\mathfrak{A}_1, 0) \times \sum_{i \neq j, i > k} (\mathfrak{A}_i, 0) \cong (\mathfrak{A}, a'), \end{aligned}$$

поскольку $(\mathfrak{A}_1, b \setminus c) \equiv_m (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c')$ и $(\mathfrak{A}_j, 0) \equiv_m (\mathfrak{A}_1, 0)$. Последнее выполнено в силу предложения 2.13, аналогично указанному выше.

Следовательно, $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{A}, a')$. Так как длина формулы Ψ не превосходит числа m , из $(\mathfrak{A}, a) \models \Psi(a)$ следует, что $(\mathfrak{A}, a') \models \Psi(a')$. Из $(\mathfrak{A}, a) \models \Psi(a)$, $(\mathfrak{A}, a') \models \Psi(a')$ и полноты формулы $\Psi(x)$ следует, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv (\mathfrak{A}, a')$. Легко заметить, что тогда $N(a) = N(a')$. Но по построению элемента a' имеем $N(a') = (N(a) \setminus \{p\}) \cup \{t\}$, где $A_m^m = T_p$ и $A_{m+1}^m = T_t$. Поэтому $N(a) \neq N(a')$. Противоречие. Следовательно, теория T не имеет простой модели. Теорема 2.21 доказана.

Анонсируем без доказательства следующее важное обобщение теоремы 2.21.

Следствие 2.22. В классе K_3 (и, следовательно, в любом классе K_n) существует континуум попарно элементарно не эквивалентных счетных алгебр, теория каждой из которых не имеет простой модели.

Доказательство этого утверждения мы приведем в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейслер Г., Чэн Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
2. Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Наука, 1996.
3. Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
4. Pal'chunov D. E. Countably-categorical Boolean algebras with distinguished ideals // Stud. Logica. 1987. V. XLVI, N 2. P. 121–135.
5. Пальчунов Д. Е. Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 435–455.

6. Пальчунов Д. Е. Прямые слагаемые булевых алгебр с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 5. С. 499–537.
7. Пальчунов Д. Е. Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики. 1993. Т. 25. С. 82–103.
8. Пальчунов Д. Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Тр. Ин-та математики. 1993. Т. 25. С. 104–132.
9. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В., Турко А. И. Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 617–628.
10. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В. Локальные и исчезающие суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 6. С. 822–847.
11. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В. Теории суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющие счетно-насыщенной модели // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 654–668.
12. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 12 сентября 2023 г.

После доработки 21 февраля 2025 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич (ORCID 0000-0001-9487-3256)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

palch@math.nsc.ru

Трофимов Александр Викторович

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

tr0f@mail.ru