Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.956.8:517.956:539.3(3)

ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЗАЖАТОЙ ПО КРАЮ ПЛАСТИНЫ С ПРИКРЕПЛЕННЫМИ СТЕРЖНЯМИ. 1. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

С. А. Назаров

Аннотация. Строится асимптотика напряженно-деформированного состояния закрепленной вдоль кромки тонкой горизонтальной пластины с присоединенными к ней вертикальными стержнями. Конструкция из изотропного и однородного упругого материала находится под воздействием силы тяжести. При помощи процедуры понижения размерности и анализа пограничных слоев, экспоненциального около кромки пластины и степенного около зон присоединения стержней к пластине, находятся старшие и поправочные члены асимптотики прогиба пластины и жестких смещений стержней, а также их продольная деформация. Выводится асимптотически точное анизотропное и весовое неравенство Корна, позволяющее обосновать асимптотические формулы.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.312

Ключевые слова: сочленение пластины со стержнями, процедура понижения размерности, экспоненциальные и степенные пограничные слои, асимптотика.

1. Постановки задач. Пусть ω_0 и ω_j — области на плоскости, ограниченные простыми замкнутыми гладкими (класса C^∞) контурами $\partial\omega_0$ и $\partial\omega_j$, $j = 1, \dots, J$, а $P^1, \dots, P^J$ — попарно различные точки внутри области ω_0. Тонкие изотропные и однородные (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$) цилиндрическая пластина и стержни с переменными сечениями $\omega_j^h(z)$, заданные положительными профильными функциями $H_j \in C^\infty[-\ell_j, 0]$, определим следующим образом:

$$\Omega_0^h = \{x = (x_1, x_2, x_3) : y := (x_1, x_2) \in \omega_0,\ z := x_3 \in (0, h)\}, \qquad (1)$$

$$\Omega_j^h = \big\{x :\ h^{-1}H(z)^{-1}y^j \in \omega_j,\ z \in (-\ell_j, 0]\big\}, \quad j = 1, \dots, J. \qquad (2)$$

Масштабированием сведем характерный размер продольного сечения ω_0 пластины (1) к единице, т. е. сделаем безразмерными декартовы системы координат $x \in \mathbb{R}^3$ и $y^j \in \mathbb{R}^2$ с центрами $\mathscr{O}$ и P^j соответственно, а также все геометрические параметры, в частности, малый $h > 0$ и фиксированные положительные $\ell_1, \dots, \ell_J$. Для упрощения изложения (см. разд. 9) предположим, что область ω_j содержит круг $\mathbb{B}^2_{\mathbf{r}_j} = \{y^j : |y^j| < \mathbf{r}_j\}$ с радиусом $\mathbf{r}_j > 0$, а также верны соотношения

$$\int_{\omega_j} y_1^j\,dy^j = \int_{\omega_j} y_2^j\,dy^j = 0, \quad I_{12}(\omega_j) := \int_{\omega_j} y_1^j y_2^j\,dy^j = 0,$$
$$H_j(z) = 1 \text{ при } z \in (-\delta_H, 0),\ \delta_H > 0. \qquad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

Первые два достигаются малыми сдвигам точек P^j, а третье — поворотом системы $y^j = \left(y_1^j, y_2^j\right)$.

Деформация упругого сочленения $\Pi^h = \Omega_0^h \cup \Omega_1^h \cup \dots \cup \Omega_J^h$ под действием силы тяжести описывается системой Ламе трех дифференциальных уравнений в частных производных

$$-\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x^\top u^h(x) = f^h(x) := \rho g e_{(3)}, \quad x \in \Pi^h. \tag{4}$$

При этом $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\nabla_x^\top = \mathrm{div}$, $\Delta_x = \nabla_x^\top\nabla_x$ — оператор Лапласа, $g > 0$ — ускорение свободного падения, $e_{(q)}$ — орт оси x_q, вектор смещений $u^h = \left(u_1^h, u_2^h, u_3^h\right)^\top$ интерпретируется как столбец в фиксированной системе координат x ($\top$ — знак транспонирования), а декартовы компоненты тензоров деформаций и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{pq}(u^h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p^h}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^h}{\partial x_p}\right), \quad \sigma_{pq}(u^h) = 2\mu\varepsilon_{pq}(u^h) + \lambda\delta_{p,q}\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(u^h), \quad p,q = 1,2,3,$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера. Кромка пластины $\Gamma_0^h = \partial\omega_0 \times (0,h)$ жестко защемлена, а остальная часть поверхности $\partial\Pi^h$ свободна от внешних воздействий, т. е. выполнены краевые условия

$$u^h(x) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \Gamma_0^h, \tag{5}$$

$$\sigma_q^{(n)}(u^h; x) := \sum_{p=1}^{3} n_p(x)\sigma_{pq}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^h \setminus \overline{\Gamma_0^h}, \ q = 1,2,3. \tag{6}$$

Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)^\top$ — единичный вектор внешней нормали, определенной почти всюду на кусочно-гладкой поверхности $\partial\Pi^h$, т. е.

$$\sigma^{(n)}(u^h) = \left(\sigma_1^{(n)}(u^h), \sigma_2^{(n)}(u^h), \sigma_3^{(n)}(u^h)\right)^\top$$

— вектор нормальных напряжений. Через $L(\nabla_x)$ и $B(x, \nabla_x)$ обозначим (3×3)-матрицы дифференциальных операторов из левых частей соотношений (4) и (6).

Вариационная формулировка задачи (4)–(6) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = (f^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall\ \psi^h \in H_0^1\left(\Pi^h; \Gamma_0^h\right)^3, \tag{7}$$

где $(\cdot,\cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1\left(\Pi^h; \Gamma_0^h\right)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на Γ_0^h, а последний верхний индекс 3 в формуле (7) указывает количество компонент у пробной вектор-функции $\psi^h = \left(\psi_1^h, \psi_2^h, \psi_3^h\right)^\top$, однако он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм. Кроме того, $E(u^h, u^h; \Pi^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная телом Π^h,

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \sum_{p,q=1}^{3}(\sigma_{pq}(u^h), \varepsilon_{pq}(\psi^h))_{\Pi^h}.$$

Основная цель работы — построить асимптотику поля смещений, в частности, главные члены прогиба пластины Ω_0^h и смещения стержней как жесткого целого. Автор впервые увидел описанную конструкцию на экспозиции пыточных инструментов инквизиции в музее религии и атеизма, размещавшегося в Казанском соборе в доперестроечном Ленинграде, но такое же тело Π^h, например, изображает прохудившуюся крышу сарая с сосульками-сталактитами.

Исследованию упругих сочленений тел с разными предельными размерностями посвящено большое количество публикаций, однако наиболее подробно изучены сочленения массивных тел с тонкими стержнями (см. [3–8] и [9] по поводу статических и спектральных задач теории упругости). Имеются публикации о сочленениях пластин и стержней [10–12] и [13–15] (как и в известной шутке [16, с. 293], они имеют дело со случаями $J = 1$ и $J \to \infty$ соответственно), в которых посредством разнообразных предельных переходов отыскиваются главные члены асимптотик упругих полей. В данной статье основное внимание уделяется анализу явления пограничного слоя вблизи зон присоединения стержней к пластине, который позволяет построить младшие асимптотические члены и, в частности, описать сдвиги и повороты стержней вследствие деформации пластины.

Асимптотический анализ сочленений тел с разными предельными размерностями (для пластины и стержней — соответственно два и один) существенно осложнен тем обстоятельством, что уплощенные и удлиненные упругие тела совершенно по-разному реагируют на нагружения в продольных и поперечных направлениях, которые обычно рассогласованы в архитектурных, инженерных и мебельных конструкциях. Абсолютно новым моментом является именно построение пограничных слоев около зон присоединения стержней к пластине. Эти слои описываются решениями задачи теории упругости в объединении Ξ^j единичного слоя и полубесконечного цилиндра (разд. 5). Упомянем статьи [17–19] и [20], где изучены скалярные краевые задачи на сочленении Π^h и подобных ему, но подчеркнем, что для них исследование решений задачи Неймана на неограниченной области Ξ^j весьма просто, а значит, и сама процедура построения асимптотики существенно отличается от представленной далее для векторной задачи.

2. Двумерная модель пластины. Классическая модель Кирхгофа — Лява изгиба тонкой пластины (см. [21–26] и др.), закрепленной вдоль края, состоит из бигармонического уравнения Софи Жермен [27, § 30] в области $\omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, снабженного двойным условием Дирихле на ее границе,

$$A_0 \Delta_y^2 w_3(y) = g\rho, \quad y \in \omega_0, \tag{8}$$

$$w_3(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0. \tag{9}$$

Здесь ∂_{n^p} — производная вдоль внешней нормали $n^p = \left(n_1^p, n_2^p\right)^\top$ на границе области $\omega_p \subset \mathbb{R}^2$. Кроме того, приведенная цилиндрическая жесткость пластины, а также используемые далее измененная постоянная Ламе, коэффициент Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$ и фундаментальное решение бигармонического оператора на плоскости выглядят так:

$$A_0 = \frac{\mu}{3}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \ \lambda_0 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \leq \lambda, \ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \ \Phi_3(y) = \frac{1}{8\pi}|y|^2 \ln\frac{1}{|y|}. \tag{10}$$

Задача (8), (9) имеет единственное решение $w_3 \in C^\infty(\overline{\omega_0})$.

Обозначим через $G^j \in H^2(\omega_0)$ функцию Грина задачи (8), (9) с особенностью в точке P^j, т. е.

$$G^j(y) = A_0^{-1}\Phi_3(y^j) + G_0^j(y), \quad G_0^j \in C^\infty(\overline{\omega_0}). \tag{11}$$

Матрица $\mathbf{G} = \big(G_0^j(P^k)\big)_{j,k=1}^J$ размером $J\times J$ симметрична и положительно определенна, так как

$$A_0\big(\Delta_y G^j, \Delta_y G^k\big)_{\omega_0} = A_0 \lim_{R\to+0} \int\limits_{\mathbb{S}_R^1(P^j)} \left(\frac{\partial G^k}{\partial r_j}(y)\Delta_y G^j(y) - G^k(y)\frac{\partial}{\partial r_j}\Delta_y G^j(y)\right) ds_y = G^k(P^j).$$

Известная процедура понижения размерности в тонкой пластине (см. [28–32], список далеко не полный) обычно использует асимптотический анзац

$$u_{(0)}^h(y,z) = \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta,\nabla_y)w(y) + \dots := \sum_{k=0}^4 h^{k-2}\mathscr{W}_{(0)}^k(\zeta,\nabla_y)w(y) + \dots, \tag{12}$$

где многоточие заменяет младшие асимптотические члены, $\zeta = h^{-1}(z-h/2) \in (-1/2,1/2)$ — растянутая поперечная координата, столбец $w = (w_1,w_2,w_3)^\top$ содержит осредненные по толщине пластины продольные смещения и ее прогиб, а (3×3)-матрицы $\mathscr{W}_{(0)}^k$ дифференциальных операторов заданы равенствами

$$\mathscr{W}_{(0)}^0 w(y) = e_{(3)}w_3(y), \quad \mathscr{W}_{(0)}^1(\zeta,\nabla_y)w(y) = \sum_{p=1}^2 e_{(p)}\left(w_p(y) - \zeta\frac{\partial w_3}{\partial y_p}(y)\right),$$

$$\mathscr{W}_{(0)}^2(\zeta,\nabla_y)w(y) = -e_{(3)}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\zeta\sum_{p=1}^2\frac{\partial w_p}{\partial y_p}(y) - \left(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24}\right)\Delta_y w_3(y)\right), \tag{13}$$

$$\mathscr{W}_{(0)}^1(\zeta,\nabla_y)w(y) = \mathscr{X}^0(\zeta)\begin{pmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial/\partial y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_2 & 2^{-1/2}\partial/\partial y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial^2/\partial y_1^2 & 2\partial^2/\partial y_1\partial y_2 & \partial/\partial y_2^2 \end{pmatrix}^\top w(y). \tag{14}$$

Последний член суммы из (12) и полное выражение для (3×6)-матрицы $\mathscr{X}^0(\zeta)$ не понадобятся, но их можно найти, например, в [31, гл. 4, § 2] или, как и все другие формулы этого и очередного разделов, в любых других монографиях по технической и математической теориям тонких упругих тел. В разд. 5 будут востребованы только две компоненты названной матрицы, а именно,

$$\mathscr{W}_{(0)i}^1(\zeta,\nabla_y)e_{(3)}w_3(y) = \frac{1}{6}\left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\zeta^3 - \frac{11\lambda+12\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\zeta}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\Delta_y w_3, \quad i=1,2. \tag{15}$$

Вектор осредненных продольных смещений $w' = (w_1,w_2)^\top$ пластины находится из двумерной системы уравнений Ламе с краевыми условиями Дирихле

$$L'(\nabla_y)w'(y) := -\mu\Delta_y w'(y) - (\mu+\lambda_0)\nabla_y\nabla_y^\top w'(y) = f'(y), \quad y\in\omega_0, \tag{16}$$

$$w'(y) = g'(y), \quad y\in\partial\omega_0. \tag{17}$$

Из-за принятого способа нагружения далее будет востребовано только сингулярное решение плоской задачи теории упругости (16), (17) при $f'=0$: влияние стержней описывается при помощи фундаментальной матрицы для двумерной системы Ламе (тензор Сомилианы), имеющей вид

$$\Phi'(y) = (\Phi'^1(y),\Phi'^2(y)) = \Phi^0\ln r + \Phi^1(\varphi), \tag{18}$$

где $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_1^1$ — система полярных координат, а симметричные (2×2)-матрицы, неособенная числовая Φ^0 и гладкая Φ^1 на единичной окружности $\mathbb{S}_1^1$, не понадобятся.

3. Одномерная модель стержней. Асимптотический анализ (см. [33–35, 31, 32] и др.) задачи теории упругости для тонкого стержня, включающий классическую процедуру понижения размерностей, использует следующий асимптотический анзац для вектора смещений:

$$u^h_{(j)}(y^j, z_j) = \mathbf{W}^h_{(j)}(\eta^j, z, \partial_z)\, w^j(z) + \dots := \sum_{k=0}^{4} h^{k-2} \mathscr{W}^k_{(j)}(\eta^j, z, \partial_z) w^j(z) + \dots . \quad (19)$$

При этом (3×4)–матрицы $\mathscr{W}^k_{(j)}$ дифференциальных операторов заданы формулами

$$\begin{gathered}
\mathscr{W}^0_{(j)} w^j(z) = \sum_{p=1}^{2} e^j_{(p)} w^j_p(z), \\
\mathscr{W}^1_{(j)}(\eta^j, z, \partial_z)\, w^j(z) = d^6(\eta^j) w^j_4(z) + e_{(3)} \left(w^j_3(z) - \sum_{p=1}^{2} \eta^j_p \frac{\partial w^j_p}{\partial z}(z) \right), \qquad (20) \\
\mathscr{W}^3_{(j)}(\eta^j, z, \partial_z) w^j(z) = \mathscr{X}^j(\eta^j, z) \mathscr{D}(\partial_z) w^j, \\
\mathscr{W}^4_{(j)}(\eta^j, z, \partial_z) w^j(z) = \mathscr{X}^{j\prime}(\eta^j, z) \mathscr{D}(\partial_z) \partial_z w^j(z).
\end{gathered}$$

Здесь фигурируют поворот вокруг оси стержня, а именно, последний столбец (3×6)-матрицы

$$d(x) = (d'(x), d^6(x)) = (d^\dagger(x), d^\equiv(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2} x_2 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 1 & 2^{-1/2} x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

порождающей три поступательных жестких смещения и три вращательных, а также диагональная матрица $\mathscr{D}(\partial_z) = \operatorname{diag}\{\partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z\}$ и (3×4)-матрица $\mathscr{X}(\eta^j, z)$, выглядящая так:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu((\eta^j_1)^2 - (\eta^j_2)^2) H_j(z)^4 & 2\nu \eta^j_1 \eta^j_2 H_j(z)^4 & -2\nu \eta^j_1 H_j(z)^2 & 0 \\ 2\nu \eta^j_2 \eta^j_1 H_j(z)^4 & \nu((\eta^j_2)^2 - (\eta^j_1)^2) H_j(z)^4 & -2\nu \eta^j_2 H_j(z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} H_j(z)^4 \Psi^j(\eta^j) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Она включает коэффициент Пуассона ν, профиль $H_j(z)$ и функцию Сен-Венана Ψ^j, т. е. обладающее нулевым средним решение задачи Неймана

$$-\Delta_{\eta^j} \Psi^j(\eta^j) = 0, \ \eta^j \in \omega_j, \quad \partial_{n^j} \Psi^j(\eta^j) = \eta^j_2 n^j_1(\eta^j) - \eta^j_1 n^j_2(\eta^j), \ \eta^j \in \partial\omega_j. \quad (23)$$

Четвертое выражение в списке (20) и (3×4)-матрица $\mathscr{X}^{j\prime}$ по существу далее не понадобятся.

Функции w^1_1, w^1_2 и w^1_3 — осредненные поперечные и продольное смещения в стержне, а w^1_4 — его закручивание. Они удовлетворяют системе Кирхофа — Клебша (см. [21, 36–41] и многие др.) четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающейся в силу ограничений (3),

$$\partial_z^2 A^j_k(z) \partial_z^2 w^j_k(z) = f^j_k(z), \quad z \in \Upsilon_j := (-\ell_j, 0), \ k = 1, 2, \quad (24)$$

$$-\partial_z A^j_l(z) \partial_z w^j_l(z) = f^j_3(z), \quad z \in \Upsilon_j, \ l = 3, 4. \quad (25)$$

Коэффициенты имеют вид

$$A_k^j(z) = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} H_j(z)^4 \int\limits_{\omega_j} \left(\eta_k^j\right)^2 d\eta^j,$$
$$A_3^j(z) = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} H_j(z)^2 |\omega_j|, \quad A_4^j(z) = \frac{\mu}{2} H_j(z)^4 G(\omega_j) \tag{26}$$

(см., например, [31, гл. 5, § 2]). Здесь фигурируют площадь $|\omega_j|$ и моменты инерции $I_{kk}(\omega_j)$ фигуры ω_j (см. предпоследнюю формулу (3)), а также ее крутильная жесткость [42]

$$G(\omega_j) = \int\limits_{\omega_j} \left(\left| \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_1^j}(\eta^j) - \eta_2^j \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_2^j}(\eta^j) + \eta_1^j \right|^2 \right) d\eta^j. \tag{27}$$

Краевые условия (6) порождают следующие условия в нижних концах отрезков Υ_j:

$$A_k^j(z_j) \partial_{z_j}^2 w_k^j(z_j)\big|_{z_j = -\ell_j} = 0, \quad \partial_{z_j} A_k^j(z_j) \partial_{z_j}^2 w_k^j(z_j)\big|_{z_j = -\ell_j} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{28}$$

$$A_l^j(z_j) \partial_{z_j} w_l^j(z_j)\big|_{z_j = -\ell_j} = 0, \quad l = 3, 4. \tag{29}$$

Условия в точках $z_j = 0$ будут найдены в результате асимптотического анализа.

4. Классический пограничный слой около кромки пластины. В разд. 6 в качестве главных членов асимптотики на пластине решения задачи (4)–(6) будет взята сумма

$$u_{(0)}^h(x) = \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)}(w_3(y) + h w_3^\circ(y)) + \dots, \tag{30}$$

где дифференциальный оператор $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)$ определен формулами (12), (13), w_3 — решение задачи (8), (9), а функцию w_3° еще предстоит найти. Анзац (30) годится только вне окрестностей кромки Γ_0^h и примыкающих к пластине торцов $\Gamma_j^h = \omega_j^h(0)$ стержней (2). Вблизи этих множеств необходимо построить пограничные слои — двумерный и трехмерный. Обсудим первый из них.

При рассмотрении кромки пластины воспроизведем подход и результаты работы [43]. В окрестности $\mathscr{U}$ дуги $\partial\omega_0$ введем локальные криволинейные координаты (n, s), где n — ориентированное расстояние до $\partial\omega_0$, $n < 0$ в $\omega_0 \cap \mathscr{U}$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Соответственно $e_{(n)}$, $e_{(s)}$ и $e_{(z)} = e_{(3)}$ — орты осей n, s и z. Сохраним масштаб для координаты s и введем растянутые координаты $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^\top = h^{-1}(n, z - h/2)$, которые далее интерпретируем как декартовы. Замена $x \mapsto (\mathbf{y}, s)$ и формальный переход к $h = 0$ трансформируют область (1) в прямое произведение $\mathbf{P}_- \times \partial\omega_0$, а задачу (4)–(6), суженную на пластину Ω_0^h, — в следующие двумерные, плоскую и антиплоскую (см. [38]), смешанные краевые задачи теории упругости на полуполосе $\mathbf{P}_- = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}_1 < 0, |\mathbf{y}_2| < 1/2\}$ с параметром $s \in \partial\omega_0$:

$$-\mu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}^\#(\mathbf{y}) - (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}^\#(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{P}_-,$$
$$\mathbf{v}^\#(0, \mathbf{y}_2) = \mathbf{g}^\#(\mathbf{y}_2), \quad |\mathbf{y}_2| < \frac{1}{2}, \tag{31}$$
$$\mu \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) + \mu \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) = 0, \ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) + \lambda \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{y}_1}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y}_1 < 0, \ \mathbf{y}_2 = \pm \frac{1}{2},$$

$$-\mu\Delta_{\mathbf{y}}\mathbf{v}_s(\mathbf{y}) - 0,\ \mathbf{y}\in\mathbf{P}_-,\quad \mu\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{y}_1<0,\ \mathbf{y}_2 = \pm\frac{1}{2},$$
$$\mathbf{v}_s(0,\mathbf{y}_2) = \mathbf{g}_s(\mathbf{y}_2),\quad |\mathbf{y}_2|<\frac{1}{2}. \tag{32}$$

Здесь $\mathbf{v}^\# = (\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_z)^\top$ и $\mathbf{v}_s$ — соответственно вектор продольных смещений и поперечное смещение (депланация) в плоскостях, перпендикулярных боковой поверхности Γ_0^h пластины Ω_0^h.

Согласно определениям (13) и соотношениям (9), а также предугаданному равенству

$$w_3^\circ(y) = 0,\quad y\in\partial\omega_0, \tag{33}$$

члены порядков h^{-2} и h^{-1} в анзаце (13) удовлетворяют краевым условиям (5) на Γ_0^h, но член порядка $h^0 = 1$ оставляет невязку, которую следует компенсировать слагаемым $h^0\mathbf{v}(\mathbf{y},s)$, отыскиваемым из задач (31) и (32) с такими правыми частями:

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{y}_2) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\mathbf{y}_2^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\Delta_y w_3(0,s),\ \mathbf{g}_n(\mathbf{y}_2) = -\mathbf{y}_2\frac{\partial w_3^\circ}{\partial n}(0,s),\ \mathbf{g}_s(\mathbf{y}_2) = 0.$$

Здесь функции w_3 и w_3° записаны в локальных координатах (n,s), а их след на $\partial\omega_0$ отвечает значению $n=0$. Понятно, что $\mathbf{v}_s = 0$. Кроме того, как показывает теория Кондратьева [44] (подробности см. в статье [43], а также в [45, гл. 5, § 7] и [46, пример 1.12 и теорема 3.4]) существует решение задачи (31), представимое в виде

$$\mathbf{v}^\#(\mathbf{y}) = \mathbf{K}_n(\nu)e_{(n)} + \mathbf{K}_z(\nu)e_{(z)}$$
$$+ (\mathbf{K}(\nu)\Delta_{\mathbf{y}}w_3(0,s) - \partial_n w_3^\circ(0,s))(\mathbf{y}_2e_{(n)} - \mathbf{y}_1e_{(z)}) + \widetilde{\mathbf{v}}^\#(\mathbf{y}). \tag{34}$$

Остаток $\widetilde{\mathbf{v}}^\#(\mathbf{y})$ затухает при $\mathbf{y}_1\to-\infty$ с экспоненциальной скоростью (см. весовые гёльдеровские оценки [47]), $\mathbf{K}_n(\nu)$, $\mathbf{K}_z(\nu)$ и $\mathbf{K}(\nu)$ — некоторые коэффициенты, причем $\mathbf{K}(0) = 0$ и $\mathbf{K}(\nu) > 0$ при $\nu\in(0,1/2)$ (подробности см. в работе [43]).

Для соблюдения естественного свойства двумерного пограничного слоя — его экспоненциального затухания на удалении от кромки пластины — в первую очередь требуется устранить линейное слагаемое в представлении (34). Постоянные члены учитываются при построении поправок следующего порядка в анзаце (30) (см. разд. 7). Упомянутое первым слагаемое, имитирующее поворот полуполосы $\mathbf{P}_-$ на бесконечности, уничтожается постановкой краевого условия

$$\partial_n w_3^\circ(y) = \mathbf{K}(\nu)\Delta_y w_3(y),\quad y\in\partial\omega_0. \tag{35}$$

Вблизи нижних концов стержней также возникает явление пограничного слоя (см. [48, 49, 34] и др.), которое описывается при помощи решений задачи Неймана для системы Ламе в полуцилиндре $\mathbf{P}_+^j = \omega_j(-\ell_j)\times\mathbb{R}_+$. Сам полуцилиндр $\mathbf{P}_+^j$ получается в результате замены координат $x\mapsto\xi_{(+)}^j = h^{-1}(y^j, z+\ell_j)$. В случае $\partial_z^m H_j(-\ell_j)\neq 0$ при каком-нибудь $m\in\mathbb{N}$ поверхность оказывается «слегка искривленной», но спрямляется в пределе при $h\to+0$. Таким образом, профиль H_j не влияет на старшие члены асимптотики, но значительно усложняет построение младших из-за необходимости учитывать дополнительные невязки в краевых условиях на $\partial\mathbf{P}_+^j\setminus\omega_j(-\ell_j)$. В статье [50] показано, что экспоненциальный характер затухания можно придать пограничному слою путем выбора матриц $\mathscr{X}^j$, $\mathscr{X}^{j\prime}$ и постановки краевых условий (28), (29).

Явные формулы для младших членов в данной статье не нужны, но для упрощения строения степенного пограничного слоя, изучаемого в разд. 5, было введено последнее требование (3).

5. Пограничный слой около зон присоединения стержней к пластине. Сделаем растяжение координат $x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta) = h^{-1}(y - P^j, z - h/2)$ и перейдем формально к $h = 0$. В результате уведем часть границы сочленения Π^h на бесконечность и переделаем его в объединение Ξ^j единичного слоя $\Xi_0 = \{\xi^j : \eta^j \in \mathbb{R}^2, |\zeta| < 1/2\}$ и полуцилиндра $\Xi^j_- = \{\xi^j : \zeta \le -1/2, \eta^j \in \omega_j\}$. Попутно превратим систему уравнений (4) и краевые условия (6) в задачу

$$L(\nabla_{\xi^j})v^j(\xi^j) = f^j(\xi^j),\ \xi^j \in \Xi^j, \quad B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})v^j(\xi^j) = g^j(\xi^j),\ \xi^j \in \partial\Xi^j, \tag{36}$$

вариационная постановка которой — интегральное тождество [51–53]

$$E(v^j, \psi^j; \Xi_j) = (f^j, \psi^j)_{\Xi_j} + (g^j, \psi^j)_{\partial\Xi_j} \quad \forall\ \psi^j \in \mathfrak{E}_j. \tag{37}$$

Пространство $\mathfrak{E}_j$ получено пополнением линейного множества $C^\infty(\overline{\Xi^j})^3$ (бесконечно дифференцируемые вектор-функции с компактными носителями) по «энергетической» норме $\|v^j; \mathfrak{E}_j\| = (E(v^j, v^j; \Xi_j) + \|v^j; L^2(\mathfrak{K}_j)\|^2)^{1/2}$, где $\mathfrak{K}_j$ — какой-либо непустой компакт в $\overline{\Xi^j}$.

Укажем весовое неравенство Корна [52–56]

$$|||v^j; \Xi_0|||^2 + |||v^j; \Xi^j_-|||^2 \le K_j(E(v^j, v^j; \Xi^j) + \|v^j; L^2(\mathfrak{K}_j)\|^2) \quad \forall\ v^j \in C^\infty(\overline{\Xi_j})^3,$$

в котором нормы на слое и на полуцилиндре выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} |||v^j; \Xi_0|||^2 = \int\limits_{\Xi_0} \Bigg(\sum_{p=1}^2 \Bigg(\left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_p} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_{3-p}} \right|^2 \\ + \frac{1}{\mathfrak{R}_0(\xi^j)^2} \Bigg(\left| \frac{\partial v^j_3}{\partial \eta^j_p} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \zeta} \right|^2 \Bigg) + \frac{1}{\mathfrak{R}_0(\xi^j)^2} |v^j_p|^2 \Bigg) \\ + \left| \partial_\zeta v^j_3 \right|^2 + \mathfrak{R}_9(\xi^j)^{-4} \left| v^j_3 \right|^2 \Bigg) d\xi^j \quad \text{при} \quad \mathfrak{R}_0(\xi^j) = (1 + \rho_j)(1 + |\ln \rho_j|),\ \rho_j = |\eta^j|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||v^j; \Xi^j_-|||^2 = \int\limits_{\Xi^j_-} \Bigg(\sum_{p=1}^2 \Bigg(\left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_p} \right|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^2} \Bigg(\left| \frac{\partial v^j_3}{\partial \eta^j_p} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_{3-p}} \right|^2 \Bigg) \Bigg) \\ + \left| \frac{\partial v^j_3}{\partial \zeta} \right|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^4} \sum_{p=1}^2 |v^j_p|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^2} |v^j_3|^2 \Bigg) d\xi^j \quad \text{при} \quad \mathfrak{R}_j(\xi^j) = 1 + |\zeta|. \end{aligned}$$

Заметим, что поворот вокруг оси ζ, т. е. последний столбец $d^6(\xi^j)$ матрицы (21), не принадлежит введенному пространству, так как для него расходится интеграл по слою. Нетрудно проверить (см., например, публикации [52, 56]), что остальные жесткие смещения, т. е. пять столбцов (3×5)-блока $d'(\xi^j)$, для которых все интегралы сходящиеся, попадают в пространство $\mathfrak{E}_j$, так как могут быть приближены финитными вектор-функциями по энергетической норме. Поскольку билинейная форма из тождества (37) вырождается только на жестких смещениях, сделанные наблюдения вместе с простыми следовыми неравенствами и теоремой Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Пусть правые части задачи* (36) *подчинены включениям*[1)]

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_0 f_p^j, \mathfrak{R}_0^2 f_3^j \in L^2(\Xi_0), \quad \mathfrak{R}_0 g_p^j, \mathfrak{R}_0^2 g_3^j \in L^2(\partial\Xi_0 \cap \partial\Xi^j), \\ &\mathfrak{R}_j^2 f_p^j, \mathfrak{R}_j f_3^j \in L^2(\Xi_-^j), \quad \mathfrak{R}_j^2 g_p^j, \mathfrak{R}_j g_3^j \in L^2(\partial\Xi_-^j \cap \partial\Xi^j) \end{aligned} \tag{38}$$

при $p = 1, 2$ *и пяти условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\Xi^j} d'(\xi^j)^\top f^j(\xi^j) d\xi^j + \int\limits_{\partial\Xi^j} d'(\xi^j)^\top g^j(\xi^j)\, ds_{\xi^j} = 0 \in \mathbb{R}^5. \tag{39}$$

Тогда вариационная задача (37) *имеет решение* $v^j \in \mathfrak{E}_j$, *определенное с точностью до слагаемого* $d'(\xi^j)b^{j\prime}$ *для любого столбца* $b^{j\prime} \in \mathbb{R}^5$, *однако при выполнении условий ортогональности* $(v^j, d')_{\mathfrak{K}_j} = 0 \in \mathbb{R}^5$ *оно становится единственным и удовлетворяет оценке* $\|v^j; \mathfrak{E}_j\| \le c^j_{\mathfrak{K}} \mathfrak{N}_j$, *где* $\mathfrak{K}_j \subset \overline{\Xi^j}$ *— непустой компакт, а* $\mathfrak{N}_j$ *— сумма норм функций* (38) *в указанных пространствах.*

Если правые части f^j и g^j гладкие, то их дифференциальные свойства передаются решению всюду, кроме ребра $\partial\omega_j \times \{-1/2\}$ на границе $\partial\Xi^j$ (см. [57–59, 51] и [60]).

Известно (см., например, [46, пример 1.12 и предложение 3.2]), что в силу леммы 1 у однородной ($f^j = 0$ и $g^j = 0$) задачи (36) есть двенадцать решений с полиномиальным ростом при $\zeta \to -\infty$ и некоторым вполне определенным поведением в слое (см. ниже).

Число двенадцать есть не что иное, как количество мономов

$$\mathbf{e}_{(3)},\ -z\mathbf{e}_{(1)},\ -z\mathbf{e}_{(2)} \text{ и } \mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{e}_{(2)},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_{(4)}, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}^1(z) = \frac{z}{A_3^j(0)}\mathbf{e}_{(3)},\ \mathbf{Z}^2(z) = \frac{1}{A_1^j(0)}\frac{z^3}{6}\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{Z}^3(z) = \frac{1}{A_2^j(0)}\frac{z^3}{6}\mathbf{e}_{(2)}, \\ &\mathbf{Z}^4(z) = -\frac{1}{A_1^j(0)}\frac{z^2}{2}\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{Z}^5(z) = -\frac{1}{A_2^j(0)}\frac{z^2}{2}\mathbf{e}_{(2)},\ \mathbf{Z}^6(z) = 2^{-1/2}\frac{z}{A_4^j(0)}\mathbf{e}_{(4)}, \end{aligned} \tag{41}$$

являющихся решениями следующей системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (24) и (25) с замороженными в точке $z = 0$ коэффициентами:

$$\mathscr{D}(\partial_z)A^j(0)\mathscr{D}(\partial_z)\mathbf{Z}^q(z) = 0, \quad z \in \mathbb{R},\ q = 1, \dots, 6.$$

В формулах (40) и (41) фигурируют орты $\mathbf{e}_{(m)} = (\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m})^\top$ пространства $\mathbb{R}^4$ и диагональная матрица $A^j = \operatorname{diag}\{A_1^j, A_2^j, A_3^j 1, A_4^j\}$. При помощи (3×4)-матрицы $\mathbf{W}^1_{(j)}$ дифференциальных операторов, заданной соотношениями (19), (20) и (22) с параметром $h = 1$, определим по группе мономов (41) следующие вектор-функции с полиномиальным поведением по переменной ζ:

$$\mathscr{X}^q_{(j)}(\xi^j) = \mathbf{W}^1_{(j)}(\eta^j, \partial_\zeta)\mathbf{Z}^q(\zeta), \quad q = 1, \dots, 6. \tag{42}$$

Нетрудно усмотреть, что, во-первых, формула (42) с первой группой (40) порождает жесткие смещения, т. е. столбцы матрицы (21), и, во-вторых, сами вектор-функции (42) аннулируются оператором $L(\nabla_{\xi^j})$ в целом цилиндре $\omega_j \times \mathbb{R}$ и оператором $B(\eta^j, \nabla_{\xi^j})$ на его поверхности.

[1)] Требования (38) к правым частям можно ослабить.

Ближайшая цель — показать, что поля смещения (42) порождают соответственно продольную и поперечные силы, приложенные на бесконечности в полуцилиндре Ξ_-^j, а также изгибающие и крутящий моменты, и установить существование названных решений в виде

$$\mathscr{V}_{(j)}^q(\xi^j) = \chi_j(\xi^j)\mathscr{Z}_{(j)}^q(\xi^j) + \chi_0(\xi^j)\mathscr{Y}^q(\xi^j) + \widehat{\mathscr{V}}_{(j)}^q(\xi^j), \quad q = 1, \dots, 6, \tag{43}$$

подобрав подходящие вектор-функции $\mathscr{Y}^1, \dots, \mathscr{Y}^6$ в слое. Срезки $\chi_j(\xi^j) = \chi(-\zeta)$ и $\chi_0(\xi^j) = \chi(\rho_j/R_j)$ определены по «эталонной» срезающей функции $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, подчиненной равенствам $\chi(t) = 0$ при $t < 1$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 2$, а радиус R_j выбран так, что круг $\mathbb{B}_{R_j}^2 = \{\eta^j : \rho_j < R_j\}$ включает множество $\overline{\omega_j}$.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}_{jp}^q(R)$ из формулы

$$\big(\mathfrak{I}_{11}^q(R), \dots, \mathfrak{I}_{j6}^q(R)\big)^\top = \int\limits_{\omega_j} d(\eta^j, R)^\top \sigma^{(\zeta)}\big(\mathscr{Z}_{(j)}^q; \eta^j, -R\big)\, d\eta^j, \quad R > \frac{1}{2}, \tag{44}$$

где $\Sigma_R^j(\mathscr{Z}) := \sigma^{(\zeta)}(\mathscr{Z}) = (\sigma_{13}(\mathscr{Z}), \sigma_{23}(\mathscr{Z}), \sigma_{33}(\mathscr{Z}))^\top$ — вектор нормальных напряжений на сечении $\omega_j(-R)$ цилиндра. Сначала рассмотрим наиболее важные для дальнейшего интегралы (44) при $p = 1$. В силу соотношений (20), (22) и предположений (3) имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_R^j\big(\mathscr{Z}_{(j)}^1; \eta^j\big) &= \frac{1}{A_3^j(0)} e_{(3)} \bigg(\lambda + 2\mu + \lambda\bigg(\frac{\partial \mathscr{X}_{13}}{\partial \eta_1^j}(\eta^j) + \frac{\partial \mathscr{X}_{13}}{\partial \eta_1^j}(\eta^j)\bigg)\bigg)\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\mu}{A_3^j(0)} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow \ \mathfrak{I}_{j1}^1(R) = 1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}_{jm}^1(R) = 0 \text{ при } m = 2, \dots, 6. \end{aligned} \tag{45}$$

Чуть более сложные выкладки при учете формул (27) и (26) нужны для вывода равенств

$$\mathfrak{I}_{j6}^6(R) = 1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}_{jm}^6(R) = 0 \text{ при } m = 1, \dots, 5, \tag{46}$$

так как $\Sigma_R^j\big(\mathscr{Z}_{(j)}^6; \eta^j\big) = \mu(d^6(\eta^j, 0) + 2^{1/2}(\nabla_{\eta^j}^\top, 0)^\top \Psi^j(\eta^j))$ и

$$\begin{aligned} A_4^j(0)\mathfrak{I}_{j6}^6(R) &= \frac{\mu}{2} \int\limits_{\omega_j} \bigg(\big|\eta_2^j\big|^2 + \big|\eta_1^j\big|^2 - \eta_2^j \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_1^j}(\eta^j) + \eta_1^j \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_2^j}(\eta^j)\bigg)\, d\eta^j \\ &= \frac{\mu}{2} G(\omega_j) - \frac{\mu}{2} \int\limits_{\omega_j} \bigg(|\nabla_{\eta^j} \Psi^j(\eta^j)|^2 - \eta_2^j \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_1^j}(\eta^j) + \eta_1^j \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_2^j}(\eta^j)\bigg)\, d\eta^j = A_4^j(0), \end{aligned}$$

причем последний интеграл обратился в нуль благодаря формуле Грина и соотношениям (23).

Далее при $p = 1, 2$ и $m = 1, \dots, 6$ находим, что интеграл $\mathfrak{I}_{jm}^{3+p}(R)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\omega_j} d^m(\eta^j, -R)^\top \Sigma_R^j\big(\mathscr{Z}_{(j)}^{3+p}; \eta^j\big)\, d\eta^j \\ &\qquad = \delta_{3+p,m} \int\limits_{\omega_j} \big(0, 0, (\lambda + 2\mu - 2\lambda\nu)\eta_p^j\big)\big(Re_{(p)} + \eta_p^j e_{(3)}\big) d\eta^j = \delta_{3+p,m}. \end{aligned} \tag{47}$$

Наконец, последняя группа нужных равенств

$$\mathfrak{I}_{jm}^{1+p}(R) = \delta_{1+p,m}, \quad p = 1, 2, \ m = 1, \dots, 6,$$

требует более длинных вычислений, поскольку для мономов $\mathbf{Z}^{1+p}$ третьей степени из списка (41) вектор нормальных напряжений $\Sigma_R^j\big(\mathscr{Z}_{(j)}^{1+p};\eta^j\big)$ зависит от третьей строки матрицы $\mathscr{X}'$, для которой громоздкое явное выражение не приведено. Поэтому приходится так же, как, например, в [31, гл. 5, § 1, 2], принять во внимание тот факт, что нужные элементы упомянутой матрицы находятся из задачи Неймана для оператора Лапласа в области ω_j, и после неоднократного интегрирования по частям свести искомую величину к интегралу от $\big(\eta_p^j\big)^2$ с тем же множителем, что и в формуле (47). Соответствующие выкладки воспроизводить не будем по нескольким причинам. Во-первых, далее по существу используется только формула (45). Во-вторых, в [31, гл. 5, § 3] даже для анизотропных стержней разработан вполне элементарный способ вычисления искомых интегралов. Более того, в статье [61] для общих краевых задач в случае формально самосопряженных эллиптических систем второго порядка в цилиндрах установлена простая взаимосвязь между формулами Грина для исходной задачи и ее одномерной моделью. Выкладки (44)–(47) приведены для того, чтобы сделать понятными дальнейшие рассуждения.

Как упоминалось, поведение решений задачи (36) в цилиндрическом выходе на бесконечность изучается при помощи теории Кондратьева [44] (см. также [45, гл. 3, 6] и [46, § 3], которая к тому же обслуживает угловые и конические области, однако выход на бесконечность в виде слоя не подпадает под эту теорию. В статьях [62–65] и [53] был разработан подход к построению разложений конкретных задач математической физики в секторе слоя и, в частности, в целом слое. Важное наблюдение: для упругого слоя алгоритм построения разложений на бесконечности в Ξ_0 совпадает с процедурой понижения размерности для пластины Ω_0^h из разд. 2.

Введем аналогичный (41) набор решений двумерной модели (8), (16)

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}^1(y)=-\Phi(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^2(y)=\Phi(y)e_{(1)},\ \mathbf{Y}^3(y)=\Phi(y)e_{(2)},\ \text{а также}\\ \mathbf{Y}^4(y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^5(y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^6(y)=\big(d^6(-\nabla_y^\top,0)^\top\Phi(y)^\top\big)^\top.\end{gathered}\tag{48}$$

Здесь Φ — (3×3)-матрица $\operatorname{diag}\big\{\Phi',A_0^{-1}\Phi_3\big\}$, содержащая тензор Сомилианы и фундаментальное решение оператора $A_0\Delta_y^2$ из формул (18) и (10), а несколько знаков транспонирования возникли из-за согласования порядка записи дифференцирования и произведения матриц. Положим

$$\mathscr{Y}^q(\xi^j)=\mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta,\nabla_{\eta^j})\mathbf{Y}^q(\eta^j),\quad q=1,\dots,6,\tag{49}$$

где матричный оператор $\mathbf{W}_{(0)}^1$ задан формулами (12), (13) при $h=1$. Приведем выкладки, которые в соответствии с определениями (48) придают полям (49) смысл соответственно поперечной и продольных сил, а также изгибающих и крутящего моментов, приложенных на бесконечности в слое Ξ_0. Именно эти поля появляются в представлении (43) искомых решений однородной задачи (36) для неограниченного тела Ξ^j.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}_{0m}^q(R)$ из формулы

$$\big(\mathfrak{I}_{01}^q(R),\dots,\mathfrak{I}_{06}^q(R)\big)^\top=\int\limits_{\circledcirc_R}d(\eta^j,z)^\top\sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y}^q;\xi^j)ds_{\xi^j},\quad R>R_j,$$

где (ρ,φ,ζ) — цилиндрические координаты, а $\circledcirc_R=\mathbb{S}_R^1\times(-1/2,1/2)$ — конечная цилиндрическая поверхность, на которой вектор нормальных напряжений

$\Sigma^0_R(\mathscr{Y}) = \sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y})$ имеет вид

$$\sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y}) = \sigma^{(1)}(\mathscr{Y})\cos\varphi + \sigma^{(2)}(\mathscr{Y})\sin\varphi,$$

причем $\sigma^{(k)}(\mathscr{Y}) = (\sigma_{k1}(\mathscr{Y}), \sigma_{k2}(\mathscr{Y}), \sigma_{k3}(\mathscr{Y}))^\top$.

Начнем с наиболее важных интегралов при $q = 1$. Согласно формулам (13) и (15) имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{ki}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = 2\zeta\frac{\mu}{A_0}\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta^j_i\partial\eta^j_k}(\eta^j) + \delta_{k,i}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j)\right) + O\left(\frac{1}{\rho_j}\right),\\ \sigma_{k3}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = \frac{\mu}{A_0}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{2} - 2\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta^j_k}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j), \quad k,i = 1,2.\end{gathered} \tag{50}$$

Проинтегрировав по $\zeta \in (-1/2, 1/2)$, выводим с учетом равенства $\partial_{\rho_j} = \cos\varphi\partial_{\eta^j_1} + \sin\varphi\partial_{\eta^j_2}$, что

$$\mathfrak{I}^1_{01}(R) = \frac{\mu}{A_0}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}-2\zeta^2\right)d\zeta\int\limits_{\mathbb{S}^1_R}\frac{\partial}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j)ds_{\eta^j}+O\left(\frac{1}{R}\right) = 1+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Интеграл по окружности вычислен согласно третьей формуле (10). Равенства $\mathfrak{I}^1_{0m}(R) = O(R^{-1})$ при $m = 2,\dots,5$ вытекают непосредственно из соотношений (50), но в случае $m = 6$ нужно дополнительно принять во внимание свойство нечетности по одной из переменных η^j_i.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}^{3+p}_{0m}(R)$ при $p = 1,2$. Выражения для напряжений $\sigma_{kq}(\mathscr{Y}^{p+3};\xi^j)$ получаются дифференцированием правых частей (50) по $-\eta^j_p$. Заметим, что

$$\cos\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial(\eta^j_1)^3} + \sin\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial\eta^j_2\partial(\eta^j_1)^2} = \cos\varphi\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta^j_1} - \underbrace{\left(\cos\varphi\frac{1}{\partial\eta^j_2} - \sin\varphi\frac{1}{\partial\eta^j_1}\right)}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta^j_1\partial\eta^j_2},$$

$$\cos\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial\eta^j_1\partial(\eta^j_2)^2} + \sin\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial(\eta^j_2)^3} = \sin\varphi\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta^j_2} + \underbrace{\left(\cos\varphi\frac{1}{\partial\eta^j_2} - \sin\varphi\frac{1}{\partial\eta^j_1}\right)}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta^j_1\partial\eta^j_2},$$

где фигурной скобкой снизу выделено дифференциальное выражение $\rho_j^{-1}\partial_\varphi$, исчезающее после интегрирования вдоль окружности. В итоге формула (10) для Φ_3 показывает, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{3+p}_{03+p}(R) = \frac{4\mu}{A_0}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}&\int\limits_{\mathbb{S}^1_R}\frac{\partial\eta^j_p}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta^j_p}(\eta^j)\,ds_{\eta^j}\\ &- \int\limits_{\mathbb{S}^1_R}\eta^j_p\frac{\partial}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta^j_p}(\eta^j)\,ds_{\eta^j} + O\left(\frac{1}{R}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$

Кроме того, учитывая свойство нечетности подынтегрального выражения по одной из переменных η^j_k или ζ, обнаруживаем, что $\mathfrak{I}^{3+p}_{0m}(R) = O(R^{-1})$, $m = 1,\dots,6$, $m \neq 3+p$.

Интегралы $\mathfrak{I}^{1+p}_{0m}(R)$ при $p = 1,2$ находятся при помощи соотношений

$$\sigma_{ki}(\mathscr{Y}^{1+p};\xi^j) = \sigma'_{ki}(\Phi' e_{(p)};\eta^j) + O(\rho_j^{-2}), \quad \sigma_{k3}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = O(\rho_j^{-2}), \quad k,i = 1,2,$$

и выкладки, в которой интегралы понимаются в смысле теории обобщенных функций (см., например, [66]), придающей смысл равенству $L'(\nabla_y)\Phi'(y) = \mathbb{I}_2\delta(y)$ с дельта-функцией Дирака:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{1+p}_{0m}(R) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\zeta \int\limits_{\mathbb{S}^1_R} e'^{\top}_{(m)}\sigma'^{(\rho_j)}(\Phi' e_{(p)};\eta^j)\, ds_{\eta^j} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ = \int\limits_{\mathbb{B}^2_R} e'^{\top}_{(m)} L'(\nabla_y)\Phi'(\eta^j)e_{(p)}\, d\eta^j + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ = \delta_{1+p,m} + O(R^{-1}),\ m=2,3, \quad \mathfrak{I}^{1+p}_{0m}(R) = O(R^{-1}),\ m=1,4,5,6.\end{aligned}$$

Здесь $e'_{(m)} = \big(\delta_{1,m},\delta_{2,m}\big)^\top$ и $\sigma'^{(\rho_j)}(\Phi'^p)$ — вектор нормальных напряжений на окружности, найденный по двумерному тензору напряжений $(\sigma'_{ki}(\Phi'^p))^2_{k,i=1}$ с постоянными Ламе λ_0 и μ.

Наконец, последние из нужных равенств $\mathfrak{I}^6_{0m}(R) = \delta_{6,m} + O(R^{-1})$ при $m = 1,\dots,6$ выводятся при учете определения функции Дирака и вытекающего из него соотношения

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{B}^2_R} d^{6\prime}(\eta^j)^\top L'(\nabla_{\eta^j})(d^{6\prime}(-\nabla_{\eta^j})^\top\Phi'(\eta^j)^\top)^\top d\eta^j = \int\limits_{\mathbb{B}^2_R} d^{6\prime}(\eta^j)^\top d^{6\prime}(-\nabla_{\eta^j})\delta(\eta^j)\, d\eta^j \\ = \int\limits_{\mathbb{B}^2_R} \delta(\eta^j)\, d^{6\prime}(\nabla_{\eta^j})^\top d^{6\prime}(\eta^j) d\eta^j = \int\limits_{\mathbb{B}^2_R}\delta(\eta^j)\, d\eta^j = 1.\end{aligned}$$

При этом $d^{6\prime}(y) = 2^{-1/2}(-y_2, y_1)^\top$ — укороченный последний столбец матрицы (21), а равенство $d^{6\prime}(\nabla_y)^\top d^{6\prime}(y) = 1$ выполнено благодаря множителям $2^{-1/2}$ в определении (21).

Теперь сформулируем центральное утверждение раздела.

Теорема 1. *Однородная задача* (36) *имеет шесть решений* (30) *с асимптотическими членами* (42), (49) *и «энергетическим» слагаемыми* $\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)} \in \mathfrak{E}_j$, *допускающими представления*

$$\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j) = \chi_j(\xi^j)\, d(\xi^j)t^q_{(j)} + \chi_0(\xi^j)\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_{\eta^j})\mathscr{T}^q_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi(\eta^j) + \widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j).$$

При этом столбец $t^q_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ *и коэффициенты дифференциальных операторов*

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^q_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi = \begin{pmatrix}\mathscr{T}^{q1}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi'^i + \mathscr{T}^{q2}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi'^2 \\ \big(T^{q3}_{(j)11}\partial^2_{\eta^j_1} + 2T^{q3}_{(j)12}\partial_{\eta^j_1}\partial_{\eta^j_2} + T^{q3}_{(j)22}\partial^2_{\eta^j_2}\big)\Phi_3\end{pmatrix}, \\ \mathscr{T}^{qk}_{(j)}(\nabla_{\eta^j}) = \begin{pmatrix}T^{qk}_{(j)1}\partial_{\eta^j_1} + T^{qk}_{(j)0}\partial_{\eta^j_2} \\ T^{qk}_{(j)0}\partial_{\eta^j_1} + T^{qk}_{(j)2}\partial_{\eta^j_2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{51}$$

зависят от индексов $q = 1,\dots,6$, $j = 1,\dots,J$ (*и* $k = 1,2$), *остаток* $\widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j)$ *исчезает с экспоненциальной скоростью на бесконечности в цилиндре* Ξ^j_- *вместе со своими производными, а в слое* Ξ_0 *при всех* $\alpha' = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^2_0$ *и* $\alpha_3 \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ *для него выполнены оценки*

$$\big|\partial^{\alpha_3}_\zeta \nabla^{\alpha'}_{\eta^j}\widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)m}(\xi^j)\big| \le C_{l\alpha}\rho_j^{\delta_{m,3}-2-\alpha_1-\alpha_2}(1+(1-\delta_{m,3})|\ln\rho_j|), \quad \rho_j > R_j,\ m=1,2,3. \tag{52}$$

Кроме того, компоненты $\varepsilon_{ik}(\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)})$ *тензора деформаций (и напряжений) исчезают на бесконечности в полуцилиндре с экспоненциальной скоростью, а в слое — как* $O(\rho_j^{-2})$.

Доказательство. Существование решений (30) вытекает из леммы 1 и проделанных вычислений. В самом деле, правые части задач для «энергетических» составляющих $\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)}$ удовлетворяют включениям (38), а интегрирование по частям в усеченном теле $\Xi^j(R) = \{\xi^j : \zeta > -R$ и $\rho_j < R\}$ и предельный переход при $R \to +\infty$ устанавливают равенства (39) при $q = 1, \dots, 5$. Именно последний факт обеспечен предшествующими выкладками, так как внешняя нормаль на сечении $\omega_j(-R)$ и на цилиндрической поверхности $\circledcirc_R$ равна $-e_{(3)}$ и $\rho_j^{-1}\eta^j$ соответственно, а значит, интегралы по этим частям границы взаимно уничтожаются в пределе. Кроме того, формулы (46) проверяют условия разрешимости (39) в случае $q = 6$.

Асимптотическое представление в цилиндре Ξ^j_- — классический результат[2)] теории Кондратьева [44] (см. также [45, гл. 5] и [47; 46, § 3]), а представление в слое установлено в [53], где, в частности, изложены процедуры построения разложений в бесконечные ряды и вывода оценок асимптотических остатков. Отметим, что жесткое смещение удалено из разложения в слое Ξ_0 и помещено в цилиндр Ξ^j_- (см. слагаемое $\chi_j(\xi^j)d(\xi^j)t^q_{(j)}$), а значит, коэффициенты разложения определены однозначно. В выражение $\chi_0\mathbf{W}^1_{(0)}\mathscr{T}^q_{(j)}\Phi$ включены все степенно-логарифмические решения $\rho_j^{-1}U'(\varphi)$ двумерной системы Ламе и $U^1_3(\varphi)\ln\rho_j + U^0_3(\varphi)$ бигармонического уравнения за исключением поля, порожденного моментом вращения вокруг оси апликат и имеющегося лишь у решения $\mathscr{Y}^6_{(j)}$, а также вертикального сдвига, переведенного в Ξ^j_-. Наконец, непосредственное вычисление деформаций при учете формул (13), (14) и (51), (52) обеспечивает последнее утверждение теоремы.

Опишем еще один набор решений задачи в неограниченном упругом теле Ξ^j. Пусть $\mathscr{P}(y)$ — векторный полином, который определен похожими на (51) формулами и состоит из линейной вектор-функции $\mathscr{P}'(y) = (\mathscr{P}_1(y), \mathscr{P}_2(y))^\top$, удовлетворяющей системе Ламе, и из квадратного трехчлена $\mathscr{P}_3(y)$, уничтожаемого бигармоническим оператором Δ^2_y. По изложенной схеме строим решение $\mathbf{V}(\mathscr{P};\xi^j)$ однородной задачи (36), допускающее представление

$$\mathbf{V}_{(j)}(\mathscr{P};\xi^j) = \chi_0(\xi^j)\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_{\eta^j})(\mathscr{P}(\eta^j) + \mathscr{T}^{\mathscr{P}}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi(\eta^j)) + \chi_j(\xi^j)d(\xi^j)\mathbf{b}^{\mathscr{P}}_{(j)} + \widetilde{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathscr{P};\xi^j). \quad (53)$$

При этом $\mathbf{b}^{\mathscr{P}}_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ — столбец и $\mathscr{T}^{\mathscr{P}}_{(j)}$ — определенный по формулам (51) дифференциальный оператор, зависящие от полинома $\mathscr{P}$ и индекса j, а для экспоненциально затухающего в полубесконечном цилиндре Ξ^j_- остатка $\widetilde{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathscr{P};\xi^j)$ верны оценки (52) в слое Ξ_0.

6. Построение главных членов асимптотики. Дополним анзац (30) для сужения u^{h0} решения задачи (4)–(6) на пластину Ω^h_0 асимптотическими анзацами

$$u^h_{(j)}(x) = h^{-2}d^\dagger(y^j,z)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w_3(P^j) + h^{-1}d^\dagger(y^j,z)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w^\circ_3(P^j) + h\mathbf{W}^1_{(j)}(\eta^j,\partial_z)\mathbf{e}_{(3)}w^j_3(z) + \dots \quad (54)$$

[2)] Иной подход, впрочем не дающий поточечные экспоненциальные оценки остатков, предложен в [67].

для сужений u^{hj} на стержни Ω_j^h. Здесь $d^\dagger(x)$ и $d^\dagger_{(3)}(x)$ — (3×3)-блок матрицы (21) и его нижняя строка, а w_3 — решение задачи (8), (9). Первое слагаемое анзаца (54)

$$\begin{aligned} &d^\dagger(y^j, z_j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_3(P^j) \\ &\qquad = e_{(3)}w_3(P^j) + \big(y_1^j e_{(3)} - z e_{(1)}\big)\partial_{y_1^j} w_3(P^j) + \big(y_2^j e_{(3)} - z e_{(2)}\big)\partial_{y_2^j} w_3(P^j) \end{aligned}$$

есть не что иное, как главный член смещения стержня как жесткого целого, а второе слагаемое еще предстоит определить. Третье слагаемое описывает продольное растяжение стержня под действием силы тяжести, а значит, функция w_3^j находится из уравнения (25) с индексом $l = 3$ и с правой частью $f_3^j(z_j) = g\rho|\omega_j|H_j(z_j)^2$. В силу краевого условия (29) при $l = 3$ получаем, что

$$A_3^j(0)\partial_{z_j} w_3^j(0) = F_j := -g\rho|\omega_j| \int\limits_{-\ell_j}^{0} H_j(z_j)^2\, dz_j. \tag{55}$$

Равенство $w_3^j(0) = 0$ полностью фиксирует функцию w_3^j, а h^2F_j — общий вес стержня Ω_j^h.

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [68, 69; 30, гл. 2] и др.) и в качестве главных членов внутреннего разложения, пригодного в непосредственной близости от торца $\omega_j^h(0)$, за который стержень присоединен к пластине, возьмем сумму

$$\begin{aligned} u^h(x) = h^{-2}d^\dagger(h\xi^j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_3(P^j) + h^{-1}d^\dagger(h\xi^j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_3^\circ(P^j) \\ + hF_j\big(\mathscr{V}^1_{(j)}(\xi^j) - (8\pi)^{-1}\ln h\,\mathbf{V}\big(\eta^j \mapsto \rho_j^2; \xi^j\big)\big) + \dots . \end{aligned} \tag{56}$$

Первые два члена согласованы с такими же членами внешних разложений (30) и (54), а третий член, включающий построенное в разд. 5 решение $\mathscr{V}^1_{(j)}$ однородной задачи (36), учитывает его представление (43) в полуцилиндре Ξ_-^j и вытекающую из равенства (55) формулу Тейлора

$$w_3^j(z) = A_3^j(0)^{-1}F^j z + O(z^2) = hA_3^j(0)^{-1}F^j\zeta + O(h^2\zeta^2) \text{ при } z \to -0.$$

Итак, выполнено сращивание разложений (56) и (54). Представления (43) и (53) в слое Ξ_0 вектор-функций $\mathscr{V}^1_{(j)}$ и $\mathbf{V}_{(j)}(\mathscr{P}; \cdot)$ при $\mathscr{P}(\eta^j) = \rho_j^2 = \big(\eta_1^j\big)^2 + \big(\eta_2^j\big)^2$, а также соотношение $\Phi_3(\eta^j) = h^{-2}(8\pi)^{-1}r_j^2(\ln h - \ln r_j)$, объясняющее появление множителей h и $\ln h$ в последнем члене анзаца (56), показывают, что сращивание внутреннего и внешнего разложений в теле пластины обеспечивает такие представления поправочного члена w_3^1 анзаца (30) вблизи точек $P^1, \dots, P^J$:

$$w_3^1(y) = d^\dagger(y^j, 0)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_3^1(P^j) + F^jA_0^{-1}\Phi_3(y^j) + O(r_j^2) \text{ при } r_j \to +0. \tag{57}$$

Благодаря определению (11) функций Грина G^j решение однородного уравнения (8) в проколотой области $\omega_0 \setminus \{P^1, \dots, P^J\}$, удовлетворяющее соотношениям (57), принимает вид

$$w_3^\circ(y) = w_3^\bullet(y) + F_1G^1(x) + \dots + F_JG^J(x),$$

где $w_3^\bullet \in C^\infty(\overline{\omega_0})$ — бигармоническая функция, подчиненная краевым условиям (33) и (35).

Окончательно поправочный член в асимптотике жестких смещений стержней выглядит так:

$$d^{\dagger}_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^{\top} w_3^{\circ}(P^j)$$
$$= d^{\dagger}_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^{\top}\left(w_3^{\bullet}(y) + \sum_{k=1}^{J} F_k\big(G_0^k(y) + (1-\delta_{j,k})\Phi_3(y-P^k)\big)\right)\bigg|_{y=P^j}.$$

7. Младшие члены асимптотики. Из-за введенных в разд. 1 требований геометрической симметрии старшие члены асимптотики, построенные в предыдущем разделе, указывают на вертикальную деформацию элементов сочленения Π^h, а именно, прогиб пластины и смещение стержней вниз с поворотом и продольным растяжением. Покажем, что очередные асимптотические члены порождают и иные типы деформаций пластины и стержней.

В первую очередь вспомним, что нужно еще соблюсти условия экспоненциального затухания пограничного слоя около кромки пластины, т. е. устранить слагаемые $K_z(\nu)e_{(z)}$ и $K_n(\nu)e_{(n)}$ из представления (34) вектора $\mathbf{v}^{\#}$. Если первое слагаемое учитывается постановкой краевого условия

$$w_3^2(y) = -K_z(\nu)\Delta_y w_3(y), \quad y \in \partial\omega_0,$$

в задаче для еще одного поправочного члена $h^2 w_3^2(y)$ из анзаца (30), то второе слагаемое требует введения члена $hw^{1\prime}(y)$, в котором вектор-функция $hw^{1\prime} = h\big(w_1^1, w_1^1\big)^{\top}$ является решением однородной ($f' = 0$) двумерной системы Ламе (16) с данными Дирихле

$$w_n^1(y) = -K_z(\nu)\Delta_y w_3(y), \quad w_s^1(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0,$$

и описывает продольную деформацию пластины. Справедлива формула Тейлора

$$w^{1\#}(y) = w^{1\#}(P^j) + \sum_{p,q=1}^{2} y_p^j \frac{\partial w_q^1}{\partial y_p^j}(P^j) + O(r_j^2) \text{ при } r_j \to +0, \tag{58}$$

старшие члены которой подлежат сращиванию с внутренним разложением в окрестности торца $\overline{\omega_j^h(0)} = \partial\Omega_0^h \cap \overline{\partial\Omega_j^h}$. К анзацу (30) присоединяем выражение $h\mathbf{W}^1_{(0)}\big(w_1^1, w_2^1, 0\big)^{\top}$, а составляющие, порожденные линейной частью формулы (58), разобьем на группы

$$\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\left(\sum_{p=1}^{2} w_p^1(P^j)e_{(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2^1}{\partial y_1^j}(P^j) - \frac{\partial w_1^1}{\partial y_2^j}(P^j)\right)\begin{pmatrix} cY^-(y^j) \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{59}$$

и

$$\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\left(\sum_{p=1}^{2} \frac{\partial w_p^1}{\partial y_p^j}(P^j)y_p^j e_{(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2^1}{\partial y_1^j}(P^j) + \frac{\partial w_1^1}{\partial y_2^j}(P^j)\right)\begin{pmatrix} Y^+(y^j) \\ 0 \end{pmatrix}\right). \tag{60}$$

Здесь $Y^{\pm}(y) = (\pm y_2, y_1)^{\top}$. Сумма (59) — жесткое продольное смещение $d^{\equiv}(y,0)b^{\equiv}$ с подходящим столбцом $b^{\equiv} \in \mathbb{R}^3$. Сумма (60), которую обозначим через $\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\mathscr{P}_{(1j)}(y^j)$, — линейная вектор-функция, порождающая продольные деформации пластины в точке P^j. Таким образом, внутреннее разложение (56) следует дополнить слагаемым (59) и построенным в конце разд. 5 полем

$h^2\mathbf{V}(\mathscr{P}_{(1j)};\xi^j)$, которое в силу представления (53) вызывает дополнительное жесткое смещение $h^2 d(hy^j,hz)\mathbf{b}^{\mathscr{P}_{(1j)}}$ стержня Ω_j^h, вообще говоря, включающее его закручивание. Впрочем, в анзац для $u^{hj}=u^h\big|_{\Omega_j^h}$ уже пришлось включить аналогичное поле

$$-(8\pi)^{-1}F^j h\ln h\, d(hy^j,hz)\mathbf{b}_{(j)}^{\eta^j\mapsto\rho_j^2} \tag{61}$$

из-за вычитаемого во внутреннем разложении (56) в зоне присоединения стержня к пластине. Особое внимание обратим на логарифмический множитель в выражении (61) (см. разд. 8).

Напрашивается вывод: у всех членов внутреннего разложения около торца $\omega_j^h(0)$, кроме последнего слагаемого в (56), в представлении на полуцилиндре Ξ_-^j фигурируют только линейные вектор-функции вида $d(\xi^j)b^{\cdots}$ (как обычно, в асимптотических рядах по степеням малого параметра h игнорируем слагаемые, затухающие на бесконечности с экспоненциальной скоростью). Этот вывод может быть оспорен только по двум причинам. Во-первых, даже для цилиндрических (т. е. $H_j=1$ в определении (2)) стержней унаследованная от анзаца (19) асимптотическая конструкция

$$w_3^j(z_j)e_{(3)}-\nu\sum_{p=1}^{2}\eta_p^j\partial_{z_j}w_3^j(z_j)e_{(p)}+\mathscr{X}'^3(\eta^j)\partial_{z_j}^2 w_3^j(z_j)e_{(p)}$$

при $w_3^j(z_j)=\frac{1}{2}\rho g z_j\big(z_j+2\ell_j\big)$ оставляет невязки в краевых условиях на боковой поверхности цилиндра. Во-вторых, невязки появляются и в краевых условиях на нижнем торце стержня, и они компенсируются посредством построения пограничного слоя в полуцилиндре $\mathbf{P}_+^J$ (см. конец разд. 4), экспоненциальное затухание которого может потребовать постановки неоднородных краевых условий (28) и (29). В обоих случаях вариация сечения $\omega_j^h(z_j)$ усугубляет указанные эффекты. Вместе с тем вполне разумна гипотеза о том, что наведенное таким способом нагружение стержней самоуравновешено и потому не передается на пластину. Впрочем, обоснование гипотезы в данной статье отсутствует.

8. Неравенство Корна [70] для сочленения. Асимптотически точное, а значит, анизотропное и весовое неравенство Корна для конструкций из пластин и стержней различных форм при разных способах крепления доказаны в работе [55] (см. также [56, § 5]), однако, к сожалению, сочленение Π^h, закрепленное только вдоль кромки пластины, рассмотрено не было (в указанных в разд. 1 работах закрепленными считаются как пластины, так и стержни). Восполним этот пробел.

На пластине Ω_0^h справедлива оценка (см. [71], а также [56, теорема 2.5])

$$|||u^h;\Omega_0^h|||_0^2\le K_0E\big(u^h,u^h;\Omega_0^h\big), \tag{62}$$

где множитель K_0 не зависит ни от поля $u^h\in H_0^1\big(\Omega_0^h;\Gamma_0^h\big)^3$, ни от параметра $h\in(0,h_0]$ при некотором $h_0>0$, а норма в левой части задана формулой

$$|||u^h;\Omega_0^h|||_h^2=\int\limits_{\Omega_0^h)}\Bigg(\sum_{k=1}^{2}\bigg(\bigg|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_k}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_{3-k}}\bigg|^2+\frac{h^2}{\mathbf{R}_h^2}\bigg(\bigg|\frac{\partial u_k^h}{\partial z}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u_3^h}{\partial y_k}\bigg|^2\bigg)+\frac{1}{\mathbf{R}_h^2}|u_k^h|^2\bigg)$$
$$+\bigg|\frac{\partial u_3^h}{\partial z}\bigg|^2+\frac{h^2}{\mathbf{R}_h^4}|u_3^h|^2\Bigg)\,dx\quad\text{при}\quad\mathbf{R}_h(y)=h+\operatorname{dist}(y,\partial\omega_0). \tag{63}$$

Весовой множитель $\mathbf{R}_h(y)$, приобретающий порядок h в непосредственной близости от границы сечения ω_0, учитывает краевое условие Дирихле (5). В силу простого соотношения

$$r_j|\ln r_j| \le c_j h(1+|\ln h|) \text{ на круге } \mathbb{B}^2_{h\mathbf{r}_j} = \{y : \eta^j \in \mathbb{B}^2_{\mathbf{r}_j}\} \subset \omega^h_j$$

анизотропное неравенство Корна (62) и одномерное неравенство Харди «с логарифмом» (см. первоисточник [72] и, например, книгу [73])

$$\int\limits_0^1 \frac{|U(r)|^2}{|\ln r|^2}\frac{dr}{r} \le 4\int\limits_0^1 \left|\frac{dU}{dr}(r)\right|^2 r\,dr \quad \forall\, U \in C^\infty_c[0,1) \tag{64}$$

дают оценку на круговом цилиндре $\mathbf{Q}^h_j = \mathbb{B}^2_{h\mathbf{r}_j}(P^j)\times(0,h) \subset \Omega^h_0$ с малыми высотой и радиусом

$$h^{-2}(1+|\ln h|)^{-2}\big(\|u^h_1; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2 + \|u^h_2; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2 + h^2\|u^h_3; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2\big) \le C_j E(u^h, u^h; \Omega^h_0). \tag{65}$$

На упомянутом цилиндре представим поле u^h в виде

$$u^h(x) = d(y-P^j, z-h/2)\mathbf{b}^h_{(j)} + u^{h\perp}_{(j)}(x), \quad x \in \mathbf{Q}^h_j, \tag{66}$$

определив столбец $\mathbf{b}^h_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ так, чтобы соблюсти условия ортогональности

$$\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} d\Big(y-P^j, z-\frac{h}{2}\Big)^\top u^{h\perp}_{(j)}(x)\,dx = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{67}$$

которые согласно результатам [74, 52] (см. также [56, § 2]) показывают, что

$$h^{-2}\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2 + \|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2 \le c_j E\big(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\big) = c_j E\big(u^h, u^h; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\big), \tag{68}$$

$$h^{-2}\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\Omega^h_j(-2h,0))\|^2 + \|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\Omega^h_j(-h,0))\|^2 \le C_j\Big(E\big(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\Omega^h_j(-h,h))\big) + h^{-2}\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\|^2\Big). \tag{69}$$

Здесь $\Omega^h_j(-2h,0) = \omega^h_j \times (-2h,0) = \{x \in \Omega^h_j : z \in (-2h,0)\}$, а коэффициенты h^{-2} появились вследствие растяжения координат перед применением известных вариантов неравенств Корна.

Распространим представление (66) на стержень Ω^h_j и введем поле $\mathbf{u}^h_{(j)}(x) = \chi(1-h^{-1}z)u^{h\perp}_{(j)}(x)$, равное нулю при $x \in \omega^h_j(0) \subset \partial\Omega^h_0$ и удовлетворяющее в силу формулы (69) соотношению

$$E\big(\mathbf{u}^h_{(j)}, \mathbf{u}^h_{(j)}; \Omega^h_j\big) \le 2\Big(E\big(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; \Omega^h_j\big) + c_j\big(h^{-2}\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\Omega^h_j(-h,0))\|^2 + \|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2(\Omega^h_j(-h,0))\|^2\big)\Big) \le C_j\big(E(u^h, u^h; \Omega^h_j) + E(u^h, u^h; \Omega^h_0)\big).$$

Теперь применим неравенство Корна (см. [71, 54] и [56, § 2, п. 6]) для тонкого стержня с закрепленным торцом, а затем, как и в [75], благодаря оценке

(68) для $u^{h\perp}_{(j)}$ придадим ему вид

$$|||u^{h\perp}_{(j)};\Omega^h_j|||^2_h := \int\limits_{\Omega^h_j}\Bigg(\sum_{k=1}^{2}\Bigg(\bigg|\frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial y_k}\bigg|^2+\frac{h^2}{h^2+z^2}\Bigg(\bigg|\frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial y_{3-k}}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial z}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u^{h\perp}_{(j)3}}{\partial y_k}\bigg|^2\Bigg)$$

$$+\frac{h^2}{(h^2+z^2)^2}|u^{h\perp}_{(j)k}|^2\Bigg)+\bigg|\frac{\partial u^{h\perp}_{(j)3}}{\partial z}\bigg|^2+\frac{1}{h^2+z^2}\big|u^{h\perp}_{(j)3}\big|^2\Bigg)\,dx \le C_j E(u^h,u^h;\Omega^h). \quad (70)$$

Обследуем компоненты $\mathbf{b}^h_{(j)q}$ столбца из представления (66). При учете строения матрицы (21) и симметрий кругового цилиндра $\mathbf{Q}^h_j$ находим

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)1}\big| = \frac{1}{|\mathbf{Q}^h_j|}\bigg|\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} e^\top_{(3)}d\Big(y-P^j,z-\frac{h}{2}\Big)\mathbf{b}^h_{(j)}\,dx\bigg| = \frac{1}{|\mathbf{Q}^h_j|}\bigg|\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j}\big(u^{h0}_3(x)-u^{hj\perp}_3(x)\big)dx\bigg|$$

$$\le c_j h^{-3/2}\big(\big\|u^{h0}_3;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|+\big\|u^{hj\perp}_3;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|\big) \le C_j h^{-1/2}(1+|\ln h|)\mathbf{E}^{1/2}_h,$$

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)p+1}\big| = \Bigg(\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} z^2\,dx\Bigg)^{-1}\bigg|\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} ze^\top_{(p)}d\Big(y-P^j,z-\frac{h}{2}\Big)\mathbf{b}^h_{(j)}dx\bigg|$$

$$\le c_j h^{-5}\big|\mathbf{Q}^h_j\big|^{1/2}\big(\big\|zu^{h0}_p;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|+\big\|zu^{hj\perp}_p;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|\big) \le C_j h^{-3/2}(1+|\ln h|)\mathbf{E}^{1/2}_h, \quad (71)$$

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)p+3}\big| = \frac{1}{\big|\mathbf{Q}^h_j\big|}\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j}\big(u^{h0}_p(x)-u^{hj\perp}_p(x)\big)\,dx\bigg| \le C_j h^{-1/2}(1+|\ln h|)\mathbf{E}^{1/2}_h,$$

$$|\mathbf{b}^h_{(j)6}| = \Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} r^2_j dx\Bigg)^{-1}\bigg|\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} d^6(y-P^j,0)^\top\big(u^{h0}_p(x)-u^{hj\perp}_p(x)\big)dx\bigg|$$

$$\le c_j h^{-7/2}\sum_{p=1}^{2}\big(\big\|\big(y_{3-p}-P^j_{3-p}\big)u^{h0}_p;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|+\big\|\big(y_{3-p}-P^j_{3-p}\big)u^{hj\perp}_p;L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)\big\|\big)$$

$$\le C_j h^{-3/2}(1+|\ln h|)\mathbf{E}^{1/2}_h.$$

Здесь $p=1,2$ и $\mathbf{E}_h$ — упругая энергия $\frac{1}{2}E\big(u^h,u^h;\Omega^h_0\big)$, запасенная пластиной. При обработке норм в пространстве $L^2\big(\mathbf{Q}^h_j\big)$ использованы соотношения (65) и (68).

При помощи формул (71) оценим соболевские нормы жесткого смещения $d(\dots)\mathbf{b}^h_{(j)}$ с тщательно подобранными весовыми множителями, меньшими, чем возникшие в оценке (70) для составляющей $u^{h\perp}_{(j)}$ представления (66) и, совместив результат с неравенством Корна (62), (63) на пластине, аналогично работе [75] придем к следующему утверждению.

Теорема 2. *На сочленении Π^h выполнено анизотропное весовое неравен-*

ство Корна

$$\big|\big|\big|u^h;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h^2+\sum_{j=1}^{J}\int\limits_{\Omega_j^h}\Bigg(\sum_{k=1}^{2}\Bigg(\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_k}\Big|^2+\frac{h^2(1+|\ln h|)^{-2}}{h^2+z^2}\Bigg(\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_{3-k}}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_3^h}{\partial y_k}\Big|^2\Bigg)$$

$$+\frac{h^2(1+|\ln h|)^{-2}}{(h^2+z^2)^2}\big|u_k^h\big|^2\Bigg)+\Big|\frac{\partial u_3^h}{\partial z}\Big|^2+\frac{h(1+|\ln h|)^{-2}}{(h^2+z^2)^{1/2}}\big|u_3^h\big|^2\Bigg)\,dx$$

$$\le K_\Pi E(u^h,u^h;\Pi^h),\qquad (72)$$

где норма $\big|\big|\big|u^h;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h$ *задана соотношением* (63), *а множитель* K_Π *не зависит от поля* $u^h\in H_0^1\big(\Pi^h;\Gamma_0^h\big)^3$ *и параметра* $h\in(0,h_\Pi]$ *при некотором* $h_\Pi>0$.

Замечание. Неравенство (72) не учитывает специфику нагружения сочленения Π^h силой тяжести, однако в определенном смысле является асимптотически точным. В самом деле функционал $E(\cdot,\cdot;\Omega_0^h)$ и квадрат нормы $\big|\big|\big|\cdot;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h$, вычисленные для главного члена $\mathbf{W}^h_{(0)}(\zeta,\nabla_y)e_{(3)}w_3(y)$ анзаца (30), приобретают порядок h^{-1}, а каждый интеграл из суммы по $j=1,\dots,J$, найденный по слагаемому $h^{-2}d^\dagger(y^j,z)d^\dagger(\nabla_y,0)^\top w_3(P^j)$ суммы (54), равен $O(h^{-1}(1+|\ln h|)^{-2})$. Как и для сочленений иных форм (см. обзор [56]), логарифмический множитель, пришедший от неравенства Харди (64), нельзя выявить при помощи асимптотических анзацев для решений задач с гладкими правыми частями, так как логарифм присоединяется только к младшим асимптотическим членам (см. выражение (61)). Приемы из [56, § 5] позволяют убрать логарифм из множителей при производных смещений в подынтегральном выражении (72), но автор не знает, можно ли это сделать с множителями при самих смещениях.

На основе неравенства Корна из теоремы 2 обоснование полученных в разд. 6 асимптотических представлений решения задачи (4)–(6) проводится по стандартной схеме (см. книги [30, 5], статьи [4, 8, 9] и другие публикации). С целью сокращения объема работы[3)] ограничимся формулировкой результата для наиболее интересных атрибутов поля смещений u^h.

Теорема 3. 1. *Для сужения* u^{h0} *на пластину* Ω_0^h *решения задачи* (4)–(6) *верна оценка*

$$\big|\big|\big|u^{h0}-\big(h^{-2}\mathscr{W}^0_{(0)}+h^{-1}\mathscr{W}^1_{(0)}+\mathscr{W}^2_{(0)}\big)e_{(3)}w_3;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h^2\le C_\Omega^0,\qquad (73)$$

в которой фигурирует норма (63), *матричные дифференциальные операторы* (13) *и решение задачи* (8), (9), *а множитель* C_Ω^0 *не зависит от параметра* $h\in\big(0,h_\Omega^0\big]$ *при некотором* $h_\Omega^0>0$.

2. *Для продольных смещений* u_3^{hj} *в стержнях* Ω_j^h, $j=1,\dots,J$, *выполнены оценки*

$$\big\|u_3^{hj}-h^{-2}d^\dagger_{(3)}(y^j)d^\dagger_{(3)}\big(\nabla_y^\top,0\big)w_3(P^j);L^2\big(\Omega_j^h\big)\big\|$$

$$+h^{-1/2}\big\|\varepsilon_{33}\big(u^{hj}\big)-h^{-1}\partial_{z_j}w_3^j;L^2\big(\Omega_j^h\big)\big\|\le C_\Omega^j,\qquad (74)$$

[3)] Точные оценки асимптотических остатков в полном объеме будут приведены в следующей публикации автора, посвященной анализу собственных колебаний сочленения Π^h, т. е. спектральной задаче теории упругости.

в которых $d^{\dagger}_{(3)}$ *— нижняя строка блока* $d^{\dagger}$ *матрицы* (21), *функции* w_3 *и* w^j_3 *указаны в разд.* 6, *а множитель* C^j_{Ω} *не зависит от параметра* $h \in \left(0, h^j_{\Omega}\right]$ *при некотором* $h^j_{\Omega} > 0$.

Вывод оценки (73) в целом повторяет материал гл. 4 книги [31] — изменения, вызванные присоединением стержней, ничтожны, так как постоянное смещение $e_{(3)}w_3(P^j)$ удовлетворяет уравнениям и краевым условиям в стержне, а порядок $1 = h^0$ мажоранты определен пограничным слоем вблизи кромки Γ^h_0 (см. разд. 4 и [31, гл. 4]). Асимптотику самого прогиба можно уточнить:

$$\left\| u^h_3 - h^{-2}w_3 - h^{-1}w^{\circ}_3; L^2\left(\Omega^h_0\right) \right\| \le c^0_{\Omega}.$$

Вместе с тем из-за особенностей $O(|\ln r_j|)$ вторых производных функции w°_3 аналогичные улучшения асимптотических разложений напряжений и деформаций невозможны — в них требуется привлечь пограничные слои из разд. 5. Эти же пограничные слои определяют порядок мажоранты в неравенстве (74), которая в ее упрощенном варианте, относящемся к продольным смещению и деформации стержня, выводится при помощи процедуры из [31, гл. 5].

9. Размышления. Равенства (4) позволили существенно упростить вычисления и формулировки результатов. При нарушении первых равенств система уравнений Кирхгофа — Клебша

$$\mathscr{D}(\partial_z)A^j(z)\mathscr{D}(\partial_z)w^j(z) = f^j(z), \quad z \in (-\ell_j, 0), \tag{75}$$

не распадается на отдельные скалярные уравнения (24), (25), но это обстоятельство мало влияет на главные члены асимптотики напряженно-деформированного состояния сочленения Π^h, описанного в разд. 6. Взаимодействие продольного деформирования стержней Ω^h_j с их изгибом и закручиванием (см., например, [33] и [31, гл. 5 § 3], происходящее от заполненности матрицы A^j в системе (75), изменяет, в частности, задачу для поиска продольной деформации пластины Ω^h_0. Вместе с тем сохраняется значительная малость горизонтальных смещений в пластине по сравнению с ее прогибом и соответственно сдвиги стержней в вертикальном направлении. Точно такие же эффекты возникают в случае анизотропного и неоднородного материала, для которого строение системы (75) сохраняется (см. [31, гл. 5, § 3] и др.).

Пластина, имеющая переменное сечение или изготовленная из анизотропного неоднородного, к примеру, композиционного материала, способна оказать более значимое влияние на асимптотическое строение напряженно-деформированного состояния сочленения Π^h, так как вектор-функция $w^0 = \left(w^0_1, w^0_2, w^0_3\right)^{\top}$ находится из системы дифференциальных уравнений

$$\mathscr{D}^0(\nabla_y)\mathscr{A}^0(y)\mathscr{D}^0(\nabla_y)^{\top}w^0(y) = f^0(y), \quad y \in \omega_0,$$

с краевыми условиями (9), (17). При этом $\mathscr{D}^0(\nabla_y)$ — (3×6)-матрица дифференциальных операторов, указанная в формуле (14), а $\mathscr{A}^0$ — симметричная и положительно определенная матрица-функция размером 3×6, рассчитанная по упругим модулям материала пластины. В общем случае матрица $\mathscr{A}^0$ заполнена целиком, и поэтому сила тяжести $\rho g e_{(3)}$ вызывает не только изгиб, но и продольные смещения в пластине. Впрочем, согласно результатам из [31, гл. 4, § 2, п. 4] для однородной анизотропной цилиндрической пластины или даже композитной пластины из разнородных слоев с постоянными толщинами и упругими свойствами найдется такой коэффициент α (не обязательно из сегмента $[0, 1]$), что сдвиг начала оси апликат в точку $z^0 = h\alpha$ делает матрицу $\mathscr{A}^0$ блочно-диагональной, а ее нижняя строка приобретает вид $\bigl(0, 0, \mathscr{A}^0_3\bigr)$; иными словами, сила тяжести не вызывает в главном продольной деформации пластины, а значит, полученные в данной статье асимптотические формулы сохранятся в целом при сдвиге глобальной декартовой системы координат x. При заполненной матрице $\mathscr{A}^j(y)$ для стержня Ω^h_j также характерна не только продольная деформация, но и его изгиб и закручивание (см. [33; 31, гл. 5] и др.), и это обстоятельство приходится учитывать при построении пограничных слоев около точки P^j.

Упомянутые в разд. 1 интерпретации сочленения Π^h подразумевают конические заострения концов стержней, т. е. $H_j(-\ell_j) = 0$ и $\partial_{z_j} H_j(-\ell_j) > 0$. В этом случае уравнения (24), (27) или (75) приобретают вырождающиеся коэффициенты и согласно результатам [76, 27] краевые условия (28), (29) для них не нужны, а асимптотические конструкции изменяются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

3. *Nazarov S. A.* Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 320, N 11. P. 1419–1424.

4. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1995. V. 11, N 4. P. 343–415.

5. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).

6. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multi-structures // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54, N 2. P. 177–212.

7. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. Т. 24. С. 95–214.

8. *Назаров С. А.* Оценки точности моделирования краевых задач на сочленении областей с различными предельными размерностями // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 6. С. 119–156.

9. *Назаров С. А.* Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 345–364.

10. *Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., Sili A.* Junction of elastic plates and beams // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2007. V. 13, N 3. P. 419–457.

11. *Blanchard D., Griso G.* Junction between a plate and a rod of comparable thickness in nonlinear elasticity // J. Elasticity. 2013. V. 112, N 2. P. 79–109.

12. *Blanchard D., Griso G.* Asymptotic behavior of a structure made by a plate and a straight rod // Chinese Ann. Math. Ser. B. 2013. V. 34, N 3. P. 399–434.

13. *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with a 3d plate. Part I // J. Math. Pures Appl. 2007. V. 88, N 1. P. 1–33.

14. *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with a 3d plate. Part II // J. Math. Pures Appl. 2007. V. 88, N 2. P. 149–190.

15. *Griso G., Merzougui L.* Junctions between two plates and a family of beams // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41, N 1. P. 58–79.

16. *Физики продолжают шутить* М.: Мир, 1968.

17. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. Т. 20. С. 155–195.

18. *Bunoiu R., Cardone G., Nazarov S. A.* Scalar boundary value problems on junctions of thin rods and plates. I. Asymptotic analysis and error estimates // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2014. V. 48, N 5. P. 1495–1528.

19. *Bunoiu R., Cardone G., Nazarov S. A.* Scalar boundary value problems on junctions of thin rods and plates. II. Self-adjoint extensions and simulation models // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2018. V. 52. P. 481–508.

20. *Gaudiello A., Guibé O., Murat F.* Homogenization of the brush problem with a source term in L^1 // Arch. Rat. Mechanics Anal. 2017. V. 225, N 1. P. 1–64.

21. *Kirchhoff G. R.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. 1850. V. 40. P. 51–88.

22. *Love A. E. H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells // Philosophical Trans. of the Royal Society (London). Série A. 1888. V. 17. P. 491–549.

23. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

24. *Гольденвейзер А. Н.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953.

25. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

26. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.

27. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

28. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 5. С. 913–924.

29. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures: An asymptotic analysis. Paris: Masson, 1988.

30. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.

31. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.

32. *Panassenko G.* Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.

33. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Couplage flexion-torsion-traction dans les poutres anisotropes à section hétérogène // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre. 1991. V. 312, N 4. P. 337–344.

34. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы математического анализа. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. Т. 17. С. 101–152.

35. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Coques elastiques mines. Proprietes asymptotiques. Paris: Masson, 1997.

36. *Clebsch A.* Theorie der Elastizität der festen Körper. Leipzig, 1862.

37. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.

38. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

39. *Ржаницын А. Р.* Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982.

40. *Светлицкий В. А.* Механика стержней. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1987.

41. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* Асимптотическое расщепление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со структурой // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 1. С. 93–101.

42. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства математической физики. М.: Физматгиз, 1962.

43. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.

44. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.

45. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.

46. *Назаров С. А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.

47. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1977. V. 77. P. 25–82.

48. *Panassenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems. 1 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 3. P. 325–352.

49. *Panassenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems. 2 // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4, N 1. P. 87–116.

50. *Kozlov V., Nazarov S. A.* On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 9/10. P. 887–944.

51. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

52. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

53. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое // Тр. Моск. мат. о-ва. 1998. Т. 60. С. 3–97.

54. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* Korn′s inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptot. Anal. 1994. V. 8, N 1. P. 1–14.

55. *Назаров С. А.* Весовое анизотропное неравенство Корна для сочленения пластины со стержнями // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 4. С. 97–126.

56. *Назаров С. А.* Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.

57. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Commun. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

58. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 3. С. 665–706.

59. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга. II // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92, № 3. С. 233–297.

60. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки функции Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 5. С. 1065–1082.

61. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.

62. *Назаров С. А.* Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 87, № 4. С. 156–159.

63. *Назаров С. А.* Асимптотика решения задачи Неймана в точке касания гладких компонент границы области // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 1. С. 92–120.

64. *Назаров С. А.* О течении воды под лежачий камень // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 75–110.

65. *Nazarov S. A., Pileckas K.* The asymptotic properties of the solution to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, N 2. P. 131–167.

66. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

67. *Oleinik O. A., Yosifian G. A.* On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1983. V. 78. P. 29–53.

68. *Ван Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.

69. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

70. *Korn A.* Solution générale du probléme d'équilibre dans la théorie l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface // Ann. Université Toulouse. 1908. P. 165–269.

71. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. № 2 (№ 8). С. 19–24.

72. *Hardy G. H.* Note on a theorem of Hilbert // Math. Zeitschr. 1920. V. 6. P. 314–317.

73. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

74. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980.

75. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Неравенство Корна для произвольной системы тонких искривленных стержней // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1319–1331.

76. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952.

Поступила в редакцию 14 ноября 2024 г.
После доработки 14 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)
Институт проблем машиноведения РАН,
лаборатория «Математические методы механики материала»,
ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk