Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.554.35

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ 2–ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА T–МНОГООБРАЗИЯХ

Д. А. Матвеев

Аннотация. Рассмотрим аффинное алгебраическое многообразие с действием тора сложности 1. Известно, что в этом случае однородные локально нильпотентные дифференцирования на алгебре функций этого многообразия задаются в терминах полиэдрального дивизора. В работе получена формула для кратных коммутаторов двух однородных локально нильпотентных дифференцирований, когда среди них не более одного дифференцирования горизонтального типа. С использованием полученной формулы выведен критерий конечномерности алгебр Ли, порожденных парой однородных локально нильпотентных дифференцирований в алгебре Ли всех дифференцирований алгебры функций многообразия с действием тора.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.311

Ключевые слова: T-многообразие, градуированная алгебра, локально нильпотентное дифференцирование, алгебра Ли, коммутатор дифференцирований.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^n$ — алгебраический тор, $M = \mathfrak{X}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка характеров тора, $N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})$ — двойственная к M решетка, $N_\mathbb{Q} = N \otimes \mathbb{Q}$ — рациональное векторное пространство и X — нормальное алгебраическое многообразие.

Рассмотрим регулярное эффективное действие тора $\mathbb{T}$ на многообразии X. Многообразия с таким действием называются $\mathbb{T}$-*многообразиями.* *Сложностью действия тора* $\mathbb{T}$ называют коразмерность типичной орбиты. Так как действие тора эффективно, сложность действия на X равна $\dim X - \operatorname{rank} M$.

Если сложность действия равна нулю, то тор действует на X с открытой орбитой и многообразие называется *торическим.* Это понятие введено М. Демазюром в 1970 г., современное изложение теории торических многообразий можно найти в книгах [1, 2]. Любое аффинное торическое многообразие соответствует некоторому полиэдральному конусу $\sigma \subseteq N_\mathbb{Q}$.

Если сложность действия положительна, то аффинное $\mathbb{T}$-многообразие задается не полиэдральными конусами, а полиэдральными дивизорами (proper polyhedral divisors). Это описание было получено Альтманом и Хаузеном в работе [3]. Более конкретно, аффинному многообразию соответствует тройка $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$, где Y — нормальное полупроективное многообразие, σ — полиэдральный конус, а $\mathfrak{D}$ — дивизор на Y, коэффициентами которого являются полиэдры с конусом рецессии σ.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2025 г.

Также рассмотрим действие группы $\mathbb{G}_a^n = (\mathbb{K}, +)^n$ на многообразии X. Такие действия называют $\mathbb{G}_a^n$-действиями. Нас будут интересовать $\mathbb{G}_a^n$-действия, нормализуемые тором $\mathbb{T}$ в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$.

Если типичные орбиты $\mathbb{G}_a$-действия содержатся в замыканиях типичных орбит тора, то говорят, что действие *вертикального типа*, в противном случае — *горизонтального типа*. Всякое $\mathbb{G}_a$-действие на аффинном многообразии X соответствует некоторому локально нильпотентному дифференцированию алгебры $\mathbb{K}[X]$, а $\mathbb{G}_a$-действие, нормализуемое тором, соответствует локально нильпотентному дифференцированию на $\mathbb{K}[X]$, однородному относительно градуировки, возникающей в результате действия тора $\mathbb{T}$.

Аналогично действиям локально нильпотентное дифференцирование относят к вертикальному типу, если оно равно нулю на рациональных инвариантах действия тора, иначе — к горизонтальному типу.

Описание локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{T}$-многообразиях получил Льендо для действий вертикального типа произвольной сложности [4] и для действий горизонтального типа сложности один [5, 6]. Также в работе [6] описаны пары $\mathbb{G}_a$-подгрупп, соответствующие корневым подгруппам для действий групп $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$.

Описание $\mathbb{G}_a^2$-действий на аффинном $\mathbb{T}$-многообразии X в случае, когда Y из вышеупомянутой тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ — аффинное многообразие, получено в работе [7] с помощью критерия коммутирования для пар однородных локально нильпотентных дифференцирований.

Согласно [8, теорема A] если алгебра Ли $\mathfrak{g}$, порожденная набором локально нильпотентных полиномиальных векторных полей на аффинном многообразии X, конечномерна, то $\mathfrak{g}$ является касательной алгеброй линейной алгебраической группы, регулярно действующей на многообразии X. Этот результат служит мотивировкой для получения критериев конечномерности алгебр Ли, порожденных набором локально нильпотентных дифференцирований.

Если алгебра Ли является подмодулем ранга 1 в алгебре Ли дифференцирований алгебры многочленов, то классификация всех ее конечномерных подалгебр получена в работе [9]. Кроме того, в статьях [10, 11] были установлены критерии конечномерности алгебры Ли, которая порождается конечным набором дифференцирований вертикального типа.

Основным результатом настоящей работы является критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной парой однородных локально нильпотентных дифференцирований, когда одно из дифференцирований вертикального, а другое — горизонтального типа, в предположении, что многообразие Y является аффинной прямой.

Этот результат был получен с помощью выведенной формулы для последовательного применения конечного набора присоединенных операторов. Формула позволяет избежать громоздких вычислений, которые до этого можно было за разумное время проделать только с помощью компьютера.

Также получена классификация рассматриваемых конечномерных алгебр Ли, которая исчерпывается тремя случаями: коммутативная алгебра Ли, $\mathfrak{sl}_2$ и филиформная модельная алгебра Ли L_n. Заметим, что такие филиформные алгебры Ли являются одним из возможных обобщений алгебры Гейзенберга и активно изучаются, выступая источником полезных примеров и контрпримеров. Первые классификационные результаты для филиформных алгебр Ли получены в статье [12], там же введены обозначения, ставшие общепринятыми.

Для удобства читателя опишем структуру статьи. Разд. 2 посвящен описанию аффинных $\mathbb{T}$-многообразий в терминах собственных полиэдральных дивизоров. В разд. 3 показана связь между локально нильпотентными дифференцированиями на алгебре регулярных функций аффинного $\mathbb{T}$-многообразия и $\mathbb{G}_a$-действиями на самом многообразии, а также приведено описание локально нильпотентных дифференцирований на языке полиэдральных дивизоров. В обозначениях и последовательности изложения мы придерживаемся подхода из работы [6].

В разд. 4–6 излагаются основные результаты работы. В разделе 4 доказывается формула для вычисления коммутатора дифференцирований, а в разд. 5 с ее помощью выводятся критерии конечномерности алгебры Ли, порожденной парой дифференцирований, одно из которых вертикального, а другое — горизонтального типа. В разд. 6 разработанная техника используется для получения уже известных критериев конечномерности алгебры Ли, порожденной парой дифференцирований вертикального типа.

2. Комбинаторное описание аффинных $\mathbb{T}$-многообразий

Полное комбинаторное описание нормальных аффинных многообразий с эффективным действием тора изложено в статье [3]. В этом разделе введем необходимые определения и приведем основные результаты этой работы.

Алгебраическое многообразие Y называется *полупроективным*, если его алгебра регулярных функций конечно порождена и Y проективно над спектром этой алгебры.

Определение 1. Будем называть *σ-полиэдральным дивизором* на нормальном полупроективном многообразии Y формальную сумму

$$\mathfrak{D} = \sum_{Z \subseteq Y} \Delta_Z \otimes Z,$$

где Z — простые дивизоры на Y, Δ_Z — выпуклые полиэдры в рациональном векторном пространстве $N_{\mathbb{Q}}$, которые представляются в виде суммы Минковского некоторого многогранника и полиэдрального конуса $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, общего для всех Δ_Z, причем только конечное число полиэдров Δ_Z отлично от σ.

Так как $N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})$, определена операция спаривания $M_{\mathbb{Q}} \times N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, где $(m, p) \mapsto \langle m, p \rangle = p(m)$. Конусом, *двойственным* к $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, называется конус

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{Q}}.$$

Опорной функцией полиэдра Δ на конусе $\sigma^{\vee}$ называется минимум значений спаривания точки конуса с множеством точек полиэдра:

$$h_{\Delta}(m) = \min\langle m, \Delta \rangle := \min_{p \in \Delta} \langle m, p \rangle = \min_i \{v_i(m)\},$$

где $m \in \sigma^{\vee}$ и $\{v_i\}$ — множество вершин Δ.

С помощью опорной функции каждому σ-полиэдральному дивизору ставится в соответствие семейство дивизоров с рациональными коэффициентами. Каждой точке $m \in \sigma^{\vee}$ соответствует дивизор

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{Z \subseteq Y} h_Z(m) \cdot Z,$$

где h_Z — опорная функция полиэдра Δ_Z.

Пусть $\mathbb{T} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[M]$ — n-мерный алгебраический тор с решеткой характеров M и $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие. Морфизму действия $\mathbb{T} \times X \to X$ соответствует гомоморфизм алгебр $A \to A \otimes \mathbb{K}[M]$, задающий M-градуировку на A. Обратно, любой M-градуировке соответствует действие тора $\mathbb{T} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[M]$. Далее будем обозначать через $\sigma_M^\vee$ полугруппу $\sigma^\vee \cap M$ и через χ^m — характер тора $\mathbb{T}$, соответствующий вектору m решетки M.

Для рационального дивизора D обозначим через $H^0(U, \mathscr{O}_Y(D))$ его пространство сечений:

$$H^0(U, \mathscr{O}_Y(D)) = \{f \in \mathbb{K}(Y) \mid \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\}.$$

Изложенного достаточно, чтобы сформулировать теорему из [3, разд. 3], устанавливающую соответствие между аффинными $\mathbb{T}$-многообразиями и собственными полиэдральными дивизорами.

Теорема 1. *Любому собственному σ-полиэдральному дивизору $\mathfrak{D}$ на полупроективном многообразии Y соответствует нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие $X[Y, \mathfrak{D}] = \operatorname{Spec} A[Y, \mathfrak{D}]$ размерности $\operatorname{rank} M + \dim Y$, где*

$$A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m \chi^m \quad \text{и} \quad A_m = H^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathfrak{D}(m)) \subseteq \mathbb{K}(Y).$$

Обратно, любое нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие изоморфно $\mathbb{T}$-многообразию $X[Y, \mathfrak{D}]$ для некоторого полупроективного многообразия Y и некоторого собственного σ-полиэдрального дивизора $\mathfrak{D}$ на Y.

Взаимной однозначности соответствия можно добиться с добавлением некоторых условий минимальности на пару $(Y, \mathfrak{D})$ (см. [3, разд. 8], а также [6, разд. 1.1]).

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ — собственные σ-полиэдральные дивизоры на нормальном полупроективном многообразии Y. Если для любого простого дивизора Z в Y существует такой вектор $v_Z \in N$, что*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \sum_Z (v_Z + \sigma) \cdot Z$$

и дивизор $\sum\limits_Z \langle m, v_Z \rangle \cdot Z$ является главным для любого $m \in \sigma_M^\vee$, то многообразие $X[Y, \mathfrak{D}]$ эквивариантно изоморфно многообразию $X[Y, \mathfrak{D}']$.

Пример 1. Рассмотрим одномерную решетку $\mathbb{Z}$ характеров тора $\mathbb{T} = \mathbb{K}^\times$, конус $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} = [0, +\infty)$ и дивизор $\mathfrak{D} = [0, +\infty) \cdot \{0\}$ на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. Тогда $\sigma^\vee = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ и $m \geq 0$, а

$$\mathfrak{D}(m) = \min_{v \geq 0} \langle m, v \rangle \cdot \{0\} = 0 \cdot \{0\}, \quad A_m = \mathbb{K}[t],\ m \geq 0, \quad A = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{K}[t] \chi^m.$$

Ясно, что t и χ являются независимыми образующими алгебры A. Значит, $X = \operatorname{Spec} A = \mathbb{A}^2$ и тор действует так:

$$\lambda \circ (\chi, t) = (\lambda \chi, t).$$

3. Локально нильпотентные дифференцирования на аффинных $\mathbb{T}$-многообразиях

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное многообразие над полем $\mathbb{K}$. Аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ будем обозначать через $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. Дифференцирование ∂ алгебры A называется *локально нильпотентным* (ЛНД), если для любого $a \in A$ существует такое $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\partial^n(a) = 0$. Каждому локально нильпотентному дифференцированию ∂ на A соответствует действие группы $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ на A, определяемое отображением $\phi_\partial : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times A \to A$, $\phi_\partial : (t, f) \mapsto \exp(t\partial)(f)$. Следовательно, каждому локально нильпотентному дифференцированию соответствует действие $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ на $X = \operatorname{Spec} A$. Верно и обратное, любому действию группы $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ на X соответствует локально нильпотентное дифференцирование алгебры A (см. [13, разд. 1.5]).

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ — алгебра с M-градуировкой из теоремы 1. Локально нильпотентное дифференцирование ∂ называется *однородным относительно M-градуировки*, если оно переводит однородные элементы в однородные. В таком случае у локально нильпотентного дифференцирования ∂ корректно определена степень $\deg \partial = \deg \partial(f) - \deg f$ для любого однородного элемента $f \in A \setminus \ker \partial$. Говорят, что $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$-действие *нормализуется тором* $\mathbb{T}$, если группа $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ нормализуется тором как подгруппа в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X)$. $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$-действие нормализуется тором $\mathbb{T}$ в том и только в том случае, когда соответствующее локально нильпотентное дифференцирование ∂ однородно относительно M-градуировки.

Всякое дифференцирование ∂ на алгебре A без делителей нуля продолжается на поле частных $\operatorname{Quot}(A)$. Аналогично продолжается действие тора $\mathbb{T}$ на $\operatorname{Quot}(A)$. Рассмотрим подполе рациональных инвариантов $\operatorname{Quot}(A)^{\mathbb{T}} = \mathbb{K}(Y)$. Говорят, что локально нильпотентное дифференцирование ∂ *вертикального типа*, если $\partial(\mathbb{K}(Y)) = 0$, и *горизонтального типа* иначе. То, что дифференцирование ∂ вертикального типа, геометрически означает, что типичные орбиты соответствующего $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$-действия лежат в замыканиях типичных орбит действия тора $\mathbb{T}$.

Перейдем к описанию дифференцирований каждого типа.

Сначала рассмотрим классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на $\mathbb{T}$-многообразиях произвольной сложности, приведенную в [4]. Обозначим через $\sigma(1)$ множество лучей (граней размерности 1) конуса σ. В дальнейшем для краткости будем понимать под $\rho \in \sigma(1)$ как луч, так и порождающий его примитивный вектор решетки.

Определение 2. Пусть σ — острый конус в $N_{\mathbb{Q}}$. Вектор $e \in M$ называется *корнем Демазюра* конуса σ, если выполнены следующие условия:

(1) существует луч $\rho_e \in \sigma(1)$, такой что $\langle e, \rho_e \rangle = -1$;

(2) $\langle e, \rho \rangle \geq 0$ для всех $\rho \in \sigma(1) \setminus \{\rho_e\}$.

Множество всех корней Демазюра конуса σ обозначается через $\mathscr{R}(\sigma)$. Луч ρ_e называют лучом, *ассоциированным* с корнем e.

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ и $\mathfrak{D} = \sum\limits_Z \Delta_Z \cdot Z$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на полупроективном многообразии Y. Обозначим через $\{v_{i,Z}\}$ множество вершин полиэдра Δ_Z для простого дивизора $Z \subseteq Y$. Пусть e — корень Демазюра конуса σ. Рассмотрим

$$\mathfrak{D}(e) = \sum_Z \min_i \{v_{i,Z}(e)\} \cdot Z \quad \text{и} \quad \Phi_e^{\times} = H^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathfrak{D}(e))) \setminus \{0\}.$$

Для каждой функции $\varphi \in \Phi_e^\times$ определим

$$\partial_{e,\varphi}(f\chi^m) = \langle m, \rho_e\rangle \cdot \varphi \cdot f\chi^{m+e} \quad \text{для любого } m \in \sigma_M^\vee \text{ и } f \in \mathbb{K}(Y). \tag{1}$$

Это выражение задает дифференцирование на алгебре A. В следующей теореме приводится классификация однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на многообразии $A[Y, \mathfrak{D}]$ (см. [4, теорема 2.4], а также [6, теорема 1.7]).

Теорема 2. *Для каждого корня Демазюра $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ и функции $\varphi \in \Phi_e^\times$ дифференцирование $\partial_{e,\varphi}$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ степени e.*

Обратно, если $\partial \neq 0$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на A, то $\partial = \partial_{e,\varphi}$ для некоторого корня $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ и некоторой функции $\varphi \in \Phi_e^\times$.

Классификация дифференцирований горизонтального типа более сложна и известна только для действий сложности 1. В таком случае многообразие Y из тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ будет гладкой кривой. Как показано в работе [5], однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа существуют, только если Y изоморфно $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$ (см. [5, следствие 3.13, лемма 3.16]).

Далее в настоящей работе исследуются однородные локально нильпотентные дифференцирования градуированной алгебры $A[Y, \mathfrak{D}]$ с $Y = \mathbb{A}^1$.

Определение 3. *Разметкой* σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ называется набор $\widehat{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}; v_z \forall z \in \mathbb{A}^1\}$, где:

(1) $\mathfrak{D} = \sum \Delta_z \cdot z$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на $\mathbb{A}^1$ и v_z — вершина Δ_z;

(2) $v_{\deg} := \sum v_z$ является вершиной $\deg \mathfrak{D} := \sum \Delta_z$;

(3) $v_z \in N$ за исключением быть может одной вершины в *отмеченной точке* z_0. В случае, когда все выбранные вершины v_z лежат в N, в качестве отмеченной точки z_0 возьмем любую точку из носителя дивизора $\mathfrak{D}$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ и $\omega \subseteq N_\mathbb{Q}$ — конус, порожденный $\deg \mathfrak{D} - v_{\deg}$. Обозначим через $\widehat{\omega} \subseteq (N \oplus \mathbb{Z})_\mathbb{Q}$ *расширенный конус* дивизора $\mathfrak{D}$, порожденный $(\omega, 0)$ и $(v_{z_0}, 1)$. Также обозначим через d такое минимальное натуральное число, что $d \cdot v_{z_0} \in N$.

Определение 4. Пара $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ и $e \in M$, называется *согласованной*, если выполнены следующие условия:

(1) существует такое $s \in \mathbb{Z}$, что $\hat{e} = (e, s) \in M \oplus \mathbb{Z}$ — корень Демазюра расширенного конуса $\widehat{\omega}$ с ассоциированным лучом $\hat{\rho} = (d \cdot v_{z_0}, d)$, в этом случае $s = -1/d - v_{z_0}(e)$;

(2) $v(e) \geq 1 + v_z(e)$ для любого $z \neq z_0$ и любой вершины $v \neq v_z$ полиэдра Δ_z;

(3) $d \cdot v(e) \geq 1 + d \cdot v_{z_0}(e)$ для любой вершины $v \neq v_{z_0}$ полиэдра Δ_{z_0}.

Положим $L = \{m \in M \mid v_{z_0}(m) \in \mathbb{Z}\}$. Так как функция минимума линейна относительно операции суммы по Минковскому, линеен и $\mathfrak{D}(m)$ для $m \in \omega^\vee$. Поскольку любой дивизор на прямой $\mathbb{A}^1$ является главным, существуют такие рациональные функции $\varphi^m \in \mathbb{K}(\mathbb{A}^1)$, что $\operatorname{div}(\varphi^m) + \mathfrak{D}(m) = 0$ и $\varphi^m \cdot \varphi^{m'} = \varphi^{m+m'}$ для любых $m, m' \in \omega_L^\vee$.

Следующая теорема (см. [5, теорема 3.28], а также [6, теорема 1.10]) дает классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований горизонтального типа на $A[Y, \mathfrak{D}]$.

Теорема 3. *Пусть $X = X[Y, \mathfrak{D}]$ — нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие и $Y = \mathbb{A}^1$. Тогда однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа на алгебре $A[Y, \mathfrak{D}]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка дивизора $\mathfrak{D}$ и $e \in M$.*

Укажем явную формулу для однородного локально нильпотентного дифференцирования, соответствующего согласованной паре $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Так как на прямой любой дивизор является главным, по предложению 1 можно считать, что $v_z = 0 \in N$ для всех $z \neq 0$. Полагая $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[t]$, имеем следующую формулу для ∂ (см. [6, разд. 1]):

$$\partial_e(t^r \chi^m) = d(v_{z_0}(m) + r) \cdot t^{r+s} \cdot \chi^{m+e} \quad \text{для любых } (m, r) \in M \oplus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Пример 2. Опишем все дифференцирования для многообразия из примера 1. Начнем с дифференцирований вертикального типа. Имеем $\sigma = [0, +\infty)$, $\rho = 1$. Поэтому корень Демазюра $e = -1$. Тогда дифференцирование с точностью до константы имеет вид

$$\partial_0(t^r \chi^m) = \langle m, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^r \chi^{m+e} = m \cdot \varphi \cdot t^r \chi^{m-1}, \text{ т. е. } \begin{cases} \partial_0(t) = 0, \\ \partial_0(\chi) = \varphi; \end{cases} \partial_0 = \varphi \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Для дифференцирования горизонтального типа имеем следующий набор данных:

$$v_{z_0} = 0, \ \omega = Q_{\geq 0}, \ \widehat{\omega} = Q^2_{\geq 0}, \ d = 1, \ \widehat{e} = (e_1, s), \ s = -1, \ e_1 \geq 0.$$

Следовательно, с точностью до константы получим семейство дифференцирований для разных e_1:

$$\partial_1(t^r \chi^m) = r \cdot t^{r-1} \chi^{m+e_1}, \quad e_1 \geq 0, \text{ т. е. } \begin{cases} \partial_1(t) = \chi^{e_1}, \\ \partial_1(\chi) = 0; \end{cases} \partial_1 = \chi^{e_1} \frac{\partial}{\partial t}.$$

4. Формула для коммутаторов ЛНД вертикального и горизонтального типов

Рассмотрим пару однородных локально нильпотентных дифференцирований на градуированной алгебре $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$. Обозначим через ∂_0 дифференцирование вертикального типа и через ∂_1 — горизонтального типа. Пусть Δ — их коммутатор: $\Delta = [\partial_0, \partial_1] = \partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0$, и $\operatorname{Lie}(\partial_0, \partial_1)$ — алгебра Ли, порожденная ∂_0 и ∂_1.

В данной работе получена формула для коммутаторов только в случае дифференцирований вертикального типа ∂_0 с $\varphi = \mathrm{const}$. Произвольное дифференцирование вертикального типа примет такой вид при переходе от базового поля $\mathbb{K}$ к расширению $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(Y)^{\mathbb{T}}$.

Согласно (1) и (2) в некоторой системе порождающих дифференцирования будут иметь вид

$$\partial_0(t^r \chi^m) = \langle m, \rho_0 \rangle \cdot t^r \chi^{m+e_0}, \quad \partial_1(t^r \chi^m) = d_1(v_1(m) + r) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_1}.$$

Ясно, что $\partial_0, \partial_1, \Delta \in \operatorname{Lie}(\partial_0, \partial_1)$. Другие дифференцирования из этой алгебры Ли получаются последовательным применением операции коммутирования с ∂_0 или ∂_1 к Δ, так как $[\partial_0, \partial_0] = [\partial_1, \partial_1] = 0$. В силу антикоммутативности и правила Якоби дифференцирование представляется как сумма слагаемых вида

$$\Delta_u = [[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}],$$

где $u = (u_1, \dots, u_k)$ — двоичный вектор и $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть $|u| = u_1 + \dots + u_k$ — вес вектора u. Вес $|u|$ соответствует количеству применений коммутатора с дифференцированием горизонтального типа в Δ_u, и тогда количество нулей $|u|_0 = k - |u|$ — применениям коммутатора с дифференцированием вертикального типа.

Пусть $u(i) = (u_1, \dots, u_i)$ — вектор u, укороченный до i-й позиции, $i \le k$.

Кратко прокомментируем, как устроено действие Δ_u на элемент алгебры $t^r\chi^m$.

Во-первых, из формул для ∂_0 и ∂_1 ясно, что произойдет с показателями t и χ, так как они меняются независимо от коэффициентов. К показателю t прибавится s_1 столько раз, сколько применено ∂_1 (с учетом применения Δ), т. е. получим $t^{r+(|u|+1)s_1}$. Столько же раз прибавится e_1 к показателю χ. Кроме того, вклад в показатель при χ дает еще дифференцирование ∂_0, которое применялось $|u|_0 + 1$ раз с учетом Δ. Поэтому получим $\chi^{m+(|u|_0+1)e_0+(|u|+1)e_1}$.

Во-вторых, возникнет сложный коэффициент. Первый множитель в коэффициенте зависит только от того, сколько раз встретились дифференцирования каждого типа независимо от их порядка. Мы обозначили его через $F_u(m, r)$. Каждый следующий множитель $\alpha_{u(i)}$ возникает от применения коммутатора с соответствующим дифференцированием ∂_{u_i}, и здесь уже важен порядок примененных до этого коммутаторов.

Предложение 2. *Пусть* $\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \dots], \partial_{u_k}] \in \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$. *Тогда дифференцирование* Δ_u *имеет вид*

$$\Delta_u(t^r\chi^m) = (-1)^k \cdot \alpha_{u(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{u(k)} \cdot F_u(m, r) \cdot t^{r+(|u|+1)s_1}\chi^{m+(|u|_0+1)e_0+(|u|+1)e_1},$$

где

$$\alpha_{u(i)} = \begin{cases} (|u(i)| + 1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u(i)|_0 + 1, & \textit{если } u_i = 0, \\ (|u(i)|_0 + 1)d_1 v_1(e_0) - |u(i)| + 1, & \textit{если } u_i = 1, \end{cases}$$

$$F_u(m, r) = ((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \cdot d_1(v_1(m)+r) - ((|u|_0+1)d_1 v_1(e_0) - |u|) \cdot \langle \rho_0, m\rangle.$$

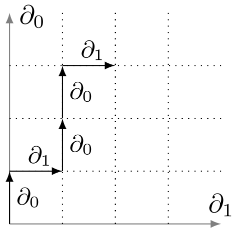

Рис. 1.

Удобно интерпретировать формулы для $\alpha_{u(i)}$ с помощью следующей схемы. Рассмотрим целочисленную решетку в положительной четверти, как на рис. 1. Будем строить путь из единичных векторов, стартующий из начала координат. Сдвиг на единичный вектор по оси абсцисс обозначает применение коммутатора с ∂_1, сдвиг на единичный вектор по оси ординат — применение коммутатора с ∂_0.

Таким образом, любому дифференцированию $\Delta_u \in \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$ можно поставить в соответствие путь из звеньев на целочисленной решетке.

Заметим, что множитель $\alpha_{u(i)}$ зависит только от последнего звена пути, задаваемого вектором $u(i)$. Таким образом, все $\alpha_{u(i)}$ с одинаковым последним звеном равны. Например, $\alpha_{u(i)}$, соответствующие вертикальной стрелке между точками $(1, 1)$ и $(1, 2)$, это $\alpha_{(010)} = \alpha_{(100)} = 2\langle \rho_0, e_1\rangle - 1$. Поэтому каждому звену на решетке однозначно соответствует некоторый $\alpha_{u(i)}$.

На практике если приходится вычислять много значений коммутаторов при небольших k, оказывается удобным заранее выписать для каждого звена решетки значения $\alpha_{u(i)}$. Тогда после построения соответствующего вектору u пути на решетке формула для Δ_u выписывается мгновенно.

Пример 3. В качестве примера возьмем дифференцирование, которое задается путем на рис. 1:

$$\Delta_{(0,1,0,0,1)} = [[[[[\Delta, \partial_0], \partial_1], \partial_0], \partial_0], \partial_1].$$

Нужно вычислить значение соответствующих $\alpha_{u(i)}$ и функции $F_{(01001)}(m,r)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{(0)} &= \langle \rho_0, e_1 \rangle,\\
\alpha_{(0,1)} &= 2d_1 v_1(e_0),\\
\alpha_{(0,1,0)} &= 2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1,\\
\alpha_{(0,1,0,0)} &= 2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 2,\\
\alpha_{(0,1,0,0,1)} &= 4d_1 v_1(e_0) - 1.
\end{aligned}$$

Так как вес $|(0,1,0,0,1)| = 2$ и количество нулей $|(0,1,0,0,1)|_0 = 3$, имеем

$$\begin{aligned}
F_{(0,1,0,0,1)}(m,r) &= ((2+1)\langle \rho_0, e_1 \rangle - 3) \cdot d_1(v_1(m) + r) - ((3+1)d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle\\
&= 3(\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot d_1(v_1(m) + r) - (4d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу

$$\begin{aligned}
\Delta_{(10110)}(t^r \chi^m) = -4 \cdot \langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1 v_1(e_0) \cdot (2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot (\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1)\\
\times (4d_1 v_1(e_0) - 1) \cdot (3(\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot d_1(v_1(m) + r)\\
- (4d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle) t^{r+3s_1} \chi^{m+4e_0+3e_1}.
\end{aligned}$$

Доказательство предложения 2. Воспользуемся индукцией по k — длине вектора $|u|$.

База индукции: $k = 0$. Тогда $\Delta_u = \Delta$. Вычислим:

$$\begin{aligned}
&\Delta(t^r \chi^m) = \partial_0 \partial_1 (t^r \chi^m) - \partial_1 \partial_0 (t^r \chi^m)\\
&= d_1(v_1(m) + r)\langle \rho_0, m + e_1 \rangle \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1} - d_1 \langle \rho_0, m \rangle (v_1(m + e_0) + r) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1}\\
&= d_1(\langle \rho_0, e_1 \rangle (v_1(m) + r) - v_1(e_0)\langle \rho_0, m \rangle) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1}.
\end{aligned}$$

Тот же результат даст формула предложения 2: $\alpha_{u(i)}$ отсутствуют, а выражение $F_u(m,r)$ при $|u| = |u|_0 = 0$ примет вид $\langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1(v_1(m) + r) - d_1 v_1(e_0)\langle \rho_0, m \rangle$. Остается вынести d_1 за скобки.

Шаг индукции: $k \to k+1$. Первый случай: $\Delta_{u'} = [\Delta_u, \partial_0]$. Вектор $u' = (u, 0)$.

По предположению индукции и формуле коммутатора имеем

$$\Delta_u(t^r \chi^m) = (-1)^k \alpha_{u(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{u(k)} \cdot F_u(m,r) \cdot t^{r+(|u|+1)s_1} \chi^{m+(k-|u|+1)e_0+(|u|+1)e_1},$$

$$\Delta_{u'}(t^r \chi^m) = [\Delta_u, \partial_0](t^r, \chi^m) = \Delta_u \partial_0 (t^r \chi^m) - \partial_0 \Delta_u (t^r \chi^m).$$

Выясним, как устроено выражение для $\Delta_{u'}(t^r \chi^m)$. Ясно, что показатели у t и χ изменятся нужным образом, потому что они меняются независимо от коэффициентов. Также ясно, что можно вынести за скобки множители $\alpha_{u(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{u(k)}$ и работать только с оставшимся коэффициентом:

$$K = \langle \rho_0, m \rangle F_u(m + e_0, r) - \langle \rho_0, m + e_0 + e_1 + |u|_0 e_0 + |u| e_1 \rangle F_u(m,r). \tag{3}$$

Для проведения шага индукции этот коэффициент должен оказаться равен $-\alpha_{u'} F_{u'}(m,r)$. Выпишем вспомогательные равенства, которые получаются прямым вычислением:

$$F_u(m + e_0, r) = F_u(m,r) + (|u| + 1)\langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1 v_1(e_0) + d_1 v_1(e_0) - |u|, \tag{4}$$

$$F_{u'}(m,r) = F_u(m,r) - d_1(v_1(m)+r) - d_1 v_1(e_0)\langle \rho_0, m\rangle, \tag{5}$$

$$\alpha_{u'} = (|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0. \tag{6}$$

Раскроем длинное скалярное произведение при $F_u(m,r)$ в (3) и подставим (4):

$$\begin{aligned} K = &-((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0)F_u(m,r) + F_u(m,r) \\ &+ \langle \rho_0, m\rangle((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle \cdot d_1 v_1(e_0) + d_1 v_1(e_0) - |u|) \\ &= -((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0)F_u(m,r) \\ &+ ((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \cdot d_1(v_1(m) + r + \langle \rho_0, m\rangle v_1(e_0)) \\ &= -((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0)(F_u(m,r) - d_1(v_1(m)+r) - d_1 v_1(e_0)\langle \rho_0, m\rangle) \\ &= -\alpha_{u'} F_{u'}(m,r). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу (5) и (6).

Второй случай: $\Delta_{u'} = [\Delta_u, \partial_1]$. Вектор $u' = (u, 1)$.

Действуем аналогично — переходим к работе с коэффициентом:

$$\begin{aligned} K = &\, d_1(v_1(m)+r) \cdot F_u(m+e_1, r+s_1) \\ &- d_1(v_1(m + e_0 + e_1 + |u|_0 e_0 + |u| e_1) + r + s_1 + |u| s_1) \cdot F_u(m,r). \end{aligned} \tag{7}$$

Выпишем вспомогательные равенства:

$$\begin{aligned} F_u(m+e_1, r+s_1) = &\, F_u(m,r) - ((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \\ &- ((|u|_0+1) d_1 v_1(e_0) - |u|)\langle \rho_0, e_1\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

$$F_{u'}(m,r) = F_u(m,r) + \langle \rho_0, e_1\rangle \cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle \rho_0, m\rangle, \tag{9}$$

$$\alpha_{u'} = (|u|_0+1) \cdot d_1 v_1(e_0) - |u|. \tag{10}$$

Аналогично, подставим (8) в (7) и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} K = &-((|u|_0+1) \cdot d_1 v_1(e_0) - |u|)F_u(m,r) + F_u(m,r) \\ &- d_1(v_1(m)+r)((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \\ &- d_1(v_1(m)+r)((|u|_0+1) d_1 v_1(e_0) - |u|)\langle \rho_0, e_1\rangle \\ &= -((|u|_0+1) \cdot d_1 v_1(e_0) - |u|)F_u(m,r) \\ &- ((|u|_0+1) d v_1(e_0) - |u|)(\langle \rho_0, e_1\rangle \cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle \rho_0, m\rangle) \\ &= -((|u|_0+1) \cdot d_1 v_1(e_0) - |u|)(F_u(m,r) + \langle \rho_0, e_1\rangle \cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle \rho_0, m\rangle) \\ &= -\alpha_{u'} F_{u'}(m,r). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу (9) и (10). Оба случая рассмотрены, и тем самым предложение 2 доказано. $\square$

В дальнейшем будем исследовать условия, при которых коммутатор дифференцирований обращается в нуль. Для этого будет полезна следующая

Лемма 1. *В обозначениях предложения* 2

$$F_u \neq 0 \quad \forall u.$$

Доказательство. Сгруппируем коэффициенты при r и m:

$$\begin{aligned} F_u(m,r) = &\, r \cdot d_1((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \\ &+ \langle ((|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0) d_1 v_1 - ((|u|_0+1) d_1 v_1(e_0) - |u|)\rho_0, m\rangle. \end{aligned}$$

Имеем $F_u \equiv 0$, если коэффициенты при r и m равны нулю:

$$\begin{cases} (|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0 = 0, \\ (|u|_0+1)d_1 v_1(e_0) - |u| = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle = |u|_0, \\ (|u|_0+1)d_1 v_1(e_0) = |u|. \end{cases}$$

Но это уравнения в целых числах, поэтому $|u|+1$ делит $|u|_0$ и $|u|_0+1$ делит $|u|$, что приводит к противоречию:

$$\begin{cases} |u| \le |u|_0 - 1, \\ |u|_0 \le |u| - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |u| < |u|_0, \\ |u|_0 < |u|. \end{cases}$$

5. Критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной дифференцированиями вертикального и горизонтального типов

В этом разделе используем формулу коммутатора для вывода критерия конечномерности алгебры Ли, порожденной парой однородных локально нильпотентных дифференцирований, одно из которых вертикального, а другое — горизонтального типа.

Напомним некоторые определения. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *филиформной*, если для подалгебр убывающего центрального ряда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \dots, \; \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$$

выполнено $\dim \mathfrak{g}_k = n - k$ для $2 \le k \le n$. Всякая филиформная алгебра Ли нильпотентна и ее класс нильпотентности максимален.

В филиформной алгебре Ли размерности $n+1$ существует *базис Вернь* $\{X_i\}$, в котором $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ для $1 \le i \le n-1$ и $[X_0, X_n] = 0$ (см. [14, разд. 6.2], а также [12, предложение 5, разд. 1.5]).

Если остальные $[X_i, X_j]$ равны 0 при $i < j$, то алгебра Ли называется *модельной* филиформной алгеброй Ли. Такие алгебры принято обозначать через L_n, $\dim L_n = n+1$.

У алгебры L_n существует следующее представление верхнетреугольными матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_0 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В работе [15] показано, что это представление минимальное и точное.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$, *где* ∂ — *ЛНД вертикального типа с* $\varphi = \mathrm{const}$, ∂_1 — *ЛНД горизонтального типа. Тогда* $\mathfrak{g}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $v_1(e_0) = 0, \langle \rho_0, e_1\rangle = 0$;
(2) $v_1(e_0) = 0, \langle \rho_0, e_1\rangle > 0$;
(3) $v_1(e_0) > 0, \langle \rho_0, e_1\rangle = 0$;
(4) $v_1(e_0) > 0, \langle \rho_0, e_1\rangle > 0$, $s_1 = 0$, $e_0 + e_1 = 0$.

В этих случаях получаются следующие алгебры Ли:

(1) $\mathfrak{g}$ *коммутативна*, $[\partial_0, \partial_1] = 0$;
(2) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \rho_0, e_1\rangle + 2}$ *модельная филиформная*, $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho_0, e_1\rangle + 3$;

(3) $\mathfrak{g} \cong L_{d_1 v_1(e_0)+2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = d_1 v_1(e_0) + 3$;
(4) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Доказательство. Сначала покажем, что в случаях (1)–(4) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечномерна.

Случай (1). Условие случая (1) $\langle e_1, \rho_0 \rangle = v_1(e_0) = 0$ совпадает с критерием коммутирования ∂_0 и ∂_1 из [7, теорема 4] с учетом того, что $\varphi = \mathrm{const}$. Значит, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна.

Случай (2). По лемме 1 имеем $F_u(m, r) \neq 0$. Следовательно, $\Delta_u = 0$ только если один из $\alpha_{u(i)}$ равен нулю. Из равенства $v_1(e_0) = 0$ получаем, что $\alpha_{u(i)} = 0$ для всех $u_i = 1$. Тогда только для $u_i = 0$ множители $\alpha_{u(i)}$ могут быть отличны от нуля (рис. 2). Значит, любое ненулевое дифференцирование Δ_u должно соответствовать пути, который целиком лежит на оси ординат при $k \leq \langle \rho_0, e_1 \rangle$.

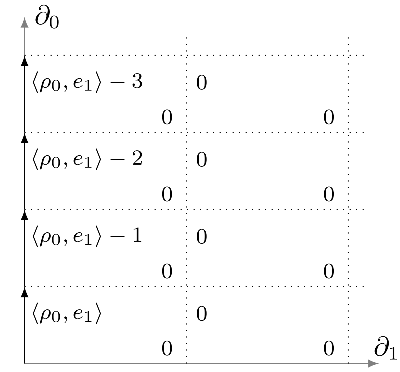

Рис. 2.

Также заметим, что для любых u и v будет $[\Delta_u, \Delta_v] = 0$, потому что, раскрывая скобку по тождеству Якоби, получим во всех слагаемых коммутирование с ∂_1, которое обращает коммутатор в нуль, как показано выше.

Таким образом, все дифференцирования, которые могут быть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это $\partial_0, \partial_1, \Delta$ и $\mathrm{ad}(\partial_0)^i(\Delta)$, где $i \in \{1, \dots, \langle \rho_0, e_1 \rangle\}$, поэтому $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho_0, e_1 \rangle + 3$ и $\mathfrak{g}$ модельная филиформная.

Случай (3). Этот случай симметричен предыдущему: $\alpha_{u(i)} = 0$ при $u_i = 1$, все отличные от $\partial_0, \partial_1, \Delta$ дифференцирования соответствуют пути на оси абсцисс длины $k \leq d_1 v_1(e_0)$.

Случай (4). Если $s_1 = 0$ и $e_0 + e_1 = 0$, то $\langle \rho_0, e_1 \rangle = \langle \rho_0, -e_0 \rangle = 1$ и

$$d_1 v_1(e_0) = -d_1 v_1(e_1) = d_1 s_1 + 1 = 1.$$

Из предложения 2 вытекает, что любой Δ_u либо равен 0, либо пропорционален ∂_0, ∂_1, Δ. Положим $f = \partial_0$, $g = \partial_1$, $h = \Delta$. Имеем

$$[f, g] = h, \quad [h, f] = 2f, \quad [h, g] = -2g.$$

Следовательно, получаем $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Обратно, если не выполнены условия случаев (1)–(4), то $v_1(e_0) > 0$, $\langle \rho_0, e_1 \rangle > 0$ и $s_1 \neq 0$ или $e_0 + e_1 \neq 0$. Построим дифференцирование Δ_u, где $u = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ и длина вектора u равна $2k$.

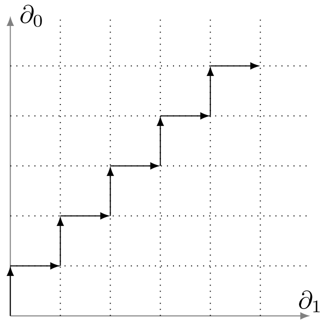

Рис. 3.

Путь для Δ_u показан на рис. 3.

Рассмотрим степень дифференцирования Δ_u:

$$(k+1)s_1 \text{ для } t, \quad (k+1)(e_0+e_1) \text{ для } \chi.$$

Одна из них обязана неограниченно возрастать, а значит, Δ_u не совпадает ни с одним из предыдущих дифференцирований. Осталось показать, что $\alpha_{u(i)}$ не обращаются в нуль.

По формуле предложения 2 для $u_i = 0$ при нечетном i, т. е. $i = 2j+1$, имеем

$$\alpha_{u(i)} = (j+1)\langle\rho_0, e_1\rangle - j \neq 0, \text{ так как } \langle\rho_0, e_1\rangle \in \mathbb{Z} \text{ и } \langle\rho_0, e_1\rangle \neq \frac{j}{j+1}.$$

Аналогично для $u_i = 1$, $i = 2j$, выполнено

$$\alpha_{u(i)} = (j+1)d_1v_1(e_0) - j + 1 \neq 0, \text{ так как } d_1v_1(e_0) \in \mathbb{Z} \text{ и } d_1v_1(e_0) \neq \frac{j-1}{j+1},$$

что и требовалось показать.

Пример 4. Проиллюстрируем полученный результат в случае дифференцирований из примера 2. Напомним, что речь идет о многообразии, определяемом дивизором $\mathfrak{D} = [0, +\infty) \cdot \{0\}$ на аффинной прямой, а дифференцирования имеют вид

$$\partial_0(t^r\chi^m) = m \cdot t^r\chi^{m-1}, \quad e_0 = -1,\ \rho_0 = 1,$$
$$\partial_1(t^r\chi^m) = r \cdot t^{r-1}\chi^{m+e_1}, \quad e_1 \geq 0,\ v_1 = 0,\ s_1 = -1.$$

Заметим, что $v_1(e_0) = 0 \cdot (-1) = 0$, поэтому выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы 4.

Если $e_1 = 0$, то выполнено условие (1): $[\partial_0, \partial_1] = 0$ и алгебра Ли коммутативна. Если $e_1 > 0$, то выполнено условие (2): $\mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1) = L_{e_1+2}$ — модельная филиформная алгебра Ли с базисом Вернь: $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, где $X_0 = \partial_0$, $X_1 = \partial_1$ и $\dim L_{e_1+2} = e_1 + 3$.

Пример 5. Рассмотрим ситуацию, где реализуются все случаи конечномерности. Чтобы существовали дифференцирования вертикального типа, должно быть $\sigma \neq \{0\}$. Если носитель дивизора $\mathfrak{D}$ состоит из единственной точки, не нужно следить за условиями согласованной разметки, что упростит вычисления. Поэтому пусть $\sigma = \mathbb{Q}^4_{\geq 0}$ и $\mathfrak{D} = (p+\sigma) \cdot \{0\}$ на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$, где $p = (0, 0, -1, -1) \in N = \mathbb{Z}^4$. Получаемое из этого набора данных многообразие — пятимерное аффинное пространство. На алгебре функций существуют четыре дифференцирования вертикального типа, каждое из которых отвечает примитивному вектору одного из лучей четырехмерного конуса σ и которые обозначим через ∂_{01}, ∂_{02}, ∂_{03}, ∂_{04}:

$$\rho_{01} = (1,0,0,0),\ e_{01} = (-1,0,0,0); \quad \rho_{02} = (0,1,0,0),\ e_{02} = (0,-1,0,0);$$
$$\rho_{03} = (0,0,1,0),\ e_{03} = (0,0,-1,0); \quad \rho_{04} = (0,0,0,1),\ e_{04} = (0,0,0,-1).$$

Также рассмотрим два дифференцирования горизонтального типа ∂_{11}, ∂_{12}, которые задаются отмеченной вершиной $v_1 = p$ (единственной) и векторами

$$e_{11} = (0,1,0,1), \quad e_{12} = (0,0,0,1).$$

Тогда имеем

$$v_1(e_{01}) = 0,\ \langle \rho_{01}, e_{11}\rangle = 0; \quad v_1(e_{02}) = 0,\ \langle \rho_{02}, e_{11}\rangle = 1;$$
$$v_1(e_{03}) = 1, \langle \rho_{03}, e_{12}\rangle = 0; \quad v_1(e_{04}) = 1,\ \langle \rho_{04}, e_{12}\rangle = 1,$$
$$s_{12} = -1 - v_1(e_{12}) = 0, \quad e_{04} + e_{12} = 0.$$

Таким образом, пары дифференцирований $(\partial_{01}, \partial_{11})$, $(\partial_{02}, \partial_{11})$, $(\partial_{03}, \partial_{12})$, $(\partial_{04}, \partial_{12})$ отвечают случаям (1)–(4) теоремы 4 соответственно.

6. Критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной однородными ЛНД вертикального типа

Критерий конечномерности в этом случае уже известен и является следствием теоремы [10, теорема 5.1] в случае, когда алгебра Ли 2-порожденная.

Здесь независимо придем к тем же результатам, используя формулу предложения 2. Для этого нужно заметить, что получить аналогичную формулу для коммутаторов дифференцирования вертикального типа можно символьной заменой.

Пусть ∂ и $\widehat{\partial}$ — два разных дифференцирования вертикального типа. Тогда над полем $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(Y)^{\mathbb{T}}$ они имеют вид

$$\partial(f\chi^m) = \langle m, \rho\rangle \cdot f\chi^{m+e}, \quad \widehat{\partial}(f\chi^m) = \langle m, \widehat{\rho}\rangle \cdot f\chi^{m+\widehat{e}}.$$

Сделаем символьную замену в формулах предложения 2:

$$e_1 \mapsto \widehat{e}, \quad t^{r+s_1(|u|+1)} \mapsto f, \quad d_1 v_1(e_0) \mapsto \langle \widehat{\rho}, e\rangle, \quad d_1(v_1(m)+r) \mapsto \langle \widehat{\rho}, m\rangle.$$

Обозначим здесь $\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}]$, где каждое ∂_{u_i} совпадает с одним из рассматриваемых дифференцирований вертикального типа. Пусть ∂ встречается среди них p раз, а $\widehat{\partial}$ встречается $q = k - p$ раз соответственно. Тогда верно

Следствие 1 (предложения 2). *Пусть*

$$\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}] \in \mathrm{Lie}(\partial, \widehat{\partial}).$$

Тогда дифференцирование Δ_u имеет вид

$$\Delta_u(f\chi^m) = (-1)^k F_u(m) \alpha_{u(1)} \ldots \alpha_{u(k)} \cdot f\chi^{m+(p+1)e+(q+1)\widehat{e}},$$

где

$$\alpha_{u(i)} = \begin{cases} (p+1)\langle \rho, \widehat{e}\rangle - q + 1, & \text{если } \partial_{u_i} = \partial, \\ (q+1)\langle \widehat{\rho}, e\rangle - p + 1, & \text{если } \partial_{u_i} = \widehat{\partial}, \end{cases}$$
$$F_u(m) = ((p+1)\langle \rho, \widehat{e}\rangle - q)\langle \widehat{\rho}, m\rangle - ((q+1)\langle \widehat{\rho}, e\rangle - p)\langle \rho, m\rangle.$$

Таким образом, дифференцирования вертикального типа также можно быстро вычислять с помощью путей в решетке. Аналогичным образом для них формулируется

Теорема 5. *Пусть* ∂ *и* $\widehat{\partial}$ *— дифференцирования вертикального типа и* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\partial, \widehat{\partial}\,)$ *Тогда* $\mathfrak{g}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle = \langle \widehat{\rho}, e\rangle = 0$;

(2) $\langle \widehat{\rho}, e\rangle = 0, \langle \rho, \widehat{e}\,\rangle > 0$;

(3) $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle = 0, \langle \widehat{\rho}, e\rangle > 0$;

(4) $\langle \widehat{\rho}, e\rangle > 0$, $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle > 0$, $\widehat{s} = 0$, $e + \widehat{e} = 0$.

В этих случаях получаются следующие алгебры Ли:

(1) $\mathfrak{g}$ *коммутативна,* $[\partial, \widehat{\partial}\,] = 0$*;*

(2) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \rho, \widehat{e}\rangle + 2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho, \widehat{e}\,\rangle + 3$*;*

(3) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \widehat{\rho}, e\rangle + 2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = \langle \widehat{\rho}, e\rangle + 3$*;*

(4) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство предыдущей с точностью до предложенной выше символьной замены.

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи и поддержку, без которой работа не была бы написана. Также автор признателен В. А. Матвееву за помощь с компьютерными вычислениями, которые существенно ускорили работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.

2. *Cox D. A., Little J. B., Schenk H. K.* Toric varieties. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. (Grad. Stud. Math.; V. 124).

3. *Altmann K., Hausen J.* Polyhedral divisors and algebraic torus actions // Math. Ann. 2006. V. 334, N 3. P. 557–607.

4. *Liendo A.* $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3653–3665.

5. *Liendo A.* Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations // Transform. Groups. 2010. V. 15, N 2. P. 389–425.

6. *Arzhantsev I., Liendo A.* Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties // Michigan Math. J. 2012. V. 61, N 4. P. 731–762.

7. *Матвеев Д. А.* Коммутирующие однородные локально нильпотентные дифференцирования // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 11. С. 103-128.

8. *Kraft H., Zaidenberg M.* Algebraically generated groups and their Lie algebras // J. London Math. Soc. 2024. V. 109, N 2. Paper no. e12866, 39 pp.

9. *Arzhantsev I., Makedonskii E., Petravchuk A.* Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one // Ukr. Math. J. 2011. V. 63. P. 827–832.

10. *Arzhantsev I., Liendo A., Stasyuk T.* Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions // J. Pure Appl. Algebra. 2021. V. 225, N 2. Paper no. 106499, 18 pp.

11. *Arzhantsev I., Zaidenberg M.* Tits-type alternative for groups acting on toric affine varieties // Intern. Math. Res. Notices IMRN 2022. 2022. N 11. P. 8162–8195.

12. *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application á l'étude de la variété des algébres de Lie nilpotentes // Bulletin de la S. M. F. 1970. V. 98. P. 81–116.

13. *Freudenburg G.* Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Berlin: Springer, 2017. (Encyclopaedia Math. Sci.; V. 136).

14. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли–3. М.: ВИНИТИ, 1990. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 41.

15. *Ceballos M., Valdés J., Tenorio A.* Representing filiform Lie algebras minimally and faithfully by strictly upper-triangular matrices // J. Algebra Appl. 2013. V. 12, N 4. 1250196.

Поступила в редакцию 14 января 2024 г.
После доработки 2 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Матвеев Дмитрий Александрович (ORCID 0000-0003-1272-0155)
Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»,
факультет компьютерных наук,
Покровский бульвар 11, Москва 109028;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
dmitry.a.matveev@yandex.ru