УДК 517.987.5+517.986.62+512.546.3

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ
ТЕОРЕМЕ ДЛЯ УНИТАРНЫХ
ДЕЙСТВИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП
КОМПАКТНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

А. Г. Качуровский,
И. В. Подвигин, В. Э. Тодиков

Аннотация. Получен спектральный (в терминах особенности спектральной меры в окрестности единичного характера) критерий скоростей сходимости в эргодической теореме для унитарных действий абелевых локально компактных групп компактного происхождения. Тем самым показано, что оценки этих скоростей, как и для ранее изученных классических эргодических теорем для действий групп Z и R , с необходимостью являются спектральными.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.309

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, абелевы группы компактного происхождения.

§ 1. Введение

1.1. Эргодические теоремы для действия групп. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, на котором действует группа G унитарными преобразованиями U_g , $g \in G$. Пусть ν — σ -конечная мера, определенная на некоторой σ -алгебре подмножеств G , и $\mathcal{I}$ — направленное множество индексов, нумерующих семейство $G_\alpha \subset G$, $\alpha \in \mathcal{I}$, такое, что $0 < \nu(G_\alpha) \leq \nu(G_\beta) < +\infty$ при $\alpha \leq \beta$ и $\lim_{\alpha \in \mathcal{I}} \nu(G_\alpha) = +\infty$. Для всякого вектора $f \in \mathcal{H}$ определим эргодические средние

$$A_\alpha f = \frac{1}{\nu(G_\alpha)} \int_{G_\alpha} U_g f \, d\nu(g), \quad \alpha \in \mathcal{I}.$$

Сходимость таких средних по норме в $\mathcal{H}$ есть утверждение статистической эргодической теоремы (см., например, [1]).

В дальнейшем будем считать, что G — локально компактная абелева группа (со второй аксиомой счетности), а мера $\nu = \mu_G$ есть мера Хаара на G (подробнее о существовании и свойствах меры Хаара см., например, в [2]).

1.2. Группы компактного происхождения. Напомним несколько определений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическая группа G называется *локально компактной*, если существует окрестность единицы, замыкание которой компактно.

Помимо компактных групп важный класс локально компактных групп представляют группы компактного происхождения (см. [3, § 20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологическая группа G имеет *компактное происхождение*, если существует такая окрестность V единицы, что ее замыкание $\overline{V}$ компактно и $\overline{V}$ порождает всю группу G , т. е. минимальная подгруппа группы G , содержащая $\overline{V}$, совпадает с G .

Из определения 2 следует, что если взять симметричную окрестность единицы $U = V \cup V^{-1}$ (ясно, что $\overline{U}$ компактно), то группу G можно представить в виде счетного объединения компактных множеств: $G = \bigcup_{n \geq 1} \overline{U}^n$.

Важный класс групп компактного происхождения представляют связные локально компактные группы, поскольку связная локально компактная топологическая группа порождается любой окрестностью единицы [3, § 22]. Отметим также, что всякая локально компактная группа со свойством Каждана (T) имеет компактное происхождение [4, § 1.3]. Общий вид абелевых групп компактного происхождения описан в следующей теореме (см. [3, § 39, теорема 51]).

Теорема 1. Пусть G — абелева группа компактного происхождения. Тогда

$$G \simeq \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus \mathbb{T}^{d_3} \oplus Z \oplus K, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\mathbb{R}^{d_1}$ — прямая сумма d_1 экземпляров группы вещественных чисел, $\mathbb{Z}^{d_2}$ — прямая сумма d_2 экземпляров группы целых чисел, $\mathbb{T}^{d_3}$ — группа d_3 -мерного тора, K — компактная группа, Z — конечная циклическая группа.

Поскольку группы Z и $\mathbb{T}^{d_3}$ компактны, можно представить абелеву группу G компактного происхождения как прямую сумму d_1 экземпляров вещественных чисел, d_2 экземпляров целых чисел и некоторой компактной группы, т. е.

$$G \simeq \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus K.$$

1.3. Характеры, спектральная мера и аннуляторы. Нам понадобится понятие двойственной группы и спектральной меры на ней. Напомним соответствующие определения (см., например, [3, 5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G — локально компактная абелева группа. Непрерывный гомоморфизм $\chi : G \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется *характером* группы G . Множество всех характеров образует коммутативную группу. Это группа называется *двойственной группой*, или *группой характеров* группы G и обозначается через $G^\wedge$.

Группа $G^\wedge$ становится локально компактной группой, если задать топологию на $G^\wedge$ через систему окрестностей нуля. Для начала введем систему окрестностей нуля группы $\mathbb{S}^1$. Для этого представим группу $\mathbb{S}^1$ как факторгруппу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и обозначим через $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ естественный гомоморфизм факторизации. Множество элементов группы $\mathbb{S}^1$ вида $\kappa(d)$, где $|d| < \frac{1}{3k}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим через Λ_k . Для $A \subset G$, $M \subset \mathbb{S}^1$ обозначим через $W(A, M)$ множество всех характеров $\chi \in G^\wedge$, удовлетворяющих условию $\chi(A) \subset M$. Совокупность множеств вида $W(F, \Lambda_k)$, где F компактно, образует полную систему окрестностей нуля группы $G^\wedge$. Примеры абелевых локально компактных групп и их групп характеров можно найти в [6, 7].

Помимо меры Хаара $\mu_{G^\wedge}$ на двойственной группе $G^\wedge$ можно определить еще одну борелевскую меру — спектральную меру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для группы унитарных операторов U_g , $g \in G$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и вектора $f \in \mathcal{H}$ спектральной мерой σ_f называется борелевская мера на $G^\wedge$, определяемая своим преобразованием Фурье:

$$(U_g f, f)_{\mathcal{H}} = \int_{G^\wedge} \chi(g) d\sigma_f(\chi).$$

Из определения видно, что $\sigma_f(G^\wedge) = \|f\|_{\mathcal{H}}^2$. Кроме того, для нормы эргодических средних справедлива формула

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{G^\wedge} \frac{1}{\mu_G(G_\alpha)^2} \left| \int_{G_\alpha} \chi(g) d\mu_G(g) \right|^2 d\sigma_f(\chi). \quad (1)$$

По критерию Блюма — Эйзенберга [8] сходимость таких средних будет иметь место тогда и только тогда, когда для любого $\chi \in G^\wedge$, $\chi \neq 1$,

$$\int_{G_\alpha} \chi(g) d\mu_G(g) \rightarrow 0.$$

При этом пределом будет Pf — проекция f на подпространство неподвижных векторов группы унитарных операторов U_g , $g \in G$. В дальнейшем будем считать, что предел равен 0. Этого всегда можно добиться, взяв $f - Pf$ вместо f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть G — локально компактная абелева группа. Для непустого множества $H \subset G$ аннулятором $\mathcal{A}(H, G^\wedge)$ называется множество в $G^\wedge$, состоящее из всех таких характеров χ , что $\chi(H) = 1$, т. е.

$$\mathcal{A}(H, G^\wedge) = \{\chi \in G^\wedge : \chi(H) = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что аннулятор $\mathcal{A}(H, G^\wedge)$ является подгруппой двойственной группы $G^\wedge$. Известно [6, теорема 3.4], что если в абелевой локально компактной группе G существует полная счетная система окрестностей нуля $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_m \supset \dots$, состоящая из подгрупп, то для любого характера $\chi \in G^\wedge$ найдется номер m такой, что $\chi \in \mathcal{A}(G_m, G^\wedge)$.

1.4. Скорости сходимости. Как доказано в [9, 10], степенная скорость сходимости в классической эргодической теореме фон Неймана равносильна степенной же, с тем же показателем степени, особенности спектральной меры в точке 0. Тем самым было показано, что скорости сходимости в эргодической теореме для действий групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ с необходимостью являются спектральными (эти скорости сейчас хорошо изучены, см. обзоры [9, 11], а также недавнюю работу [12] и библиографию в них).

В 1990-х гг. А. М. Вершиком и А. М. Степиным была поставлена задача переноса описанного выше результата из [9] с действия группы $\mathbb{Z}$ на группы $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ (и далее на максимально широкий класс групп). Тогда удалось получить оценки скоростей сходимости для действия локально конечных групп [13, 14]. Некоторые оценки скоростей сходимости классических эргодических средних для действий групп $\mathbb{Z}^d$ были получены тогда же в [15] и не так давно А. А. Темпельманом для групп $\mathbb{R}^d$ в [16]. Совсем недавно в [17–19] доказаны спектральные критерии степенной скорости сходимости таких средних для всех возможных показателей степени, полностью аналогичные известным критериям для действий $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

Наша цель — опираясь на результаты [19, 13] получить спектральный критерий скоростей сходимости эргодических средних для унитарных действий абелевых локально компактных групп компактного происхождения (теорема 3). На этот более широкий чем $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ естественный класс групп указал авторам А. А. Темпельман.

§ 2. Усреднения по подгруппам

В этом параграфе рассмотрим случай произвольной абелевой локально компактной группы, а усреднения ведутся по подгруппам.

Следующее предложение, по-видимому, хорошо известно специалистам по двойственным группам. Поскольку нам неизвестно точной ссылки, для полноты изложения приводим его с коротким доказательством.

Предложение 1. Пусть G — локально компактная абелева группа, $H \subset G$ — подгруппа G и $\chi \in G^\wedge$. Тогда

$$\int_H \chi(g) d\mu_G(g) = \mu_G(H) I_{\mathcal{A}(H, G^\wedge)}(\chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену в интеграле. Для произвольного элемента $g_0 \in H$, полагая $g = g'g_0$, получим

$$\int_H \chi(g) d\mu_G(g) = \int_{g_0^{-1}H} \chi(g'g_0) d\mu_G(g') = \chi(g_0) \int_H \chi(g') d\mu_G(g').$$

Отсюда следует равенство

$$(1 - \chi(g_0)) \int_H \chi(g) d\mu_G(g) = 0.$$

Если $\chi(g_0) = 1$ для всякого $g_0 \in H$, то, очевидно,

$$\int_H \chi(g) d\mu_G(g) = \int_H d\mu_G(g) = \mu_G(H).$$

Если же найдется $g_0 \in H$ такой, что $\chi(g_0) \neq 1$, то в силу полученного равенства будет $\int_H \chi(g) d\mu_G(g) = 0$. $\square$

Рассмотрим усреднение по подгруппам. Пусть $G_m \subset G_{m+1} \subset G$, $m \in \mathbb{N}$, — подгруппы локально компактной абелевой группы G такие, что $\mu_G(G_m) \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Из критерия Блюма — Эйзенберга для сходимости эргодических средних

$$A_m f = \frac{1}{\mu_G(G_m)} \int_{G_m} U_g f d\mu_G(g)$$

требуется, чтобы $\int_{G_m} \chi(g) d\mu_G(g) \rightarrow 0$ для $\chi \neq 1$. Из предложения 1, в свою очередь, следует, что для этого нужно, чтобы $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_{\mathcal{A}(G_m, G^\wedge)}(\chi) = 0$ при $\chi \neq 1$.

Нетрудно видеть, что последнее эквивалентно равенству $G = \bigcup_{m \geq 1} G_m$, поскольку в противном случае для собственной подгруппы $G' = \bigcup_{m \geq 1} G_m$ найдется нетривиальный характер $\chi \in \mathcal{A}(G', G^\wedge)$.

Следующая теорема является обобщением на локально компактные абелевы группы утверждения для локально конечных групп [13; 14, § 2].

Теорема 2. Пусть G — локально компактная абелева группа, $G_m \subset G_{m+1} \subset G$, $m \in \mathbb{N}$, — ее подгруппы такие, что $G = \bigcup_{m \geq 1} G_m$. Тогда справедливо равенство

$$\|A_m f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sigma_f(\mathcal{A}(G_m, G^\wedge)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулу (1) и предложение 1, получаем

$$\begin{aligned} \|A_m f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{G^\wedge} \frac{1}{\mu_G(G_m)^2} \left| \int_{G_m} \chi(g) d\mu_G(g) \right|^2 d\sigma_f(\chi) \\ &= \int_{G^\wedge} \frac{\mu_G(G_m)^2 I_{\mathcal{A}(G_m, G^\wedge)}(\chi)}{\mu_G(G_m)^2} d\sigma_f(\chi) = \sigma_f(\mathcal{A}(G_m, G^\wedge)). \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, из теоремы 2 видно, что скорость сходимости определяется асимптотикой спектральной меры в окрестности единичного характера. Простым следствием из этой теоремы является следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть спектральная мера σ_f абсолютно непрерывна (с плотностью ρ) относительно меры Хаара $\mu_{G^\wedge}$, т. е. для любого измеримого множества $E \subset G^\wedge$ справедливо равенство

$$\sigma_f(E) = \int_E d\sigma_f(\chi) = \int_E \rho(\chi) d\mu_{G^\wedge}(\chi).$$

Предположим, что плотность ρ непрерывна в единичном характере. Тогда справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_m f\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho(1)\mu_{G^\wedge}(\mathcal{A}(G_m, G^\wedge)) + o(\mu_{G^\wedge}(\mathcal{A}(G_m, G^\wedge))) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

§ 3. Усреднения для действия групп компактного происхождения

В этом параграфе приведен основной результат статьи — спектральный критерий скорости сходимости классических средних для действия абелевой локально компактной группы компактного происхождения. Напомним, что для такой группы по теореме 1 имеется изоморфное описание $G \simeq K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$.

3.1. Усреднения для действия компактных групп. Пусть $G = K$ — компактная абелева группа. Мера Хаара μ_K на ней конечна (а не σ -конечна), поэтому статистической эргодической теоремы (относительно меры μ_K) в этом случае нет, но можно привести аналог этого утверждения, который, по существу, является следствием абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Пусть $K_m \subset K$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — ненулевые (по мере μ_K) подмножества K такие, что $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K_0$ в метрике Фреше — Никодима, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_K(K_m \Delta K_0) = 0.$$

Тогда для $f \in \mathcal{H}$ при $m \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\mu_K(K_m)} \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k) \rightarrow \frac{1}{\mu_K(K_0)} \int_{K_0} U_k f d\mu_K(k).$$

Скорость сходимости в этом утверждении оценивается следующим образом.

Предложение 3. Для всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{1}{\mu_K(K_m)} \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k) - \frac{1}{\mu_K(K_0)} \int_{K_0} U_k f d\mu_K(k) \right\|_{\mathcal{H}} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{H}} \frac{\mu_K(K_m \Delta K_0)}{\mu_K(K_0)}.$$

Доказательство. Прибавляя и отнимая выражение $\frac{1}{\mu_K(K_0)} \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\mu_K(K_m)} \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k) - \frac{1}{\mu_K(K_0)} \int_{K_0} U_k f d\mu_K(k) \right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \left\| \frac{1}{\mu_K(K_0)} \left(\int_{K_0} U_k f d\mu_K(k) - \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\mu_K(K_0)} - \frac{1}{\mu_K(K_m)} \right) \int_{K_m} U_k f d\mu_K(k) \right\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq \frac{1}{\mu_K(K_0)} \int_{K_0 \Delta K_m} \|U_k f\|_{\mathcal{H}} d\mu_K(k) + \frac{|\mu_K(K_m) - \mu_K(K_0)|}{\mu_K(K_m)\mu_K(K_0)} \int_{K_m} \|U_k f\|_{\mathcal{H}} d\mu(k) \\ & \leq \frac{\mu_K(K_m \Delta K_0) \|f\|_{\mathcal{H}}}{\mu_K(K_0)} + \frac{\mu_K(K_m \Delta K_0) \|f\|_{\mathcal{H}}}{\mu_K(K_0)} = 2 \frac{\mu_K(K_m \Delta K_0)}{\mu_K(K_0)} \|f\|_{\mathcal{H}}. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Скорость сходимости в предложении 3 определяется скоростью сходимости к нулю величин $\mu_K(K_m \Delta K_0)$ и может быть сколь угодно быстрой. Этого можно добиться, переходя к сходящейся подпоследовательности K_{m_j} .

3.2. Нормы классических усреднений. Пусть $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$. Любой элемент $g \in G$ будем представлять в виде $g = (k, \vec{t}, \vec{n})$, где $k \in K$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $\vec{n} \in \mathbb{Z}^{d_2}$. Пусть $e \in K$ — нейтральный элемент.

Нетрудно видеть, что для группы U_g , $g \in G$, унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ справедливо представление

$$U_g = U_1^k U_2^{\vec{t}} U_3^{\vec{n}},$$

где $U_1^k = U_{(k,0,0)}$, $U_2^{\vec{t}} = U_{(e,\vec{t},0)}$ и $U_3^{\vec{n}} = U_{(e,0,\vec{n})}$. Для меры Хаара μ_G также имеем разложение

$$\mu_G = \mu_K \otimes \mu_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mu_{\mathbb{Z}^{d_2}} = \mu_K \otimes \mathcal{L}_{d_1} \otimes \#_{d_2},$$

где $\mathcal{L}_{d_1}$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\#_{d_2}$ — считающая мера в $\mathbb{Z}^{d_2}$.

Для индекса $\alpha = (m, \vec{t}, \vec{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^{d_1} \times \mathbb{N}^{d_2}$ положим

$$G_\alpha = K_m \times [0, \vec{t}] \times [0, \vec{n}] \subset G,$$

где $\mu_K(K_m \Delta K) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Будем писать $\alpha \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $m, t_1, \dots, t_{d_1}, n_1, \dots, n_{d_2} \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим эргодические средние для группы G по множествам G_α

$$\begin{aligned} A_\alpha f &= \frac{1}{\mu_G(G_\alpha)} \int_{G_\alpha} U_g f d\mu_G(g) \\ &= \frac{1}{\mu(K_m) t_1 \cdots t_{d_1} n_1 \cdots n_{d_2}} \int_{K_m} \int_{[0, \vec{t}]} \int_{[0, \vec{n}]} U_1^k U_2^{\vec{s}} U_3^{\vec{j}} f d\mu_K(k) d\vec{s} d\vec{j} = A_m A_{\vec{t}} A_{\vec{n}} f. \end{aligned}$$

Нам понадобится формула для нормы эргодических средних для прямой суммы групп.

Предложение 4. Пусть K, L — локально компактные абелевы группы, μ_K, μ_L — меры Хаара на K, L , K_n, L_m — усредняющие подмножества в K и L соответственно такие, что $0 < \mu_K(K_n) < \infty$ и $0 < \mu_L(L_m) < \infty$. Для эргодических средних

$$A_{(n,m)}f = \frac{1}{\mu_K(K_n)\mu_L(L_m)} \int_{K_n} \int_{L_m} U_1^k U_2^l f \, d\mu_K(k) \, d\mu_L(l)$$

справедлива формула

$$\|A_{(n,m)}f\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{\mu_K(K_n)^2 \mu_L(L_m)^2} \times \int_{K^\wedge \oplus L^\wedge} \left| \int_{K_n} \chi_K(k) \, d\mu_K(k) \right|^2 \left| \int_{L_m} \chi_L(l) \, d\mu_L(l) \right|^2 \, d\sigma_f(\chi_K, \chi_L).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой (1) для группы $G = K \oplus L$, используя представление $G^\wedge = K^\wedge \oplus L^\wedge$, причем каждый характер $\chi \in G^\wedge$ представляется как произведение характеров из $K^\wedge$ и $L^\wedge$, т. е. $\chi((k, l)) = \chi_K(k)\chi_L(l)$. $\square$

Применяя предложение 4 к группе $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$ и средним A_α , получаем

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}} \mathcal{F}_t^{d_1}(\vec{x}) \Phi_n^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi) \, d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}), \tag{2}$$

где использованы обозначения для многомерных ядер Фейера

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{d_1}(\vec{x}) &= \frac{1}{t_1^2 \dots t_{d_1}^2} \left| \int_{[0, \vec{t}]} e^{i(\vec{s}, \vec{x})} \, d\vec{s} \right|^2 = \prod_{i=1}^{d_1} \left(\frac{\sin \frac{t_i x_i}{2}}{\frac{t_i x_i}{2}} \right)^2 = \prod_{i=1}^{d_1} \text{sinc}^2 \left(\frac{t_i x_i}{2} \right), \\ \Phi_n^{d_2}(\vec{y}) &= \frac{1}{n_1^2 \dots n_{d_2}^2} \left| \sum_{\vec{j} \in [0, \vec{n}]} e^{i(\vec{j}, \vec{y})} \right|^2 = \prod_{i=1}^{d_2} \left(\frac{\sin \frac{n_i y_i}{2}}{n_i \sin \frac{y_i}{2}} \right)^2, \\ F_m(\chi) &= \frac{1}{\mu(K_m)^2} \left| \int_{K_m} \chi_K(g) \, d\mu(g) \right|^2. \end{aligned}$$

Это следует из того, что $G^\wedge \simeq K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}$ (мы отождествляем $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1 = (-\pi, \pi]$); характер для группы $\mathbb{R}^{d_1}$ выглядит как $\chi_{\mathbb{R}^{d_1}}(\vec{x}) = e^{i(\vec{x}, \vec{s})}$, $\vec{s} \in \mathbb{R}^{d_1}$, а характер для группы $\mathbb{Z}^{d_2}$ имеет вид $\chi_{\mathbb{Z}^{d_2}}(\vec{j}) = e^{i(\vec{y}, \vec{j})}$, $\vec{y} \in (-\pi, \pi]^{d_2}$.

3.3. Основной результат. Обозначим через $\Pi_d(\vec{\delta})$ параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с ребрами $\vec{\delta} > 0$, т. е.

$$\Pi_d(\vec{\delta}) = (-\delta_1, \delta_1] \times \dots \times (-\delta_d, \delta_d].$$

Для любого вектора $\vec{v} > 0$ и $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\vec{v}^{\vec{\beta}} = v_1^{\beta_1} \dots v_d^{\beta_d}, \quad \vec{v}^{-1} = (1/v_1, \dots, 1/v_d).$$

Пусть $\phi(\alpha) = \phi(m, \vec{t}, \vec{n})$ — произвольная вещественнозначная неотрицательная функция.

Лемма 1. Если $\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{O}(\phi(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. существует константа $B > 0$ такая, что для всех $\vec{t}, \vec{n}, m > 0$ выполняется

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\phi(m, \vec{t}, \vec{n}),$$

то найдется константа $D = D(d_1 + d_2) > 0$ такая, что для спектральной меры σ_f имеет место неравенство

$$\sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{t}^{-1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{n}^{-1})) \leq BD\phi(m, \vec{t}, \vec{n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$1/D = (2 \sin(1/2))^{d_1+d_2} = \min_{\vec{x} \in \Pi_{d_1}(\vec{t}^{-1})} \mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \min_{\vec{y} \in \Pi_{d_2}(\vec{n}^{-1})} \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}).$$

Учитывая, что $F_m(\chi) = 1$ для $\chi \in \mathcal{A}(K_m, K^\wedge)$, получаем

$$\begin{aligned} B\phi(m, \vec{t}, \vec{n}) &\geq \|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}} \mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi) d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &\geq \int_{\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi(\vec{t}^{-1}) \times \Pi(\vec{n}^{-1})} \mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi) d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &\geq D^{-1} \int_{\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi(\vec{t}^{-1}) \times \Pi(\vec{n}^{-1})} F_m(\chi) d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &= D^{-1} \sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{t}^{-1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{n}^{-1})). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующий критерий является основным результатом работы. Здесь мы предполагаем, что $K_m \subset K_{m+1}$ — подгруппы компактной группы K , $\bigcup_{m \geq 1} K_m = K$, и $\mu_K(K_m) > 0$.

Теорема 3. Пусть $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$, $\vec{\alpha} \in [0, 2)^{d_1}$, $\vec{\beta} \in [0, 2)^{d_2}$, $f \in \mathcal{H}$ и функция ψ такова, что $\psi(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

1. Если найдется константа $C > 0$ такая, что для всех $\vec{\delta}_1 \geq 0$, $\vec{\delta}_2 \in [0, \pi)^{d_2}$, $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{\delta}_1) \times \Pi_{d_2}(\vec{\delta}_2)) \leq C \vec{\delta}_1^{\vec{\alpha}} \vec{\delta}_2^{\vec{\beta}} \frac{1}{\psi(m)},$$

то найдется константа $B = B(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, C) > 0$ такая, что для всех $\vec{t} > 0$, $\vec{n} \geq 1$, $m \geq 1$

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{B}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m)}.$$

2. Если найдется константа $B > 0$ такая, что для всех $\vec{t} > 0$, $\vec{n} \geq 1$, $m \geq 1$

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{B}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m)},$$

то найдется константа $C = C(d_1 + d_2, B) > 0$ такая, что при всех $\vec{\delta}_1 \geq 0$, $\vec{\delta}_2 \in [0, \pi)$, $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{\delta}_1) \times \Pi_{d_2}(\vec{\delta}_2)) \leq C \vec{\delta}_1^{\vec{\alpha}} \vec{\delta}_2^{\vec{\beta}} \frac{1}{\psi(m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Воспользуемся формулой (2), записывая интеграл по мере σ_f через интеграл от функции распределения по классической мере Лебега. Учитывая предложение 1 и представление $\mathbb{S}^1$ в виде полуинтервала $(-\pi, \pi]$, получаем

$$\begin{aligned} \|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int_{K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}} \mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi) d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int_0^1 u \sigma_f \{ (\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \in K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2} : |\mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi)| > u \} du \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int_0^1 u \sigma_f (\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times (-\pi, \pi]^{d_2} : |\mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y})| > u\}) du. \end{aligned}$$

Можно считать, что мера σ_f определена на $K^\wedge \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, а носителем является множество $K^\wedge \times \mathbb{R}^{d_1} \times (-\pi, \pi]^{d_2}$. Тогда неравенство переписется в виде

$$\begin{aligned} \|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \\ &\times \int_0^1 u \sigma_f (\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : |\mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y})| > u\}) du. \end{aligned}$$

Далее проведем доказательство, следуя работе [19]. Обозначая через $\varphi_{\vec{t}, \vec{n}}$ гомотетию

$$\varphi_{\vec{t}, \vec{n}} = \frac{1}{2}(t_1 x_1, \dots, t_{d_1} x_{d_1}, n_1 y_1, \dots, n_{d_2} y_{d_2})$$

и полагая

$$\mathcal{S}_u^{d_1, d_2} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : |\mathcal{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \mathcal{F}_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y})| > u\}, \quad u \in (0, 1),$$

получим

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}),$$

где

$$I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}) = \int_0^1 u \sigma_f (\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \mathcal{S}_u^{d_1, d_2}) du. \quad (3)$$

Множество $\mathcal{S}_u^{d_1, d_2}$ можно накрыть крестообразным множеством $E_u^{d_1+d_2}$, т. е. $\mathcal{S}_u^{d_1, d_2} \subset E_u^d$, $d = d_1 + d_2$, где для $u \in (0, 1)$

$$E_u^d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}| < \frac{1}{u}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d \right\}.$$

Далее воспользуемся следующим утверждением из [19] о том, что множество E_u^d можно вложить в подходящее объединение параллелепипедов.

Предложение 5. Пусть $\varepsilon > 1$. Тогда для любого $u \in (0, 1)$ и для любой перестановки $\tau \in S_d$

$$E_u^d \subset \bigcup_{j_1=1}^k \bigcup_{j_2=1}^{j_1} \cdots \bigcup_{j_{d-1}=1}^{j_{d-2}} \Pi_d^\tau \left(\varepsilon^{j_{d-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-2}}}{\varepsilon^{j_{d-1}-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-3}}}{\varepsilon^{j_{d-2}-1}}, \dots, \frac{\varepsilon^{j_1}}{\varepsilon^{j_2-1}}, \frac{1}{u \varepsilon^{j_1-1}} \right),$$

где $k = k(u) = \lceil \frac{\ln(1/u)}{\ln \varepsilon} \rceil$, и $\Pi_d^\tau(\delta_1, \dots, \delta_d) = \Pi_d(\delta_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \delta_{\tau^{-1}(d)})$.

Из этого предложения немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \mathcal{S}_u^{d_1, d_2} \subset \bigcup_{j_1=1}^k \bigcup_{j_2=1}^{j_1} \dots \bigcup_{j_{d-1}=1}^{j_{d-2}} \mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \\ \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \Pi_d^\tau \left(\varepsilon^{j_{d-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-2}}}{\varepsilon^{j_{d-1}-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-3}}}{\varepsilon^{j_{d-2}-1}}, \dots, \frac{\varepsilon^{j_1}}{\varepsilon^{j_2-1}}, \frac{1}{u \varepsilon^{j_1-1}} \right). \end{aligned}$$

Для $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in [0, 2)^d$ обозначим через $\vec{\gamma}^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_d^*)$ перестановку по возрастанию координат $\vec{\gamma}$, т. е. $\gamma_1^* \leq \gamma_2^* \leq \dots \leq \gamma_d^*$. Среди последовательных разностей $\gamma_k^* - \gamma_{k+1}^*$ для $1 \leq k \leq d-1$ пусть $r = r(\vec{\gamma})$ — число нулевых разностей. Если $r < d-1$, то обозначим через Γ_k , $1 \leq k \leq d-1-r$, ненулевые значения среди этих разностей. Наконец, пусть

$$\begin{aligned} M = M(\vec{\gamma}) &= \max_{1 \leq k \leq d} \gamma_k = \gamma_d^*, \\ \sigma = \sigma(\vec{\gamma}) &= \begin{cases} e^{\gamma_2^* + \dots + \gamma_d^*}, & \text{если } r = d-1, \\ \frac{e^{\gamma_1^* + \dots + \gamma_{d-1}^*}}{(1-e^{\Gamma_1}) \dots (1-e^{\Gamma_{d-1-r}})}, & \text{если } r < d-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Продельвая такие же выкладки, как в предложении 2 в [19], получаем оценку

$$\sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \mathcal{S}_u^{d_1, d_2}) \leq 2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} C \sigma \frac{(\ln(1/u) + 1)^r}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m) u^M}.$$

Учитывая эту оценку, для интеграла (3) получаем неравенство для любого $\delta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}) &= \int_0^\delta u \sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \mathcal{S}_u^{d_1, d_2}) du \\ &\quad + \int_\delta^1 u \sigma_f(\mathcal{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi_{\vec{t}, \vec{n}}^{-1} \mathcal{S}_u^{d_1, d_2}) du \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} C \sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m)} \int_\delta^1 u^{1-M} (\ln(1/u) + 1)^r du. \end{aligned}$$

Подстановка $u = e^{-v}$ дает оценку

$$I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}) \leq \frac{\delta^2}{2} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} C \sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m)} \int_0^{\ln(1/\delta)} (1+v)^r e^{-(2-M)v} dv.$$

Поскольку $0 \leq M < 2$, полагая $\delta = 0$, получим

$$\|A_\alpha f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}) \leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \frac{2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} C \sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}} \vec{n}^{\vec{\beta}} \psi(m)} \int_0^{+\infty} (1+v)^r e^{-(2-M)v} dv$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} 2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} \frac{C\sigma}{\vec{t}^\alpha \vec{n}^\beta \psi(m)} \sum_{k=0}^r C_r^k \int_0^\infty v^k e^{-(2-M)v} dv = \frac{B}{\vec{t}^\alpha \vec{n}^\beta \psi(m)},$$

где

$$B = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} 2^{\gamma_1 + \dots + \gamma_d} C\sigma \sum_{k=0}^r C_r^k \frac{k!}{(2-M)^{k+1}}.$$

2. Доказательство второй части теоремы немедленно следует из леммы 1, где в качестве функции $\phi(m, \vec{t}, \vec{n})$ берем $\phi(m, \vec{t}, \vec{n}) = \frac{1}{\vec{t}^\alpha \vec{n}^\beta \psi(m)}$. Теорема доказана. $\square$

3.4. Случай изоморфизма групп. Пусть теперь G — произвольная абелева группа компактного происхождения, т. е. $G \simeq K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$. Покажем, для каких усреднений группы G можно получить оценки скорости сходимости из теоремы 3.

Приведем рассуждения в общем виде. Пусть G и H — изоморфные локально компактные абелевы группы и $\theta: H \rightarrow G$ — изоморфизм групп. Предположим, что для группы H определены эргодические средние

$$A_\alpha^{U, H} f = \frac{1}{\mu_H(H_\alpha)} \int_{H_\alpha} U_h f d\mu_H(h), \quad \alpha \in \mathcal{I},$$

для которых имеется оценка скорости сходимости.

Нетрудно видеть, что для мер Хаара имеется равенство $\mu_G(g) = c\mu_H(\theta^{-1}(g))$ для некоторой константы $c > 0$. Положим $G_\alpha = \theta(H_\alpha)$ и $\mathcal{U}_g = U_{\theta^{-1}g}$. Делая замену переменных с помощью изоморфизма θ , получаем

$$\begin{aligned} A_\alpha^{U, H} f &= \frac{1}{\mu_H(H_\alpha)} \int_{H_\alpha} U_h f d\mu_H(h) = \frac{1}{\mu_G(\theta(H_\alpha))} \int_{H_\alpha} U_h f d\mu_G(\theta h) \\ &= \frac{1}{\mu_G(\theta(H_\alpha))} \int_{\theta(H_\alpha)} U_{\theta^{-1}g} f d\mu_G(g) = A_\alpha^{\mathcal{U}, G} f. \end{aligned}$$

Таким образом, для средних $A_\alpha^{\mathcal{U}, G}$ получается такая же оценка скорости сходимости, как для $A_\alpha^{U, H} f$. Отметим также, что любая унитарная группа $\mathcal{U}_g$, $g \in G$, представляется как $\mathcal{U}_g = U_{\theta^{-1}g}$ для некоторой унитарной группы U_h , $h \in H$.

В качестве примера возьмем группу вещественных чисел по сложению $H = (\mathbb{R}, +)$ и группу положительных вещественных чисел со стандартной операцией умножения $G = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \times)$. Нетрудно убедиться, что эти группы изоморфны с изоморфизмом $\theta(x) = \exp(x)$. Мера Хаара $d\mu_G(u) = cd(\ln u) = c \frac{du}{u}$. Далее, возьмем классические эргодические средние для группы $\mathbb{R}$

$$A_t f = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t U_s f ds,$$

для которых известен спектральный критерий скорости сходимости. Тогда для эргодических средних

$$A_t f = \frac{1}{2t} \int_{e^{-t}}^{e^t} \mathcal{U}_u f \frac{du}{u}$$

справедлив такой же критерий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tempelman A.* Ergodic theorems for group actions. Informational and thermodynamical aspects. Dordrech: Springer-Verl., 1992.
2. *Нерётин Ю. А.* Топологические группы и инвариантные меры. 2015. arxiv.org/pdf/1510.03082.
3. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
4. *Bekka B., de la Harpe P., Valette A.* Kazhdan's property (T). Cambridge: Camb. Univ. Press, 2008.
5. *Folland G. B.* A course in abstract harmonic analysis. Boca Raton: CRC Press, 1995.
6. *Агаев Г. Н., Виленкин В. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Издательство ЭЛМ, 1981.
7. *Водолазов А. М., Скопина М. А.* Обобщенные группы Виленкина // *Мат. заметки.* 2024. Т. 116, № 4. С. 489–503.
8. *Blum J., Eisenberg B.,* Generalized summing sequences and the mean ergodic theorem // *Proc. Am. Math. Soc.* 1974. V. 42. P. 423–429.
9. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // *Успехи мат. наук.* 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
10. *Качуровский А. Г., Решетенко А. В.* О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // *Мат. сб.* 2010. Т. 201, № 4. С. 25–32.
11. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 2016. Т. 77. С. 1–66.
12. *Aloisio M., Carvalho S. L., Oliveira S. R., Souza E.* On spectral measures and convergence rate in von Neumann's ergodic theorem // *Monatsh. Math.* 2024. V. 203. P. 543–562.
13. *Вершик А. М., Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп и обращенные мартингалы // *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* 1999. № 1. С. 19–26.
14. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // *Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* 2007. Т. 256. С. 182–186.
15. *Качуровский А. Г.* О сходимости средних в эргодической теореме для групп $\mathbb{Z}^d$ // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* 1999. Т. 256. С. 121–128.
16. *Tempelman A.* Randomized consistent statistical inference for random processes and fields // *Stat. Inference Stoch. Process.* 2022. V. 25. P. 599–627.
17. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э., Хакимбаев А. Ж.* Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий // *Сиб. мат. журн.* 2024. Т. 65, № 1. С. 92–114.
18. *Подвигин И. В.* О степенной скорости сходимости в эргодической теореме Винера // *Алгебра и анализ.* 2023. Т. 35, № 6. С. 159–168.
19. *Подвигин И. В.* Критерий степенной скорости сходимости эргодических средних для унитарных действий групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ // *Алгебра и Анализ.* 2024. Т. 36, № 4. С. 148–164.

Поступила в редакцию 30 декабря 2024 г.

После доработки 30 декабря 2024 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Качуровский Александр Григорьевич (ORCID 0000-0002-2747-2660),
Подвигин Иван Викторович, Тодиков Владислав Эдуардович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`agk@math.nsc.ru`, `ipodvigin@math.nsc.ru`, `v.todikov@math.nsc.ru`