

ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ГРУППАХ КАРНО И КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

Аннотация. Известно, что предел последовательности квазиконформных отображений, т. е. гомеоморфизмов с ограниченным искажением, коэффициенты искажения которых ограничены в совокупности, является либо квазиконформным, либо постоянным отображением. В настоящей работе в случае групп Карно типа Гейзенберга установлено, что аналогичное свойство справедливо для некоторого класса сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов с конечным искажением и интегрируемой в подходящей степени функцией искажения. Данный результат применяется для поиска взаимно однозначных решений вариационных задач, аналогичных задачам нелинейной теории упругости, в нерегулярных областях.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.308

Ключевые слова: квазиконформный анализ, конечное искажение, функция искажения, оператор композиции, нелинейная упругость, поливыпуклая функция.

Введение

Некоторые задачи нелинейной теории упругости, например, для гиперупругих материалов, сводятся к задаче минимизации интегрального функционала, называемого функционалом полной энергии [1]. В этой ситуации, в отличие от случая линейной теории упругости, подынтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов решения вариационных задач. Тем не менее существует заложенный Дж. Боллом математический подход, в рамках которого можно исследовать функционалы полной энергии, моделируя при этом достаточно широкий класс прикладных задач [2; 3, § 7.4–7.7].

В работе [4] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-е гг. прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка, см. [5]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

Работа С. К. Водопьянова подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект No FWNF-2022-0006). Работа С. В. Павлова выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации No 075-15-2022-282.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ обладает *ограниченным искажением*, если с некоторой постоянной $K \geq 1$ неравенство

$$|Df(x)|^n \leq K \det Df(x)$$

выполняется для п. вс. $x \in \Omega$. Наименьшая из таких констант K называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается символом $K(f)$. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *квазиконформным*, если f — гомеоморфизм с ограниченным искажением.

Ю. Г. Решетняк установил [5, гл. II, § 9.2], что если последовательность $\{f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ отображений с ограниченным искажением, коэффициенты искажения членов которой ограничены в совокупности, $\sup_k K(f_k) < \infty$, сходится к отображению f_0 в $L_{n,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то f_0 также является отображением с ограниченным искажением и

$$K(f_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} K(f_k).$$

Аналогичный результат для отображений с ограниченным искажением в произвольных группах Карно получен в [6]. Отсюда вытекает, что если поточечный предел последовательности квазиконформных отображений с ограниченными коэффициентами искажения непостоянен, то он — квазиконформное отображение (см. также [7, § 37]).

В настоящей работе в случае групп Карно H -типа установлена справедливость обобщенного утверждения для гомеоморфизмов с интегрируемым искажением. А именно, пусть $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{H}\}$ — последовательность гомеоморфизмов, каждый из которых обладает *конечным искажением*, и пусть последовательность *функций искажения* $\{K_\nu(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\Omega)$, $\sigma > \nu(\nu - 1)$. Если $\{\varphi_k\}$ сходится к непостоянному отображению φ_0 в $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, то φ_0 — гомеоморфизм с конечным искажением и

$$\|K_\nu(\cdot, \varphi_0) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|K_\nu(\cdot, \varphi_k) \mid L_\sigma(\Omega)\|.$$

Данный результат является одним из основных для решения вариационных задач на группах Карно, подобных задачам нелинейной теории упругости [8, 9].

Многие применяемые в настоящей работе ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно H -типа получены в недавних работах [10–13]. Обобщения работы [12] на случай произвольных групп Карно пока неизвестны.

1. Предварительные сведения

1.1. Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной градуированной нильпотентной группой* или *группой Карно* (см., например, [14, гл. 1]) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ подпространств $\mathfrak{g}_i$, связанных условиями $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа Карно $\mathbb{G}$ называется *двухступенчатой*, если $m = 2$.

Фиксируем скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ называется *горизонтальным пространством* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальными векторными полями*. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Для удобства также обозначим $n = n_1$. Фиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение

$g = \exp\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij}\right)(e)$ (где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{G}$ [14, предложение 1.2], можно отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ , заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \rightarrow [0; +\infty)$ класса $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ такая, что

(а) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(б) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda \rho(x)$.

Из определения также следует [14, предложение 1.6]:

(с) существует число $c > 0$ такое, что $\rho(xy) \leq c(\rho(x) + \rho(y))$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$ (обобщенное неравенство треугольника);

(д) любые две однородные нормы эквивалентны, т. е. для любых двух однородных норм ρ_1, ρ_2 найдутся числа $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ такие, что $\alpha \rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq \beta \rho_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{G}$.

ПРИМЕР. Для точки $x = (x_{ij}) \in \mathbb{G}$ и индекса $i = 1, \dots, m$ определим $X^{(i)} \in \mathfrak{g}_i$ как $\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij}$. Равенством

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^m |X^{(i)}|^{2m!/i} \right)^{\frac{1}{2m!}},$$

в котором $|X^{(i)}|$ — евклидова норма в $\mathfrak{g}_i$, задается однородная норма $\rho : \mathbb{G} \rightarrow [0; +\infty)$.

Абсолютно непрерывная в римановой метрике кривая $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$ для п. вс. t . Расстоянием Карно — Каратеодори $d_{cc}(x, y)$ между точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется точная нижняя грань длин $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ горизонтальных кривых с концевыми точками x и y . Согласно теореме Рашевского — Чоу (см., например, [15, §0.4, 1.1]) любые две точки можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины. Метрика d_{cc} и однородная норма ρ эквивалентны: существуют положительные постоянные α и β такие, что

$$\alpha d_{cc}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta d_{cc}(x, y),$$

где $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x)$.

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — это биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum_{i=1}^m i n_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Мера нормирована так, чтобы ее значение на единичном шаре $B(0, 1)$ равнялось единице, $|B(0, 1)| = 1$. Здесь $B(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid d_{cc}(x, y) < r\}$ — шар в метрике Карно — Каратеодори.

Группа Карно $\mathbb{H}$ называется *группой Карно H -типа*, если она является двухступенчатой и ее алгебра Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ может быть снабжена скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ таким, что $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$ и для каждого поля $Z \in \mathfrak{h}_2$, $|Z| = 1$, линейное отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$, определенное соотношением

$$\langle J_Z(X), Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{h}_1,$$

ортогональное.

Для удобства мы обозначаем группу Карно H -типа символом $\mathbb{H}$, а символ $\mathbb{G}$ используем в остальных случаях.

ПРИМЕР. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$ с групповой операцией

$$(x, y, z) * (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{2} \right),$$

$$x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k, \quad z, z' \in \mathbb{R},$$

— классический пример неабелевой группы Карно. Ее алгебра Ли $\mathfrak{h}^k = \mathfrak{h}_1^k \oplus \mathfrak{h}_2^k$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, k, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^k = \text{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \dots, k\}$, $\mathfrak{h}_2^k = \text{span}\{Z\}$, а нетривиальными скобками Ли являются лишь $[X_i, Y_i] = Z$, $i = 1, \dots, k$. Однородная размерность $\mathbb{H}^k$ равна $\nu = 2k + 2$. Если скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ таково, что векторные поля $X_i, Y_i, i = 1, \dots, k, Z$ образуют ортонормированную систему, то отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1^k \rightarrow \mathfrak{h}_1^k$ определяется соотношениями $J_Z(X_i) = Y_i$, $J_Z(Y_i) = -X_i$ и, очевидно, является ортогональным.

1.2. Отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область (непустое связное открытое множество в $\mathbb{G}$). Пространство $L_p(\Omega)$, $p \in [1; \infty)$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемых в степени p . Норма на $L_p(\Omega)$ определяется как

$$\|u \mid L_p(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $L_{\infty}(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Норма на $L_{\infty}(\Omega)$ определяется как величина

$$\|u \mid L_{\infty}(\Omega)\| = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

где $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ — существенный супремум функции u на Ω . Функция u принадлежит $L_{p, \text{loc}}(\Omega)$, $p \in [1; \infty]$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Обозначим базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$ символами $X_1 = X_{11}, \dots, X_n = X_{1n}$. Пусть Π_j — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{G} \mid x_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$, где $x_j = x_{1j}$ — горизонтальные координаты точки $x = (x_{ij})$. Мера $d\mu_j = \iota(X_j) dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M абсолютно непрерывно на n -вс. линиях, $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; M)$, если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого $j = 1, \dots, n$ оно было абсолютно непрерывным на интегральной линии $\{\exp(tX_j)(y) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega$ векторного поля X_j для μ_j -п. вс. $y \in \Pi_j$. Полагаем $\text{ACL}(\Omega) = \text{ACL}(\Omega; \mathbb{R})$.

Пространство $L_p^1(\Omega)$, $p \in [1; \infty]$, состоит из функций $u \in L_{1, \text{loc}}(\Omega) \cap \text{ACL}(\Omega)$ таких, что классические производные¹⁾ $X_j u$, $j = 1, \dots, n$, принадлежат $L_p(\Omega)$.

¹⁾Точнее, производные абсолютно непрерывного на почти всех интегральных линиях полей $X_1, \dots, X_n$ представителя функции u . Классические производные указанного представителя в направлениях полей X_j существуют п. вс.

Полунорма функции $u \in L_p^1(\Omega)$ равна $\|u\|_{L_p^1(\Omega)} = \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$, где $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u) = \sum_{j=1}^n (X_j u) X_j$ — *горизонтальный градиент* u . Далее вместо $\|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$ будем писать $\|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$.

Эквивалентное определение пространства $L_p^1(\Omega)$ основано на понятии обобщенной производной в смысле Соболева: локально суммируемая функция $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ *вдоль векторного поля* X_j , $j = 1, \dots, n$, если

$$\int_{\Omega} u_j(x) \theta(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) X_j \theta(x) dx$$

для любой тестовой функции $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Локально суммируемая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $L_p^1(\Omega)$ в том и только том случае, когда существуют ее обобщенные производные $u_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Более того, $u_j = X_j u$ п. вс., где $X_j u$ — классические производные функции $u \in \text{ACL}(\Omega)$.

Пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ и снабжено нормой

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p^1(\Omega)}.$$

Пусть $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j \varphi(x) \in \tilde{\mathfrak{g}}_1(\varphi(x))$ для п. вс. $x \in \Omega$ [16, предложение 4.1]. Матрица $D_h \varphi(x) = (X_i \varphi_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \tilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h \varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_1$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ . Известно [17, теорема 1.2], что для п. вс. $x \in \Omega$ линейный оператор $D_h \varphi(x)$ определен и может быть продолжен до гомоморфизма алгебр Ли $\hat{D} \varphi(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\hat{D} \varphi(x) : T_x \mathbb{G} \rightarrow T_{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$|D_h \varphi(x)| \leq |\hat{D} \varphi(x)| \leq C |D_h \varphi(x)|,$$

где C зависит только от структуры групп. Здесь норма оператора $\hat{D} \varphi(x)$ определяется как

$$\sup\{\tilde{\rho}(\hat{D} \varphi(x)(X)) \mid X \in \mathfrak{g}, \rho(X) \leq 1\},$$

где ρ и $\tilde{\rho}$ — однородные нормы на $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ соответственно, и кратко обозначено $\rho(X) = \rho(\exp(X))$, $\tilde{\rho}(\tilde{X}) = \tilde{\rho}(\exp(\tilde{X}))$, $X \in \mathfrak{g}$, $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Гомоморфизму $\hat{D} \varphi(x)$ также соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathcal{D}} \varphi(x) = \exp \circ \hat{D} \varphi(x) \circ \exp^{-1}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Класс отображений Соболева* $W_p^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, $p \in [1, \infty]$, состоит из измеримых отображений $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, для которых величина

$$\|\varphi\|_{W_p^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})} = \|\rho \circ \varphi\|_{L_p(\Omega)} + \| |D_h \varphi| \|_{L_p(\Omega)}$$

конечна. Отображение φ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \tilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$. Далее пишем $\|D_h \varphi\|_{L_p(\Omega)}$ вместо $\| |D_h \varphi| \|_{L_p(\Omega)}$.

Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [17, предложение 4.2]. Заметим, что если отображение $\varphi \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$

локально ограниченное, то все координатные функции φ_i , $i = 1, \dots, \tilde{N}$, принадлежат $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$.

Отображение φ класса $\text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$ называется отображением с *конечным искажением*, если $D_h \varphi = 0$ п. в.с. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$. Внешняя функция искажения $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, определяется по правилу

$$K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D_h \varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $1 \leq q \leq p < \infty$ обозначим интегральную норму функции искажения как

$$K_{q,p}(\varphi, \Omega) = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|,$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

Пространство $\text{Lip}(\Omega)$ состоит из липшицевых в метрике Карно — Каратеодори функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, а пространство $\text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)$ — из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике Карно — Каратеодори на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

Теорема [18, теорема 2; 19, теорема 2]. Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ областей в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$;
- 2) φ имеет конечное искажение;
- 3) $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

При этом норма $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $K_{q,p}(\varphi, \Omega)$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{p,q} > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha_{p,q} K_{q,p}(\varphi, \Omega) \leq \|\varphi^*\| \leq K_{q,p}(\varphi, \Omega).$$

Предложение 1.1 [17, теорема 5.3]. Пусть U — открытое множество в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{G}$ — отображение класса $\text{ACL}(U; \mathbb{G})$. Тогда существует множество меры нуль $\Sigma_\varphi \subset U$ такое, что $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{G}$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина.

Более того, для всякой неотрицательной измеримой функции $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо следующее:

- (1) функции $U \ni x \mapsto u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)|$ и $\mathbb{G} \ni y \mapsto \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ измеримые;
- (2) верно равенство

$$\int_U u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{G}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x) dy; \quad (1.1)$$

- (3) если функция $U \ni x \mapsto u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)|$ интегрируемая, то и функция в правой части (1.1) интегрируемая и верна формула (1.1).

2. Основной результат

Следующий результат анонсирован в работе [20].

Теорема 2.1. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — область и $q \in (\nu - 1; \nu]$. Пусть последовательность отображений $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{H}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) каждое отображение φ_k — гомеоморфизм;
 - 2) $\varphi_k \in W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$, $k \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{|D_h \varphi_k|\}$ ограничена в $L_\nu(\Omega)$;
 - 3) каждый φ_k обладает конечным искажением, и последовательность $\{K_\nu(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}$ ($\sigma = \infty$ при $q = \nu$);
 - 4) $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$ п. вс. в Ω .
- Если $\{\varphi_k\}$ сходится²⁾ к непостоянному отображению φ_0 в $L_{1, \text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, то:
- (a) φ_0 — гомеоморфизм;
 - (b) φ_0 принадлежит классу Соболева $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$ и выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} |D_h \varphi_0(x)|^\nu dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D_h \varphi_k(x)|^\nu dx;$$

- (c) φ_0 обладает конечным искажением, $K_\nu(\cdot, \varphi_0) \in L_\sigma(\Omega)$ и

$$K_{q, \nu}(\varphi_0, \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} K_{q, \nu}(\varphi_k, \Omega);$$

- (d) $\det \widehat{D}\varphi_0 \geq 0$ п. вс. в Ω .

Следствие 2.1. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — область, $q \in (\nu - 1; \nu]$, и C_1, C_2 — положительные постоянные. Тогда класс отображений

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{H} \mid \varphi \in W_\nu^1(\Omega; \mathbb{H}), \|D_h \varphi\|_{L_\nu(\Omega)} \leq C_1, \\ \varphi \text{ — гомеоморфизм с конечным искажением,} \\ K_{q, \nu}(\varphi, \Omega) \leq C_2, \det \widehat{D}\varphi \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega \} \end{aligned}$$

замкнут в следующем смысле: если последовательность $\{\varphi_k \in \mathcal{A}\}$ сходится к непостоянному отображению φ_0 в $L_{1, \text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, то $\varphi_0 \in \mathcal{A}$.

3. Доказательство теоремы 2.1

Наиболее существенная часть вопроса состоит в доказательстве того, что φ_0 — гомеоморфизм. Множества

$$B_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid \rho(y^{-1}x) < r\}, \quad S_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid \rho(y^{-1}x) = r\}$$

суть открытый шар и сфера соответственно. В следующем предложении ρ — произвольная однородная норма. Далее $\rho(x, \partial\Omega) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in \partial\Omega\}$.

Предложение 3.1 [21, предложение 4.1]. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — область, а $\varphi \in W_\nu^1(\Omega; \mathbb{H})$ — гомеоморфизм.

²⁾Т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi_0(x)) dx = 0$ для каждого компакта $K \Subset \Omega$.

Тогда для точек $x, y \in \Omega$, $y \in B_\rho(x, r)$, $r < r_0/2$, $r_0 = \frac{1}{13c}\rho(x, \partial\Omega)$, выполняется соотношение

$$d_{cc}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C_1 \left(\ln \frac{r_0}{r} \right)^{-\frac{1}{\nu}} \left(\int_{B_\rho(x, r_0)} [M_{6r_0}(D_h \varphi)(z)]^\nu dz \right)^{\frac{1}{\nu}},$$

где c — постоянная в обобщенном неравенстве треугольника,

$$M_t(g)(z) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{1}{|B_\rho(z, s)|} \int_{B_\rho(z, s)} |g(y)| dy$$

— усеченная максимальная функция Харди — Литтлвуда, а постоянная C_1 не зависит ни от x, y , ни от φ .

По теореме Харди — Литтлвуда [22, гл. I.3, теорема 1] последовательность максимальных функций $\{M_{6r_0}(D_h \varphi_k)\}_k$ ограничена в $L_\nu(B_\rho(x, r_0))$. Значит, по предложению 3.1 гомеоморфизмы φ_k , $k \in \mathbb{N}$, в окрестности каждой точки $x \in \Omega$ обладают общим модулем непрерывности и потому $\{\varphi_k\}$ сходится к φ_0 локально равномерно.

3.1. Принадлежность классу Соболева. Пусть, как и прежде, $\mathfrak{g}_1$ — горизонтальное пространство алгебры Ли группы $\mathbb{G}$. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_1)$ пространство всех линейных операторов $A : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$, снабженное операторной нормой

$$|A| = \sup\{|A\langle X \rangle| \mid X \in \mathfrak{g}_1, |X| \leq 1\}.$$

П. (b) теоремы 2.1 немедленно вытекает из нижеследующей леммы 3.1. Подробности ее доказательства отложим до разд. 4.1.

Лемма 3.1 [21, предложения 3.3, 3.10; 23, теорема 4.2]. Пусть $1 < p < \infty$, $\mathbb{G}$ — произвольная группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область, и пусть $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}\}$ — произвольная последовательность отображений класса $W_{p, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, сходящаяся в $L_{1, \text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$. Если последовательность $\{\int_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^p dx\}$ ограничена, то φ_0 принадлежит классу $W_{p, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, а последовательность горизонтальных дифференциалов $\{D_h \varphi_k\}$ сходится к $D_h \varphi_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega; \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1))$. В частности,

$$\int_\Omega |D_h \varphi_0(x)|^p dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^p dx.$$

3.2. $\mathcal{N}$ -свойство Лузина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ называется K -квазимонотонным, $K \geq 1$, если для всякого шара $B_\rho = B_\rho(x, r) \Subset \Omega$ выполнено

$$\text{diam}_\rho \varphi(B_\rho) \leq K \text{diam}_\rho \varphi(S_\rho),$$

где $S_\rho = \partial B_\rho = S_\rho(x, r)$, а $\text{diam}_\rho A = \sup\{\rho(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}$ — диаметр множества A .

Лемма 3.2. Пусть последовательность K -квазимонотонных непрерывных отображений $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}\}$ сходится локально равномерно в Ω к отображению φ_0 . Тогда φ_0 — K -квазимонотонное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу локальной равномерной сходимости для всякого шара $B_\rho \Subset \Omega$ и его граничной сферы $S_\rho = \partial B_\rho$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}_\rho \varphi_k(B_\rho) = \text{diam}_\rho \varphi_0(B_\rho), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}_\rho \varphi_k(S_\rho) = \text{diam}_\rho \varphi_0(S_\rho). \quad \square$$

Так как φ_k — гомеоморфизмы, то $\text{diam}_\rho \varphi_k(B_\rho) = \text{diam}_\rho \varphi_k(S_\rho)$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда φ_0 — 1-квазимонотонное отображение. Отображение φ_0 обладает $\mathcal{N}$ -свойством как непрерывное квазимонотонное отображение класса $W^1_{\nu, \text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$ [24, теорема 3]. По аналогичным причинам каждый гомеоморфизм φ_k также обладает $\mathcal{N}$ -свойством.

3.3. $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство и конечность искажения. Следующая лемма доказывается точно так же, как [21, предложение 3.2] и [25, предложение 7].

Лемма 3.3. Пусть D, D' — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \leq p < \infty$. Пусть $\{\varphi_k : D \rightarrow \mathbb{G}\}$ — последовательность измеримых отображений, $\varphi_k(x) \in D'$ для п. вс. $x \in D$, каждое из которых индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_k^* : L^1_p(D') \cap \text{Lip}(D') \rightarrow L^1_q(D).$$

Если нормы $\|\varphi_k^*\|$, $k \in \mathbb{N}$, операторов композиции ограничены в совокупности, а последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в $L_{1, \text{loc}}(D; \mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi_0 : D \rightarrow \mathbb{G}$ такому, что $\varphi_0(x) \in D'$ для п. вс. $x \in D$, то φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L^1_p(D') \cap \text{Lip}(D') \rightarrow L^1_q(D)$$

и

$$\|\varphi_0^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\|.$$

Пусть $1 \leq q < \infty$. Для отображения $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $\text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением введем функцию искажения в образе:

$$\mathbb{G} \ni y \mapsto H_q(y, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0\} = \emptyset, \\ \left(\sum_{\substack{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi, \\ \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0}} \frac{|D_h \varphi(x)|^q}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{иначе,} \end{cases}$$

где Σ_φ — сингулярное множество³⁾ отображения φ . Ясно, что $H_q(y, \varphi) = 0$ при $y \notin \Omega'$. Для $1 \leq q \leq p < \infty$ обозначим интегральную норму функции $H_q(\cdot, \varphi)$ символом

$$H_{q,p}(\varphi, \Omega') = \|H_q(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega')\|,$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

Лемма 3.4 [21, предложения 3.8, 3.9]. Пусть отображение $\varphi : D \rightarrow D'$, где D, D' — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1, \text{loc}}(D; \mathbb{G})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap \text{Lip}(D') \rightarrow L^1_q(D), \quad 1 < q \leq p < \infty.$$

Тогда φ имеет конечное искажение и справедливы неравенства

$$\alpha_{p,q} H_{q,p}(\varphi, D') \leq \|\varphi^*\| \leq H_{q,p}(\varphi, D'),$$

³⁾Т. е. такое множество меры нуль, что $\varphi_k : \Omega \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{G}$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина. Для отображения $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$ такое множество всегда существует (см. предложение 1.1).

где постоянная $\alpha_{p,q}$ зависит лишь от p, q и структуры группы $\mathbb{G}$. Если еще области D и D' ограниченные, $p \leq \nu$ и отображение φ непостоянное, то φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Справедливо и более общее утверждение [25, предложение 10]: заключение леммы сохраняет силу без условия ограниченности областей, а также достаточно предполагать, что отображение принадлежит более широкому чем $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ классу $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ (см. определение 4.2 и теореме 4.2 ниже).

Рассмотрим произвольную компактную подобласть $D \Subset \Omega$. Поскольку $\{\varphi_k\}$ сходится к φ_0 равномерно на $\bar{D}$, то найдется ограниченная область D' , содержащая все образы $\varphi_k(D)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Согласно теореме 1.1 каждый гомеоморфизм φ_k (точнее, его сужение $\varphi_k|_D$) индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_k^* : L_\nu^1(D') \cap \text{Lip}(D') \rightarrow L_q^1(D), \quad k \in \mathbb{N},$$

и $\sup_k \|\varphi_k^*\| \leq \sup_k K_{q,\nu}(\varphi_k, \Omega) = L < \infty$. По лемме 3.3 предельное отображение φ_0 также индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_\nu^1(D') \cap \text{Lip}(D') \rightarrow L_q^1(D).$$

Если область D такова, что сужение φ_0 на нее не является постоянным отображением, то по лемме 3.4 $\varphi_0|_D$ удовлетворяет $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина, т. е. для всякого множества меры нуль $E \subset \mathbb{G}$ выполняется $|\varphi_0^{-1}(E) \cap D| = 0$. Область Ω , как нетрудно заметить, может быть покрыта возрастающей последовательностью подобластей $D_j \Subset \Omega$, на каждой из которых φ_0 непостоянно. Поэтому само отображение φ_0 также удовлетворяет $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству.

Из лемм 3.3 и 3.4, примененных к областям $D = \Omega$ и $D' = \mathbb{H}$, вытекает, что φ_0 обладает конечным искажением и

$$H_{q,\nu}(\varphi_0, \mathbb{H}) = \|H_q(\cdot, \varphi_0) \mid L_\sigma(\mathbb{H})\| \leq \alpha_{\nu,q}^{-1} \|\varphi_0^*\| \leq \alpha_{\nu,q}^{-1} L < \infty,$$

где $\|\varphi_0^*\|$ — норма оператора композиции

$$\varphi_0^* : L_\nu^1(\mathbb{H}) \cap \text{Lip}(\mathbb{H}) \rightarrow L_q^1(\Omega).$$

3.4. Инъективность почти всюду. В [26] следующая теорема о слабой непрерывности якобианов гомеоморфизмов класса W_ν^1 доказана при условии, что φ_0 заведомо является гомеоморфизмом [26, лемма 3.4, теорема 1.2]. В действительности нетрудная модификация представленных в [26] рассуждений позволяет отказаться от наложения дополнительных требований на структуру предельного отображения (см. также [6], где аналогичный факт доказан для последовательности отображений с ограниченным искажением, и рассуждения [11, теорема 1]). Доказательство теоремы 3.1 см. в разд. 4.2.

Теорема 3.1. Пусть Ω — область в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность гомеоморфизмов класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$. Пусть $\{\varphi_k\}$ сходится к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ локально равномерно в Ω , а последовательность $\{|D_h \varphi_k|\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $L_{\nu,\text{loc}}(\Omega)$. Тогда⁴⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \det \hat{D} \varphi_k(x) dx = \int_D \det \hat{D} \varphi_0(x) dx$$

⁴⁾ Согласно лемме 3.1 отображение φ_0 принадлежит $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$.

для каждой компактно вложенной подобласти $D \Subset \Omega$ такой, что $|\partial D| = 0$.

Если еще группа $\mathbb{G}$ двухступенчатая и $\det \hat{D}\varphi_k \geq 0$ п. вс., $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{\det \hat{D}\varphi_k\}$ сходится к $\det \hat{D}\varphi_0$ слабо в $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \theta(x) \det \hat{D}\varphi_k(x) dx = \int_{\Omega} \theta(x) \det \hat{D}\varphi_0(x) dx \quad (3.1)$$

для каждой функции $\theta \in L_{\infty}(\Omega)$, равной нулю почти всюду вне некоторого компакта $K \Subset \Omega$.

Поскольку $\det \hat{D}\varphi_k \geq 0$, из теоремы 3.1 сразу следует $\det \hat{D}\varphi_0 \geq 0$, т. е. п. (d) теоремы 2.1.

Пусть $T \Subset \Omega$ — произвольный компакт. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует открытое множество V такое, что $V \supset \varphi_0(T)$ и $|V \setminus \varphi_0(T)| < \varepsilon$. Так как $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ равномерно на T , а $\varphi_0(T)$ — компакт в открытом множестве V , то $\varphi_k(T) \subset V$ при всех достаточно больших k . Отсюда $|V| \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(T)|$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ также справедливо неравенство

$$|\varphi_0(T)| \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(T)|. \quad (3.2)$$

По формуле замены переменной с функцией кратности для всякого компакта $T \Subset \Omega$ имеем⁵⁾

$$\begin{aligned} |\varphi_0(T)| &\leq \int_{\varphi_0(T)} \mathcal{N}(y, \varphi_0, T) dy = \int_T \det \hat{D}\varphi_0(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \hat{D}\varphi_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(T)| \leq |\varphi_0(T)|. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}(y, \varphi, T) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ — число точек множества $\varphi^{-1}(y) \cap T$. Из последней цепочки получаем, что $\mathcal{N}(y, \varphi_0, T) = 1$ для п. вс. $y \in \varphi_0(T)$. Поскольку Ω может быть покрыта возрастающей последовательностью компактов T_j и $\mathcal{N}(y, \varphi_0, T_j) \rightarrow \mathcal{N}(y, \varphi_0, \Omega)$ при каждом фиксированном $y \in \varphi_0(\Omega)$, то $\mathcal{N}(y, \varphi_0, \Omega) = 1$ для п. вс. $y \in \varphi_0(\Omega)$. Итак, множество

$$S' = \{y \in \varphi_0(\Omega) \mid \mathcal{N}(y, \varphi_0, \Omega) \geq 2\}$$

имеет меру нуль. Так как φ_0 обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина, то множество $S = \varphi_0^{-1}(S')$ также имеет меру нуль. Очевидно еще, что $\varphi : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{H}$ — инъективное отображение.

3.5. Открытость.

Теорема 3.2 [12, теорема 2.2]. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, Ω — область в $\mathbb{H}$, $\nu(\nu - 1) < \sigma \leq \infty$, а $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$ с конечным искажением такое, что $\det \hat{D}\varphi \geq 0$ п. вс., и $K_{\nu}(\cdot, \varphi) \in L_{\sigma,\text{loc}}(\Omega)$. Тогда φ непрерывно, открыто и дискретно.

Пусть Z — множество нулей якобиана $\det \hat{D}\varphi_0$. Для каждого $y \in \mathbb{H}$ множество $\varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)$ либо пустое, либо состоит из одной точки $x \in \Omega$. Поэтому суммы вида

$$\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} u(x)$$

⁵⁾ Отметим, что сингулярные множества Σ_{φ_k} отображений φ_k , $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, пустые ввиду $\mathcal{N}$ -свойства и потому они не фигурируют в формуле замены переменной.

в действительности содержат не более одного слагаемого и потому для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left(\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} u(x) \right)^\alpha = \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} u(x)^\alpha.$$

Пусть $q < \nu$. Применяя формулу замены переменной⁶⁾ из предложения 1.1, с учетом того, что φ_0 имеет конечное искажение, выводим

$$\begin{aligned} K_{q,\nu}(\varphi_0, \Omega)^\sigma &= \int_{\Omega} K_\nu(x, \varphi_0)^\sigma dx = \int_{\Omega \setminus (Z \cup S)} \left(\frac{|D_h \varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|^{1/\nu}} \right)^\sigma \frac{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} dx \\ &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup S)} \left(\frac{|D_h \varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|^{1/q}} \right)^\sigma |\det \widehat{D} \varphi_0(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{H}} \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} \left(\frac{|D_h \varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|^{1/q}} \right)^\sigma dy \\ &= \int_{\mathbb{H}} \left(\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} \frac{|D_h \varphi_0(x)|^q}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \right)^{\sigma/q} dy \\ &= \int_{\mathbb{H} \setminus S'} \left(\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus Z} \frac{|D_h \varphi_0(x)|^q}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \right)^{\sigma/q} dy \\ &= \int_{\mathbb{H} \setminus S'} H_q(y, \varphi_0)^\sigma dy = \int_{\mathbb{H}} H_q(y, \varphi_0)^\sigma dy \\ &= H_{q,\nu}(\varphi_0, \mathbb{H})^\sigma \leq (\alpha_{\nu,q}^{-1} \sup_k K_{q,\nu}(\varphi_k, \Omega))^\sigma < \infty. \quad (3.3) \end{aligned}$$

В (3.3) равенство между первой и второй строками обусловлено соотношением $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma}$, между третьей и четвертой — присутствием в подынтегральной сумме не более чем одного слагаемого, между четвертой и пятой — тем, что

$$\sum_{x \in \varphi_0(y) \setminus (Z \cup S)} u(x) = \sum_{x \in \varphi_0(y) \setminus Z} u(x)$$

при $y \notin S' = \varphi_0(S)$, т. е. для п. вс. $y \in \mathbb{H}$.

Пусть $q = \nu$. Равенство $K_\nu(x, \varphi_0) = H_\nu(y, \varphi_0)$ выполняется для всех $y \in \varphi_0(\Omega) \setminus S'$. Здесь $x \in \varphi_0^{-1}(y) \subset \Omega \setminus S$ — единственный прообраз точки $y \in \varphi_0(\Omega) \setminus S'$. Так как φ_0 обладает $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойствами, откуда вытекает

$$H_{\nu,\nu}(\varphi_0, \mathbb{H}) = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{H}} H_\nu(y, \varphi_0) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} K_\nu(x, \varphi_0) = K_{\nu,\nu}(\varphi, \Omega).$$

Итак, $K_\nu(\cdot, \varphi_0) \in L_\sigma(\Omega)$ и, значит, по теореме 3.2 отображение φ_0 открытое (напомним, что $\det \widehat{D} \varphi_0 \geq 0$).

3.6. Инъективность. Предположим, что φ_0 — не инъективное отображение. Существуют две различные точки $x_1, x_2 \in \Omega$ такие, что $\varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = y \in \mathbb{H}$. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности точек x_1 и x_2 соответственно. Их образы $V_i = \varphi_0(U_i)$ — открытые множества, содержащие общую

⁶⁾ В силу $\mathcal{N}$ -свойства множество сингулярности Σ_{φ_0} отображения φ_0 пустое.

точку y . Значит, открытое множество $V = V_1 \cap V_2$ непустое и потому имеет положительную меру.

Пересечение $\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)$ — пустое множество, поскольку φ_0 — инъекция вне множества S . Одновременно с этим справедливы включения

$$V_i = \varphi_0(U_i) \subset \varphi_0(U_i \setminus S) \cup \varphi_0(S), \quad i = 1, 2,$$

из которых вытекает

$$V = V_1 \cap V_2 \subset (\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)) \cup \varphi_0(S) = \varphi_0(S).$$

Поскольку $S' = \varphi_0(S)$ имеет меру нуль, то $|V| = 0$, чего быть не может. Таким образом, $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ — гомеоморфизм. Это завершает доказательство п. (а) теоремы 2.1.

3.7. Полунепрерывность интегралов функций искажения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 [27]. Последовательность $\{f_k\}$ интегрируемых функций, заданных на измеримом пространстве X с мерой μ , сходится к $f_0 \in L_1(X)$ в кусочном смысле, если существует последовательность измеримых множеств $\{E_l \subset X\}$ такая, что $\bigcup_l E_l = X$ и $\{f_k\}$ сходится к f_0 слабо в $L_1(E_l)$ для каждого $l \in \mathbb{N}$.

Известно [27], что из всякой последовательности интегрируемых функций $\{f_k\}$, ограниченной в $L_1(X)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой интегрируемой функции в кусочном смысле. Ясно еще, что если $\{f_k\}$ сходится к f_0 в кусочном смысле, то

$$\|f_0\|_{L_1(X)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L_1(X)}.$$

Нижеследующая теорема 3.3 доказана в [13] при дополнительных предположениях: все φ_k — гомеоморфизмы, образы $\varphi_k(\Omega)$ которых совпадают с фиксированной ограниченной областью Ω' . Схему доказательства, модифицированную результатами [25], приводим в разд. 4.3. Отметим, что в [28, § 8.9] при помощи соображений кусочной сходимости установлено, что предел отображений с конечным искажением — отображение с конечным искажением (см. также [29, 30]).

Теорема 3.3. Пусть Ω — область в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \leq p < \infty$, и последовательность отображений $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}\}$ такова, что каждое φ_k принадлежит классу $\text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$ и обладает конечным искажением, а последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\mathbb{G})$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$). Пусть еще $\{\varphi_k\}$ сходится к отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ в $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$.

Тогда φ_0 принадлежит⁷⁾ $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ и обладает конечным искажением.

Если $q < p$, то существуют подпоследовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})\}$ и функция $H \in L_\sigma(\mathbb{G})$ такие, что $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})^\sigma\}$ сходится к H^σ в кусочном смысле на $\mathbb{G}$ и $H_q(\cdot, \varphi_0) \leq H$ п. вс. в $\mathbb{G}$.

Более того,

$$H_{q,p}(\varphi_0, \mathbb{G}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H_{q,p}(\varphi_k, \mathbb{G}) \quad (3.4)$$

для всех $1 < q \leq p < \infty$.

Наконец, п. (с) теоремы 2.1 вытекает из (3.4), так как в силу инъективности отображений φ_k справедливы равенства (см. выкладку (3.3))

$$K_{q,\nu}(\varphi_k, \Omega) = H_{q,\nu}(\varphi_k, \mathbb{H}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

⁷⁾Определение класса $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ см. в разд. 4.3.

4. Доказательства вспомогательных утверждений

4.1. Доказательство леммы 3.1. Принадлежность φ_0 классу $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ и конечность нормы $\|D_h \varphi_0\|_{L_p(\Omega)}$ доказаны в [21, предложение 3.3] (см. также [23, теорема 4.2]). Докажем оставшуюся часть утверждения.

Пусть последовательность $\{f_k \in L_p^1(\Omega)\}$ сходится к некоторой функции f_0 в $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, а последовательность $\{|\nabla_h f_k|\}$ ограничена в $L_p(\Omega)$. Тогда $f_0 \in L_p^1(\Omega)$ и $X_j f_k \rightarrow X_j f_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega)$ для каждого базисного горизонтального поля X_j . Действительно, в силу рефлексивности пространства $L_p(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{X_j f_{k_l}\}$, сходящаяся слабо к некоторой функции $g_j \in L_p(\Omega)$. Пусть $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Из равенств

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_0(x) X_j \theta(x) dx &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_{k_l}(x) X_j \theta(x) dx \\ &= - \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_j f_{k_l}(x) \theta(x) dx = - \int_{\Omega} g_j(x) \theta(x) dx \end{aligned}$$

следует, что g_j — обобщенная производная функции f_0 вдоль поля X_j . Слабая сходимость $\{X_j f_k\}$ к $X_j f_0 = g_j$ вытекает из того, что всякая подпоследовательность последовательности $\{X_j f_k\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к $X_j f_0$.

Из приведенного утверждения непосредственно вытекает, что для всех $i, j = 1, \dots, n$ последовательность⁸⁾ $\{X_j \varphi_{k,i}\}_k$ сходится к $X_j \varphi_{0,i}$ слабо в пространстве $L_p(\Omega)$. Поскольку $D_h \varphi_k = (X_j \varphi_{k,i})_{i,j=1}^n$, из этого следует, что $\{D_h \varphi_k\}$ сходится к $D_h \varphi_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega; \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1))$.

4.2. Доказательство теоремы 3.1. Для непрерывных квазимонотонных отображений $\varphi \in W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ справедлива следующая формула замены переменной [24, теорема 4]:

$$\int_D (u \circ \varphi)(x) \det \widehat{D}\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{G}} u(y) \mu(y, \varphi, D) dy, \quad (4.1)$$

где $D \Subset \Omega$ — компактно вложенная подобласть такая, что $|\varphi(\partial D)| = 0$, $\mu(y, \varphi, D)$ — топологическая степень отображения φ в точке $y \notin \varphi(\partial D)$, определенная относительно области D , а u — произвольная измеримая функция такая, что функция $y \mapsto u(y) \mu(y, \varphi, D)$ интегрируема на $\mathbb{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Последовательность интегрируемых функций $\{f_k\}$, заданных на измеримом пространстве X с конечной мерой μ , называется *равномерно интегрируемой*, если $\sup_k \|f_k\|_{L_1(X)} < \infty$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если множество $A \subset X$ измеримо и $\mu(A) < \delta$, то $\int_A |f_k| d\mu < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.1 [26, теорема 3.2]. Пусть Ω — область в двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$, $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}\}$ — последовательность отображений класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ такая, что $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$ п. вс. и последовательность $\{|D_h \varphi_k|\}$ ограничена в

⁸⁾Здесь $\varphi_{k,i}$ — i -я координатная функция отображения φ_k .

$L_{\nu, \text{loc}}(\Omega)$. Тогда последовательность якобианов $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$ равномерно интегрируема на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Перейдем к доказательству теоремы 3.1. По лемме 3.2 φ_0 — квазимонотонное отображение и потому φ_k обладают $\mathcal{N}$ -свойством Лузина для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ как непрерывные квазимонотонные отображения класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ [24, теорема 3].

Рассмотрим произвольную подобласть $D \Subset \Omega$ такую, что $|\partial D| = 0$. В силу равномерной сходимости на D последовательность множеств $\{\varphi_k(D)\}_{k=0}^\infty$ равномерно ограничена и потому вся она содержится в некоторой ограниченной области D' . В силу $\mathcal{N}$ -свойства Лузина $|\varphi_k(\partial D)| = 0$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. По формуле (4.1) имеем

$$\int_D \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx = \int_{D'} \mu(y, \varphi_k, D) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Так как $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ равномерно на $\overline{D}$, то в силу гомотопической инвариантности степени отображения $\mu(y, \varphi_k, D) \rightarrow \mu(y, \varphi_0, D)$ для $y \notin \varphi_0(\partial D)$, т. е. для п. вс. $y \in \mathbb{H}$. Так как область D' ограничена и $|\mu(\cdot, \varphi_k, D)| \leq 1$ всюду⁹ в $D' \setminus \varphi_k(\partial D)$, $k \in \mathbb{N}$, по теореме о мажорируемой сходимости имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D'} \mu(y, \varphi_k, D) dy \\ &= \int_{D'} \mu(y, \varphi_0, D) dy = \int_D \det \widehat{D}\varphi_0(x) dx. \end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы вытекает из первого и локальной равномерной интегрируемости последовательности $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$. Действительно, рассмотрим произвольное измеримое множество $E \Subset \Omega$. Пусть $U \Subset \Omega$ — подобласть, содержащая E . Фиксируем $\varepsilon > 0$. По теореме 4.1 существует $\delta > 0$ такое, что $\int_F \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если мера измеримого множества $F \subset U$ меньше δ . Найдется открытое множество $D \subset U$, состоящее из конечного набора субримановых шаров, такое, что $|(E \setminus D) \cup (D \setminus E)| < \delta$. Из неравенств

$$\begin{aligned} &\left| \int_E (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{(E \setminus D) \cup (D \setminus E)} (\det \widehat{D}\varphi_0(x) + \det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx + \left| \int_D (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \left| \int_D (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx \right| \end{aligned}$$

в силу $|\partial D| = 0$ и произвольности $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ следует, что (3.1) выполняется для функций вида $\theta = \chi_E$, $E \Subset \Omega$. Остается воспользоваться тем, что всякая функция $\theta \in L_\infty(\Omega)$, равная нулю п. вс. вне некоторого компакта $K \Subset \Omega$, может быть равномерно приближена линейными комбинациями характеристических функций χ_E , $E \subset K$.

⁹Поскольку каждое отображение φ_k , $k \in \mathbb{N}$, взаимно однозначно, степень $\mu(y, \varphi_k, D)$, если она определена, может быть равна только 1, -1 или 0.

4.3. Доказательство теоремы 3.3. Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_j(y)(t)$ — интегральная линия поля X_j с началом в точке $y \in \mathbb{G}$. Для всякой точки $y \in \mathbb{G}$ кривая $\gamma_j(y)$ пересекает гиперплоскость Π_j ровно в одной точке. Тем самым определен проектор $\text{Pr}_j : \mathbb{G} \rightarrow \Pi_j$. Пусть $y \in \Pi_j$ и $A \subset \mathbb{G}$ — произвольное множество. Совокупность точек $A_y = A \cap \{\gamma_j(y)(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ называется y -сечением множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 [25]. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ принадлежит классу $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$, если для каждого $j = 1, \dots, n$ его можно переопределить на множестве меры нуль так, чтобы для некоторого множества $S \subset \Omega$ меры нуль выполнялось

(1) для $d\mu_j$ -п. вс. $y \in \text{Pr}_j(\Omega)$ отображение φ абсолютно непрерывно на каждом отрезке интегральной линии $\gamma_j(y)$, содержащемся в $(\Omega \setminus S)_y$;

(2) для $d\mu_j$ -п. вс. $y \in \text{Pr}_j(\Omega)$ множество S_y замкнуто и если $x \in S_y$, то $\lim_{(\Omega \setminus S)_y \ni z \rightarrow x} \rho(\varphi(z)) = \infty$.

Теорема 4.2 [25, теорема 2]. Пусть Ω и W — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \leq p < \infty$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow W\}$ отображений класса $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением такую, что

(1) $\{\varphi_k\}$ сходится к отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow W$ в $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$;

(2) последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(W)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

Тогда

(а) φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega);$$

(b) $\|\varphi_0^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\|$;

(c) $\varphi_0 \in \text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$;

(d) φ_0 обладает конечным искажением;

(e) $H_q(\cdot, \varphi_0) \in L_\sigma(W)$;

(f) для некоторой постоянной $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо

$$\alpha_{q,p} H_{q,p}(\varphi_0, W) \leq \|\varphi_0^*\|;$$

(g) если еще $p \leq \nu$ и φ_0 непостоянное, то φ_0 обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. В [25] дано иное определение класса $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$: предполагается, что не само множество S имеет меру нуль, а лишь почти все его сечения. Однако в [25] фактически доказано, что отображение φ_0 принадлежит классу $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ именно в смысле определения 4.2.

Перейдем к доказательству теоремы 3.3 и соотношения (3.4). Отметим, что если дополнительно предполагать ограниченность последовательности $\{|D_h \varphi_k|\}$ в $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$, то $\varphi_0 \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G}) \subset \text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$.

Пусть $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицева функция. Для отображения $\varphi \in \text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением равенство [25, свойство 1]

$$\nabla_h(u \circ \varphi)(x) = \begin{cases} \nabla_h u(\varphi(x)) D_h \varphi(x), & \det \widehat{D} \varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \det \widehat{D} \varphi(x) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

справедливо¹⁰⁾ при п. вс. $x \in \Omega$. Пусть 1-липшицева функция u равна нулю всюду вне шара $B \subset \mathbb{G}$. Из (4.2) следует, что горизонтальный градиент каждой композиции $u \circ \varphi_k$ равен нулю п. вс. вне $\varphi_k^{-1}(B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поскольку $\nabla_h(u \circ \varphi_k) \rightarrow \nabla_h(u \circ \varphi_0)$ слабо в $L_q(\Omega)$ (см. доказательство леммы 3.1), то по свойству полунепрерывности нормы при слабой сходимости для произвольного измеримого $E \subset \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0^{-1}(B) \cap E} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q dx &= \int_E |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B) \cap E} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B) \cap E} |D_h \varphi_k(x)|^q dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что для любого конечного набора 1-липшицевых функций $u_1, \dots, u_l$, равных нулю вне шара B , выполнено неравенство

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B)} \max_{1 \leq j \leq l} \{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|^q\} dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k(x)|^q dx. \quad (4.4)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть покрывающий Ω дизъюнктный набор измеримых множеств $F_1, \dots, F_l$ таких, что

$$|\nabla_h(u_m \circ \varphi_0)(x)|^q = \max_{1 \leq j \leq l} \{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|^q\} \quad \text{при } x \in F_m,$$

и просуммировать неравенства (4.3), примененные к $E = F_m$, $m = 1, \dots, l$.

Можно выбрать счетный набор 1-липшицевых функций $\{u_j\}$, равных нулю вне шара B , так, что

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|\} = |D_h \varphi_0(x)|$$

для п. вс. $x \in \varphi_0^{-1}(B)$. Существование такого набора $\{u_j\}$ вытекает из известных фактов теории K -пространств и того, что $|D_h \varphi_0|$ совпадает с верхним градиентом отображения φ_0 [21, лемма 3.4], определяемым как измеримая мажоранта семейства $\{|\nabla_h(u \circ \varphi_0)|\}$ (здесь u пробегает множество всех 1-липшицевых функций с носителем в шаре B). Переходя к пределу в (4.4), получаем

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h \varphi_0(x)|^q dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k(x)|^q dx.$$

Пусть $q = p$. Обозначим $L = \liminf_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}(\varphi_0, \mathbb{G})$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_B H_q(y, \varphi_0)^q dy &= \int_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h \varphi_0(x)|^q dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k(x)|^q dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B H_q(y, \varphi_k)^q dy \leq L^q |B|. \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Принадлежность классу $\text{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ влечет аппроксимативную $\mathcal{P}$ -дифференцируемость отображения. Подробности см. в [25].

Отсюда $H_q(y, \varphi_0) \leq L$ для п. вс. $y \in \mathbb{G}$ в силу произвольности шара $B \subset \mathbb{G}$.

Пусть $q < p$. Извлечем подпоследовательность φ_{k_j} со следующими свойствами:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_{q,p}(\varphi_{k_j}, \mathbb{G}) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} H_{q,p}(\varphi_k, \mathbb{G});$$

последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})^q\}$ сходится слабо в $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{G})$ к некоторой функции $G(\cdot)^q$; последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})^\sigma\}$ сходится в кусочном смысле к некоторой функции $H(\cdot)^\sigma$.

Поскольку

$$\int_B H_q(y, \varphi_0)^q dy \leq \varliminf_{j \rightarrow \infty} \int_B H_q(y, \varphi_{k_j})^q dy = \int_B G(y)^q dy,$$

то $H_q(y, \varphi_0)^q \leq G(y)^q$ для п. вс. $y \in \mathbb{G}$.

Пусть $\{E_l\}$ — последовательность измеримых множеств конечной меры такая, что $\bigcup_l E_l = \mathbb{G}$ и $H_q(\cdot, \varphi_{k_j})^\sigma \rightarrow H(\cdot)^\sigma$ слабо в $L_1(E_l)$ для каждого l . Пользуясь равенством $\frac{q}{\sigma} + \frac{q}{p} = 1$, выводим

$$\begin{aligned} \int_{B \cap E_l} H_q(y, \varphi_0)^q dy &\leq \int_{B \cap E_l} G(y)^q dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B \cap E_l} H_q(y, \varphi_{k_j})^q dy \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{B \cap E_l} H_q(y, \varphi_{k_j})^\sigma dy \right)^{q/\sigma} |B|^{q/p} = \left(\int_{B \cap E_l} H(y)^\sigma dy \right)^{q/\sigma} |B|^{q/p}. \end{aligned}$$

Деля на меру шара B и устремляя его радиус к нулю, получаем, что

$$H_q(y, \varphi_0) \chi_{E_l}(y) \leq H(y) \chi_{E_l}(y)$$

для п. вс. $y \in \mathbb{G}$. Так как последовательность $\{E_l\}$ покрывает $\mathbb{G}$, то $H_q(\cdot, \varphi_0) \leq H$ п. вс. Поскольку L_1 -норма полунепрерывна при кусочной сходимости, то

$$\begin{aligned} \|H_q(\cdot, \varphi_0) \| L_\sigma(\mathbb{G}) \| &\leq \|H \| L_\sigma(\mathbb{G}) \| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|H_q(\cdot, \varphi_{k_j}) \| L_\sigma(\mathbb{G}) \| \\ &= \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|H_q(\cdot, \varphi_k) \| L_\sigma(\mathbb{G}) \|. \end{aligned}$$

5. Экстремальная задача

В качестве деформаций, допустимых для задачи нелинейной теории упругости, рассмотрим гомеоморфизмы с интегрируемым искажением. В связи с этим установленное в теореме 2.1 свойство отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, быть гомеоморфизмом играет ключевую роль в доказательстве существования деформации, доставляющей минимум функционала полной энергии — биективность отображения во внутренних точках, как и интегрируемость функции искажения, отвечает физическому содержанию задачи.

С уже ставшими классическими результатами теории упругости можно ознакомиться в работах [2, 3]. В работе [4] был впервые использован исследуемый нами подход к определению класса допустимых деформаций.

Пусть Ω и Q — области в группе Карно H -типа $\mathbb{H}$. Область Ω — тело в исходной конфигурации, а Q задает односторонние ограничения на положение тела при деформации: $\varphi(\Omega) \subset Q$. Обозначим функционал полной энергии как

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D_h \varphi(x)) dx.$$

Мы предполагаем, что *функция запасенной энергии* $W : \Omega \times \mathcal{L}(\mathfrak{h}_1) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathcal{L}(\mathfrak{h}_1)$ — пространство всех линейных операторов $A : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$, обладает следующими свойствами.

(а) Поливыпуклость: существует выпуклая функция со свойством Каратеодори¹¹⁾ $G(x, \cdot) : \mathcal{L}(\mathfrak{h}_1) \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для п. вс. $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$G(x, F|_{\mathfrak{h}_1}, \det F) = W(x, F|_{\mathfrak{h}_1})$$

для всех гомоморфизмов $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$, $\det F \geq 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

(б) Коэрцитивность: существуют постоянная $\alpha > 0$, функция $g \in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $f : (0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = +\infty$, удовлетворяющие неравенству

$$W(x, F|_{\mathfrak{h}_1}) \geq \alpha |F|^\nu + f(\det F) + g(x)$$

для п. вс. $x \in \Omega$ и всех гомоморфизмов $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$, $\det F > 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

Фиксируем $q \in (\nu - 1; \nu]$, $M > 0$. Введем класс *допустимых деформаций*:

$$\mathcal{A}(q, M; Q) = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{H} \mid \varphi \in W_{1, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}) \text{ — гомеоморфизм} \\ \text{с конечным искажением, } \varphi(\Omega) \subset Q, I(\varphi) < \infty, \\ K_{q, \nu}(\varphi, \Omega) \leq M, \det \hat{D}\varphi(x) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega \}.$$

Теорема 5.1. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, Ω — произвольная область в $\mathbb{H}$, Q — ограниченная область в $\mathbb{H}$ такая, что $\text{int } \overline{Q} = Q$, а $q \in (\nu - 1; \nu]$ и $M > 0$ — постоянные. Если множество $\mathcal{A}(q, M; Q)$ непустое и функция W удовлетворяет условиям (а) и (б), то существует по крайней мере один гомеоморфизм $\varphi_0 \in \mathcal{A}(q, M; Q)$ такой, что

$$I(\varphi_0) = \inf \{ I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q) \}.$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k \in \mathcal{A}(q, M; Q)\}$ — последовательность, минимизирующая функционал I , т. е. $I(\varphi_{k-1}) \geq I(\varphi_k) \rightarrow \inf_{\varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q)} I(\varphi)$. В силу коэрцитивного неравенства (б) последовательность интегралов $\left\{ \int_{\Omega} |D_h \varphi_k(x)|^\nu dx \right\}$ ограничена. По предложению 3.1 гомеоморфизмы φ_k локально в Ω обладают общим модулем непрерывности, поэтому по теореме Арцела — Асколи $\{\varphi_k\}$ можно считать локально равномерно сходящейся к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$.

Принадлежность предельного отображения классу допустимых деформаций. Покажем сначала, что отображение φ_0 не может быть постоянным. По теореме 3.1 последовательность $\{\det \hat{D}\varphi_k\}$ сходится к $\det \hat{D}\varphi_0$ слабо в $L_{1, \text{loc}}(\Omega)$. Предположим, что для некоторого компакта $T \subset \Omega$ положительной меры выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \hat{D}\varphi_k(x) dx = \int_T \det \hat{D}\varphi_0(x) dx = 0. \quad (5.1)$$

¹¹⁾Т. е. функция $G(x, \cdot)$ непрерывна для п. вс. x , а функция $G(\cdot, A, \delta)$ измерима для всех $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}_1)$ и всех $\delta \geq 0$. Это условие гарантирует, что композиция $x \mapsto G(x, A(x), \delta(x))$ измерима для любых измеримых функций $A(\cdot)$, $\delta(\cdot)$.

Так как якобианы неотрицательные, они сходятся на T к нулю сильно:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\det \widehat{D}\varphi_k \mid L_1(T)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx = 0.$$

После перехода к подпоследовательности в силу теоремы Егорова можно считать, что существует измеримое множество $T_0 \subset T$ такое, что $|T_0| > 0$ и

$$\delta_k = \sup_{x \in T_0} \det \widehat{D}\varphi_k(x) \rightarrow 0.$$

Интегралы¹²⁾ $\int_{\Omega} f(\det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx$ ограничены в силу коэрцитивного неравенства.

В то же время, поскольку $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = +\infty$, имеем

$$\int_{\Omega} f(\det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx \geq \int_{T_0} f(\det \widehat{D}\varphi_k(x)) dx \geq |T_0| \inf_{0 < t \leq \delta_k} f(t) \rightarrow \infty.$$

Получено противоречие с предположением (5.1). Значит, для всякого компакта $T \Subset \Omega$ положительной меры предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx$ положительный.

Далее, вновь фиксируем компакт $T \Subset \Omega$ положительной меры. Из равномерной сходимости на T следует (см. (3.2)), что

$$|\varphi_0(T)| \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(T)| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \widehat{D}\varphi_k(x) dx > 0.$$

Значит, $\varphi_0(T)$ содержит более одной точки и потому непрерывное отображение φ_0 не может быть постоянным.

Теперь из теоремы 2.1 сразу же вытекает, что φ_0 удовлетворяет всем условиям, налагаемым на отображения класса $\mathcal{A}(q, M; Q)$, кроме, быть может, двух: $\varphi_0(\Omega) \subset Q$ и $I(\varphi_0) < \infty$. Поскольку $\varphi_0(\Omega) \subset \overline{Q}$, $\text{int } \overline{Q} = Q$ и $\varphi_0(\Omega)$ — открытое множество как гомеоморфный образ открытого множества, то $\varphi_0(\Omega) \subset Q$.

Полунепрерывность функционала энергии. Покажем стандартным образом [2, 3], что

$$I(\varphi_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) = \inf \{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q)\}.$$

В силу леммы 3.1 и теоремы 3.1 последовательность $\{(D_h \varphi_k, \det \widehat{D}\varphi_k)\}$ сходится к $(D_h \varphi_0, \det \widehat{D}\varphi_0)$ слабо в пространстве $L_{\nu, \text{loc}}(\Omega) \times L_{1, \text{loc}}(\Omega)$. По лемме Мазура существует последовательность выпуклых комбинаций

$$\left\{ (A_k, d_k) = \sum_{j=m_k}^{l_k} \alpha_k^j (D_h \varphi_j, \det \widehat{D}\varphi_j) \right\}, \quad l_k \geq m_k \rightarrow \infty,$$

сходящаяся к $(D_h \varphi_0, \det \widehat{D}\varphi_0)$ сильно в $L_{\nu, \text{loc}}(\Omega) \times L_{1, \text{loc}}(\Omega)$ и п. вс. Согласно условию Каратеодори для п. вс. $x \in \Omega$ функция $G(x, \cdot)$ непрерывна, откуда

$$G(x, A_k(x), d_k(x)) \rightarrow G(x, D_h \varphi_0(x), \det \widehat{D}\varphi_0(x)).$$

¹²⁾ Образ множества нулей якобиана $Z_k = \{x \mid \det \widehat{D}\varphi_k(x) = 0\}$ имеет меру нуль в силу формулы замены переменных. Поскольку гомеоморфизмы φ_k обладают $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством (см. лемму 3.4), то $|Z_k| = |\varphi_k^{-1}(\varphi_k(Z_k))| = 0$, т. е. $\det \widehat{D}\varphi_k > 0$ п. вс. Значит, композиции $f(\det \widehat{D}\varphi_k(x))$ корректно определены.

Применяя лемму Фату и выпуклость функции $G(x, \cdot)$, выводим

$$\begin{aligned} I(\varphi_0) &= \int_{\Omega} G(x, D_h \varphi_0(x), \det \widehat{D} \varphi_0(x)) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, A_k(x), d_k(x)) dx \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=m_k}^{l_k} \alpha_k^j \int_{\Omega} G(x, D_h \varphi_j(x), \det \widehat{D} \varphi_j(x)) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=m_k}^{l_k} \alpha_k^j I(\varphi_j) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_{m_k}) = \inf \{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q)\}. \quad \square \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 63, N 4. P. 337–403.
2. Ball J. M. Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter // Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A. Mathematics. 1981. V. 88, N 3–4. P. 315–328.
3. Ciarlet P. G. Mathematical elasticity. I. Three-dimensional elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1988. (Stud. Math. Appl.).
4. Molchanova A., Vodopyanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and Partial Differ. Equ. 2019. V. 59, N 17. P. 2–25.
5. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. Водопьянов С. К. О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
7. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
8. Christodoulou D. On the geometry and dynamics of crystalline continua // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1998. V. 69, N 3. P. 335–358.
9. Maione A. Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields // Ph. D. Thesis submitted to the University of Trento for the degree of Doctor of Philosophy. — Department of Mathematics University of Trento, 2020. P. 1–145.
10. Басалаев С. Г., Водопьянов С. К. Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathcal{P}$ -дифференцируемость соболевских отображений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 700–719.
11. Водопьянов С. К. Непрерывность отображений класса Соболева $W_{\nu, \text{loc}}^1$ с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 912–934.
12. Басалаев С. Г., Водопьянов С. К. Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1151–1159.
13. Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Полунепрерывность операторной функции искажения при сходимости гомеоморфизмов в $L_{1, \text{loc}}$ // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 4. С. 605–621.
14. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
15. Gromov M. Carnot — Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
16. Pansu P. Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
17. Vodop'yanov S. K. $\mathcal{P}$ -Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
18. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
19. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

20. Водопьянов С. К., Павлов С. В. Замкнутость класса гомеоморфизмов с интегрируемым искажением и минимизация функционалов // Изв вузов. Математика. 2025, № 6.
21. Водопьянов С. К., Павлов С. В. Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, № 2. С. 215–236.
22. Stein E. M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
23. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
24. Водопьянов С. К. О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
25. Водопьянов С. К. Функционально-геометрические свойства пределов ACL-отображений с интегрируемым искажением // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 820–840.
26. Vodop'yanov S. K., Pavlov S. V. Weak continuity of Jacobians of W_ν^1 -homeomorphisms on Carnot groups // Euras. Math. J. 2024. V. 15, N 4. P. 82–95.
27. Brooks J. K., Chacon R. V. Continuity and compactness of measures // Adv. Math. 1980. V. 37, N 1. P. 16–26.
28. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001. (Oxford Math. Monogr.).
29. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526.
30. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным $(\theta, 1)$ -весовым (p, q) -искажением // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 999–1011.

Поступила в редакцию 1 апреля 2024 г.

После доработки 1 апреля 2024 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@mail.ru

Павлов Степан Валерьевич (ORCID 0009-0001-4811-9348)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
s.pavlov4254@gmail.com