Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.543

БИЕКЦИИ ГРУППЫ, КОММУТИРУЮЩИЕ С ЕЕ АВТОМОРФИЗМАМИ

О. В. Брюханов

Аннотация. Изучаются биекции группы на себя, которые коммутируют с выделенными подгруппами ее автоморфизмов. Установлено общее строение таких групп биекций. Строение таких групп биекций получено как строение централизатора подгруппы группы подстановок множества произвольной мощности. В частности, показано, что централизатор регулярного представления группы на себе изоморфен самой группе. С использованием строения таких групп биекций для свободной двупорожденной бернсайдовой группы периода 3 вычислена группа ее биекций, коммутирующих с ее внутренними автоморфизмами.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.307

Ключевые слова: биекция, орбита действия, стабилизатор, сплетение групп по множеству, декартово произведение групп, автоморфизм группы.

1. Введение

Пусть G — группа, $\Phi \leq \operatorname{Aut} G$. Рассмотрим множество всевозможных биекций $\sigma : G \to G$ группы G на себя, которые удовлетворяют следующему свойству:

$$\sigma(\varphi(g)) = \varphi(\sigma(g))$$

для всех $\varphi \in \Phi$ и $g \in G$. Относительно операции композиции, где $\sigma_1\sigma_2(g) = \sigma_2(\sigma_1(g))$, $g \in G$, это множество биекций образует группу. Данную группу будем обозначать через $\mathrm{B}_\Phi(G)$ и называть *группой Φ-коммутирующих биекций группы G*.

В случае, когда подгруппа автоморфизмов Φ совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы G, А. Н. Бородиным, М. В. Нещадимом и А. А. Симоновым в работах [1, 2] были вычислены группы $\mathrm{B}_\Phi(G)$ для произвольных абелевых групп, для произвольных свободных неабелевых групп и для групп диэдра D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. В работе [2] был поставлен вопрос об общем описании группы $\mathrm{B}_\Phi(G)$ для произвольной группы G и произвольной подгруппы $\Phi \leq \operatorname{Aut} G$. В настоящей статье дается ответ на этот вопрос.

Так как автоморфизмы группы являются ее биекциями на себя, рассмотрим следующую общую ситуацию. Пусть X — некоторое множество, $S(X)$ — группа всех его биекций на себя (подстановок множества X), Φ — произвольная подгруппа группы $S(X)$. Далее множество $x^\Phi = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}$ будем называть Φ-*орбитой* элемента $x \in X$, множество $\mathrm{St}_\Phi(x) = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(x) = x\}$ — Φ-*стабилизатором* элемента $x \in X$, множество $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x)) = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi \, \mathrm{St}_\Phi(x)\varphi^{-1} = \mathrm{St}_\Phi(x)\}$ — Φ-*нормализатором* стабилизатора $\mathrm{St}_\Phi(x)$, множество $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \{\sigma \mid \sigma \in S(X),\ \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi\}$ — *централизатором* *группы* Φ *в группе биекций* $S(X)$. При этом множество всех Φ-орбит множества X будем обозначать через $\mathrm{K}_\Phi(X)$. Таким образом,

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in I} x_\alpha^\Phi,$$

где $x_\alpha \in X$, $\alpha \in I$.

Отметим ряд свойств данных подгрупп биекций Φ и $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, которые будут использоваться в построениях и рассуждениях.

Лемма 1.1. *Пусть* $x \in X$, $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ *и* $\psi \in \Phi$. *Тогда выполнены следующие равенства* Φ*-стабилизаторов:* $\mathrm{St}_\Phi(\sigma(x)) = \mathrm{St}_\Phi(x)$ *и* $\mathrm{St}_\Phi(\psi(x)) = \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi$.

Доказательство. Утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_\Phi(\sigma(x)) &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(\sigma(x)) = \sigma(x)\} = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \sigma(\varphi(x)) = \sigma(x)\}\\ &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(x) = x\} = \mathrm{St}_\Phi(x)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_\Phi(\psi(x)) &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(\psi(x)) = \psi(x)\}\\ &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \psi^{-1}(\varphi(\psi(x))) = x\}\end{aligned}$$

$$= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{St}_\Phi(x)\} = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi \in \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi\} = \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi.$$

Лемма 1.2. *Каждая биекция* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ *индуцирует некоторую подстановку* $s \in S(K_\Phi(X))$ *на множестве всех* Φ*-орбит множества* X.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ в силу леммы 1.1 и равенств

$$\sigma(\varphi(x_\beta)) = \varphi(\sigma(x_\beta)) = \varphi(\psi(x_{\beta'}))$$

отображает Φ-орбиту x_β^Φ на равную ей по мощности Φ-орбиту $x_{\beta'}^\Phi$. Здесь $\varphi(x_\beta) \in x_\beta^\Phi$, $\sigma(x_\beta) \in x_{\beta'}^\Phi$, т. е. $\sigma(x_\beta) = \psi(x_{\beta'})$, где $\psi \in \Phi$, и $\varphi(\psi(x_{\beta'})) \in x_{\beta'}^\Phi$.

Лемма 1.3. *Отображение между двумя* Φ*-орбитами* $x_\beta^\Phi \mapsto x_{\beta'}^\Phi$, *заданное биекцией* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, *определяется однозначно по значению* $\sigma(x_0) \in x_{\beta'}^\Phi$ *для произвольно выделенного элемента* $x_0 \in x_\beta^\Phi$.

Доказательство. Из равенств $x_0^\Phi = x_\beta^\Phi$ и $\sigma(x_0)^\Phi = x_{\beta'}^\Phi$ получаем, что остальные значения биекции σ на Φ-орбите x_β^Φ, так как $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, можно найти по правилу

$$\sigma : \varphi(x_0) \mapsto \varphi(\sigma(x_0)),\ \ \varphi \in \Phi.$$

Биективность данного отображения следует из равенства стабилизаторов $\mathrm{St}_\Phi(x_0) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_0))$ в силу леммы 1.1.

Лемма 1.4. *Пусть* $\Phi \leq S(X)$. *Если* Φ*-стабилизаторы элементов* $x_i \in X$, $i = 1, 2$, *совпадают, то существует биекция* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, *которая отображает* Φ*-орбиту* x_1^Φ *на* Φ*-орбиту* x_2^Φ.

Доказательство. Если Φ-орбиты x_i^Φ, $i = 1, 2$, не совпадают, то рассмотрим отображение

$$\sigma : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2, & \\ \varphi(x_1) \mapsto \varphi(x_2), & \varphi \in \Phi, \\ x_2 \mapsto x_1, & \\ \varphi(x_2) \mapsto \varphi(x_1), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_i^\Phi,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Биективность данного отображения следует из равенства $\mathrm{St}_\Phi(x_1) = \mathrm{St}_\Phi(x_2)$. Принадлежность $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ следует из равенств

$$\sigma(\varphi(x_1)) = \varphi(x_2) = \varphi(\sigma(x_1)), \quad \sigma(\varphi(x_2)) = \varphi(x_1) = \varphi(\sigma(x_2)),$$
$$\sigma(\varphi(x)) = \varphi(x) = \varphi(\sigma(x)), \quad x \notin x_i^\Phi,\ i = 1, 2.$$

Таким образом, биекция $\sigma \in S(X)$ «переставляет» эти орбиты между собой. Если $x_1^\Phi = x_2^\Phi$, то отображение

$$\sigma : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2, & \\ \varphi(x_1) \mapsto \varphi(x_2), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_1^\Phi, \end{cases}$$

задает некоторую биекцию на Φ-орбите x_1^Φ. Принадлежность $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ доказывается аналогично, что завершает доказательство леммы 1.4.

Далее через $\mathrm{Fun}(X, G)$ будем обозначать X-ю декартову степень группы G, т. е. группу функций из множества X в группу G с «покомпонентным» умножением: если $f, g \in \mathrm{Fun}(X, G)$, то $fg(x) = f(x)g(x)$. В случае семейства групп G_x, $x \in X$, их декартово произведение, т. е. группу функций на множестве X с «покомпонентным» умножением и свойством $f(x) \in G_x$, будем обозначать через $\overline{\prod\limits_{x \in X}} G_x$.

Напомним одну из конструкций сплетения групп [3, с. 110], которая понадобится для описания строения группы биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ через ее действие на Φ-орбитах множества X. Полученное описание позволит определить строение группы биекций $\mathrm{B}_\Phi(G)$

Некоторую группу называют *сплетением групп A и B по множеству X* (*сплетением группы A с группой подстановок $B \leq \mathrm{S}(X)$*) и обозначают через $A \wr_X B$, если выполнены следующие условия.

1) $\mathrm{Fun}(X, A) < A \wr_X B$.

2) $B < A \wr_X B$ и задано действие группы B на множестве X подстановками из $\mathrm{S}(X)$, т. е. задано вложение $B \hookrightarrow \mathrm{S}(X)$. При этом если $b \in B$, $f \in \mathrm{Fun}(X, A)$, то $b^{-1}fb = f^b \in \mathrm{Fun}(X, A)$, где $f^b(x) = f(b^{-1}(x))$.

3) $A \wr_X B = B \cdot \mathrm{Fun}(X, A)$.

2. Группа биекций Ф-орбиты

Рассмотрим множества биекций

$$\Sigma(x^\Phi) = \{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi),\ \sigma(x) \in x^\Phi,\ \sigma(x') = x',\ \text{при } x' \notin x^\Phi\}.$$

По лемме 1.4 такие множества состоят по крайней мере из тождественной биекции множества X. Далее, если $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(x^\Phi)$, то

$$\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_2(\sigma_1(x)) = \sigma_2(\varphi_1(x)) = \varphi_1(\sigma_2(x)) = \varphi_1(\varphi_2(x)) \in x^\Phi$$

и

$$\sigma_1\sigma_2(x') = \sigma_2(\sigma_1(x')) = \sigma_2(x') = x'$$

при $x' \notin x^\Phi$. Следовательно, $\sigma_1\sigma_2 \in \Sigma(x^\Phi)$. Кроме того, из равенства $\sigma_1(x) = \varphi_1(x)$, применяя к обеим сторонам равенства композицию биекций $\varphi_1^{-1}\sigma_1^{-1}$, получаем равенство $\sigma_1^{-1}(x) = \varphi_1^{-1}(x) \in x^\Phi$. При этом, очевидно, выполняются равенства $\sigma_1^{-1}(x') = x'$, если $x' \notin x^\Phi$. Следовательно, $\sigma_1^{-1} \in \Sigma(x^\Phi)$. Таким образом, множества биекций $\Sigma(x^\Phi)$ являются подгруппами в группе $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. Данную подгруппу будем называть *группой биекций Φ-орбиты x^Φ*.

Теорема 2.1. *Группа биекций* $\Sigma\big(x_\alpha^\Phi\big)$ Φ-*орбиты* x_α^Φ *изоморфна фактор-группе* $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Доказательство. По лемме 1.3 все значения биекции $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ на Φ-орбите x^Φ однозначно определяются по значению в любом наперед заданном фиксированном элементе $x_0 \in x^\Phi$. Поэтому для Φ-орбиты x_α^Φ можно выбрать элемент x_α.

По условию теоремы $\sigma(x_\alpha) \in x_\alpha^\Phi$, т. е. $\sigma(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, $\varphi \in \Phi$. По лемме 1.1 имеем равенство стабилизаторов $\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_\alpha))$ и $\mathrm{St}_\Phi(\varphi(x_\alpha)) = \varphi^{-1}\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)\varphi$. Поэтому получаем равенство

$$\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_\alpha)) = \mathrm{St}_\Phi(\varphi(x_\alpha)) = \varphi^{-1}\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)\varphi,$$

т. е. $\varphi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$.

Далее, если для некоторой биекции $\psi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$ выполняется равенство $\psi(x_\alpha) = \sigma(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, то это равносильно тому, что $\varphi^{-1}\psi \in \mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$, т. е. $\psi \in \varphi\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$. Таким образом, значение $\sigma(x_\alpha) \in x_\alpha^\Phi$ для биекции $\sigma \in \Sigma(x_\alpha^\Phi)$ однозначно определяется смежным классом $\overline{\varphi} = \varphi\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$, где $\varphi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$, и корректно определено равенство $\sigma(x_\alpha) = \overline{\varphi}(x_\alpha)$. Это взаимно однозначное соответствие позволяет задать биективное отображение

$$\widehat{\ }\colon \Sigma(x_\alpha^\Phi) \to \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$$

по правилу $\widehat{\sigma} = \overline{\varphi}^{-1}$. Ясно, что $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} \subseteq \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Покажем, что данное биективное отображение является гомоморфизмом. Рассмотрим последовательную композицию $\sigma_1\sigma_2$ биекций σ_1 с $\widehat{\sigma}_1 = \overline{\varphi}_1^{-1}$ и σ_2 с $\widehat{\sigma}_2 = \overline{\varphi}_2^{-1}$, где $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(g_\alpha)$. Ей соответствует элемент $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = \overline{\varphi}_1^{-1}\overline{\varphi}_2^{-1}$, так как

$$\sigma_1\sigma_2(x_\alpha) = \sigma_2(\sigma_1(x_\alpha)) = \sigma_2(\overline{\varphi}_1(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_1(\sigma_2(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_1(\overline{\varphi}_2(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_1(x_\alpha),$$

и $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = (\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_1)^{-1} = \overline{\varphi}_1^{-1}\overline{\varphi}_2^{-1}$. Таким образом, биективное отображение

$$\widehat{\ }\colon \Sigma(\Phi_\alpha) \to \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$$

обладает свойством гомоморфизма $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = \widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2$, т. е. является изоморфизмом, при этом $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} \leq \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Если выполнено строгое включение $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} < \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$, то для любого $\overline{\varphi}_0 \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)\backslash\widehat{\Sigma\big(x_\alpha^\Phi\big)}$ выполняется равенство $\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\overline{\varphi}_0(x_\alpha))$. Следовательно, по лемме 1.4 определена биекция

$$\sigma_0 : \begin{cases} x_\alpha \mapsto \overline{\varphi}_0(x_\alpha), & \\ \varphi(x_\alpha) \mapsto \varphi(\overline{\varphi}_0(x_\alpha)), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_\alpha^\Phi, \end{cases}$$

которая принадлежит группе биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. При этом, являясь биекцией Φ-орбиты x_α^Φ, σ_0 не принадлежит $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$, так как $\widehat{\sigma}_0 = \overline{\varphi}_0 \notin \widehat{\Sigma\big(x_\alpha^\Phi\big)}$. Получили противоречие. Следовательно, $\widehat{\Sigma\big(x_\alpha^\Phi\big)} = \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$ и группа $\Sigma\big(x_\alpha^\Phi\big)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(x_\alpha)$.

3. Строение группы биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$

Множество K_Φ всех Φ-орбит множества X разбивается на непересекающиеся подмножества $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(x_\alpha^\Phi) \mid \sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)\}$ — орбиты Φ-орбит x_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$, относительно действия группы биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. Для биекции $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ обозначим через $\sigma_{\mathrm{K}_\alpha}$ биекцию, которая совпадает с σ на Φ-орбитах из множества K_α и действует тождественно, т. е. $\sigma(x) = x$ на элементах $x \in X$, Φ-орбиты которых x^Φ не принадлежит K_α. Обозначим через $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ множество всех таких биекций. Очевидно, что $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) \leq \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$.

Лемма 3.1. $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod\limits_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$.

Доказательство. Во-первых, $\mathrm{K}_\Phi = \bigsqcup\limits_{\alpha\in I'} \mathrm{K}_\alpha$, и множества всех элементов из Φ-орбит каждого K_α, $\alpha \in I'$, инвариантны относительно действия биекций $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. Поэтому каждая биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ однозначно определяется по ее действию на данных инвариантных подмножествах элементов.

В силу этого сопоставим биекции $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ функцию f_σ из декартова произведения $\overline{\prod\limits_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ такую, что $f_\sigma(\alpha) = \sigma_{\mathrm{K}_\alpha} \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$. Аналогично каждой функции $f \in \overline{\prod\limits_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ сопоставим биекцию $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, у которой $\sigma_{\mathrm{K}_\alpha} = f(\alpha)$, $\alpha \in I'$. Очевидно, что построенное соответствие между группой $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ и декартовым произведением $\overline{\prod\limits_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ будет взаимно однозначным. Так как для биекций $\tau, \sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ выполняются равенства $\tau\sigma_{K_\alpha} = \tau_{K_\alpha}\sigma_{K_\alpha}$, $\alpha \in I'$, где $\tau\sigma_{K_\alpha} = f_{\tau\sigma}(\alpha)$ и $\tau_{K_\alpha} = f_\tau(\alpha)$, $\sigma_{K_\alpha} = f_\sigma(\alpha)$, то построенное взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом. Таким образом, установлено равенство $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod\limits_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$.

Лемма 3.2. *Группы биекций Φ-орбит из множества K_α изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть x_α^Φ и x_β^Φ — две Φ-орбиты из множества K_α. Тогда найдется биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, которая отображает Φ-орбиту x_α^Φ на x_β^Φ. Если $\sigma_\beta \in \Sigma(x_\beta^\Phi)$, то отображение $\sigma\sigma_\beta\sigma^{-1} : x_\alpha^\Phi \to x_\alpha^\Phi$ как композиция биекций из $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ будет само биекцией из $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, т. е. $\sigma\sigma_\beta\sigma^{-1} \in \Sigma(x_\alpha^\Phi)$. Очевидно, что отображение $\sigma_\beta \mapsto \sigma\sigma_\beta\sigma^{-1}$ задает изоморфизм группы $\Sigma(x_\beta^\Phi)$ в группу $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$. Таким образом,

$$\Sigma(x_\beta^\Phi) \simeq \sigma\Sigma(x_\beta^\Phi)\sigma^{-1} \leq \Sigma(x_\alpha^\Phi).$$

Аналогично получаем, что

$$\Sigma(x_\alpha^\Phi) \simeq \sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma \leq \Sigma(x_\beta^\Phi).$$

Следовательно,

$$\sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma \leq \Sigma(x_\beta^\Phi) \leq \sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma,$$

т. е. $\sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma = \Sigma(x_\beta^\Phi)$ и $\Sigma(x_\alpha^\Phi) \simeq \Sigma(x_\beta^\Phi)$.

Теорема 3.3. $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \Sigma(x_\alpha^\Phi) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$.

Доказательство. Каждая биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ по лемме 1.3 однозначно определяется по ее действию на Φ-орбитах x^Φ, $x \in X$. Поэтому биекция $\sigma \in \Sigma_0 = \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha),\ \sigma(x^\Phi) = x^\Phi,\ x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha\}$ однозначно определяется своими ограничениями $\sigma|_{x^\Phi} \in \Sigma(x^\Phi)$ на Φ-орбитах $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$. По лемме 3.2 все группы биекций $\Sigma(x^\Phi)$ у Φ-орбит $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ изоморфны группе $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$. Пусть $\rho_{x^\Phi} : \Sigma(x^\Phi) \to \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$, — фиксированные изоморфизмы, гарантируемые леммой 3.2. Тогда каждой биекции $\sigma \in \Sigma_0$ сопоставим функцию $f_\sigma \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, где $f_\sigma(x^\Phi) = \rho_{x^\Phi}(\sigma|_{x^\Phi})$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$. Ясно, что построенное таким образом соответствие взаимно однозначно. Для биекций $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_0$ выполняются равенства $\sigma_1\sigma_2|_{x^\Phi} = \sigma_1|_{x^\Phi}\sigma_2|_{x^\Phi}$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$, где $\rho_{x^\Phi}(\sigma_1\sigma_2|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_1\sigma_2}(x^\Phi)$ и $\rho_{x^\Phi}(\sigma_1|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_1}(x^\Phi)$, $\rho_{x^\Phi}(\sigma_2|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_2}(x^\Phi)$. Поэтому данное взаимно однозначное соответствие гомоморфно, т. е. является изоморфизмом. Следовательно, множество всех биекций $\sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$, которые переводят каждую Φ-орбиту из множества K_α в себя, образуют подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$. Таким образом, $\mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr) < \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$.

Выберем некоторый фиксированный элемент x_α из Φ-орбиты множества K_α и рассмотрим множество $X_\alpha = \{\sigma(x_\alpha) \mid \sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)\}$. Ясно, что каждая Φ-орбита $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ имеет непустое пересечение с множеством X_α, а все элементы этого множества в силу леммы 1.1 обладают одним и тем же стабилизатором в группе Φ. Выделим в каждой Φ-орбите $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ по одному элементу из его пересечения с X_α. Полученное множество является множеством элементов, представляющих Φ-орбиты из K_α и обладающих одним и тем же стабилизатором в группе Φ. Следовательно, любая подстановка на этом множестве представителей Φ-орбит из K_α по лемме 1.3 однозначно продолжается до биекции на все множество элементов Φ-орбит из множества K_α. Множество всех полученных таким образом биекций из $\Sigma(K_\alpha)$ является подгруппой, изоморфной группе подстановок $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$. Поэтому эту подгруппу биекций будем называть подгруппой подстановок и обозначать через $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha) < \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$. Кроме того, если $s \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$, $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, и x — произвольный элемент построенного множества представителей Φ-орбит из K_α, то

$$\begin{aligned} s^{-1}fs(x) &= s(f(s^{-1}(x))) = s(\varphi_{s^{-1}(x)}(s^{-1}(x))) \\ &= \varphi_{s^{-1}(x)}(s(s^{-1}(x))) = \varphi_{s^{-1}(x)}(x) \in x^\Phi, \end{aligned}$$

где $\varphi_{s^{-1}(x)} \in \mathrm{N}_\Phi\bigl(\mathrm{C}_\Phi\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, по теореме 2.1 определяет биекцию f на Φ-орбите $s^{-1}(x)^\Phi$. Таким образом, получаем

$$s^{-1}fs = f^s \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$$

и $f^s(x) = f(s^{-1}(x))$.

Рассмотрим произвольную биекцию $\sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$. По лемме 1.3 эта биекция однозначно определяется по значениям на элементах, представляющих Φ-орбиты из множества K_α. Если x — произвольный элемент построенного множества представителей Φ-орбит из K_α, то

$$\sigma(x) = \varphi_{s(x)}(s(x)) = f(s(x)),$$

где $s \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ — биекция, которая задает подстановку на множестве представителей Φ-орбит из K_α такую же, какую индуцирует биекция σ на множестве K_α, и $\varphi_{s(x)} \in \Sigma(s(x)^\Phi) \simeq \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ — элемент, задающий биекцию на Φ-орбите $s(x)^\Phi$ для биекции $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$. Следовательно, $\sigma = sf$, где $\sigma \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ и $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, т. е. $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha) \cdot \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$.

Таким образом, выполнены все три условия из определения сплетения групп по множеству (см. введение) и группа биекций $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ является сплетением групп $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ и $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ по множеству K_α, т. е.

$$\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha).$$

Теорема 3.4. *Пусть $\Phi \le S(X)$, тогда*

$$\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha).$$

Доказательство. По лемме 3.1

$$\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha).$$

Тогда из теорем 2.1 и 3.3 в силу равенства $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ получаем требуемое утверждение.

Следствие 1. *Пусть G — группа, $\rho : G \to S(G)$ — ее регулярное представление на себе, где $\rho(g) : x \mapsto xg$, $x \in G$. Тогда централизатор $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) < S(G)$ представления $\rho(G) < S(G)$ является группой, изоморфной группе G. При этом биекции $\sigma_g \in \mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ могут быть заданы по правилу $\sigma_g : x \mapsto g^{-1}x$, $x \in G$.*

Доказательство. Так как в этом случае имеем $\Phi = \rho(G) < S(G)$ и $\rho(g)(x) = xg$, $x \in G$, то $G = e^\Phi$ и $\mathrm{K}_1 = \{e^\Phi\}$. Далее, $\mathrm{St}_\Phi(e) = \{\rho(g) \mid \rho(g)(e) = eg = e\} = \langle\rho(e)\rangle$ и $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(e)) = \rho(G)$. Следовательно, по теореме 3.4 $\Sigma(e^\Phi) = \rho(G)/\langle\rho(e)\rangle \simeq G$ и $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) = \Sigma(e^\Phi) \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) = G \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) = G$, так как $|\,\mathrm{K}_1\,| = 1$ и $S(\mathrm{K}_1) = \langle e\rangle$.

При этом в силу леммы 1.3 каждая биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ однозначно определяется по ее значениям на выделенных элементах Φ-орбит. В нашем случае Φ-орбита единственна, а ее выделенным элементом можно взять единицу e. Таким образом, все биекции из $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ будут иметь вид

$$\sigma_g : \begin{cases} e \mapsto \sigma_g(e) = g^{-1}, \\ \rho(h)(e) \mapsto \rho(h)(\sigma_g(e)) = \rho(h)(g^{-1}) = g^{-1}h, \quad \rho(h) \in \rho(G). \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma_g(\rho(h)(x)) = g^{-1}xh = \rho(h)(\sigma_g(x))$ и

$$\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x) = \sigma_{g_2}(\sigma_{g_1}(x)) = \sigma_{g_2}\bigl(g_1^{-1}x\bigr) = g_2^{-1}g_1^{-1}x = (g_1g_2)^{-1}x = \sigma_{g_1g_2}(x).$$

Поэтому все биекции σ_g перестановочны со всеми биекциями $\rho(h) \in \Phi = \rho(G)$, а взаимно однозначное соответствие $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) \to G$, заданное по правилу $\sigma_g \mapsto g$, является изоморфизмом.

Теорема 3.5. *Пусть G — группа, $\Phi \le \operatorname{Aut} G$ и $\mathrm{B}_\Phi(G)$ — группа Φ-коммутирующих биекций группы G. Если $G = \bigsqcup_{\alpha\in I} g_\alpha^\Phi$, $\mathrm{K}_\Phi = \bigsqcup_{\alpha\in I'} \mathrm{K}_\alpha$, $I' \subseteq I$, где $\mathrm{K}_\alpha = \bigl\{\sigma\bigl(g_\alpha^\Phi\bigr) \mid \sigma \in \mathrm{B}_\Phi(G)\bigr\}$, и $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$, $\alpha \in I'$, — группа Φ-коммутирующих биекций на себя Φ-орбиты g_α^Φ, то*

$$\mathrm{B}_\Phi(G) = \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha),$$

где $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) = \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(g_\alpha)$.

Доказательство. Так как $\Phi \le \operatorname{Aut} G < S(G)$, то находимся в рамках условия теоремы 3.4, где множеству X соответствует множество всех элементов группы G, группе $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) < S(X)$ — группа биекций $\mathrm{B}_\Phi(G) < S(G)$, а группам биекций $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$ Φ-орбит x_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$, — группы биекций $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$ Φ-орбит g_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$. Таким образом, теорема 3.5 верна в силу теоремы 3.4.

4. Примеры вычисления групп инвариантных биекций

В работе [2] в явном виде, т. е. с указанием множества конкретных биекций, были найдены группы Φ-коммутирующих биекций для абелевых, свободных неабелевых групп и диэдральных групп D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где Φ — группа внутренних автоморфизмов исследуемой группы G. В этом случае для каждого элемента группы $y \in G$ его Φ-орбита совпадает с его классом сопряженности в группе: $y^\Phi = y^G = \{gyg^{-1} \mid g \in G\}$. В частности, $\mathrm{St}_\Phi(M) = \mathrm{C}_G(M)$ и $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(M)) = \mathrm{N}_G(\mathrm{C}_G(M))$, где $M \subseteq G$. При этом сами Φ-коммутирующие биекции будем называть *инвариантными*, группу $\mathrm{B}_\Phi(G)$ будем обозначать через $\mathrm{B}(G)$ и называть *группой инвариантных биекций* группы G, подгруппу $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$ будем обозначать через $\mathrm{B}_\alpha(G)$ и называть *группой инвариантных биекций* класс сопряженности y_α^G, $\alpha \in I' \subseteq I$. Множеству всех Φ-орбит K_Φ группы G соответствует множество всех ее классов сопряженности K. Кроме того, множеству Φ-орбит K_α, $\alpha \in I' \subseteq I$, соответствует множество классов сопряженности, которые составляют $\mathrm{B}(G)$-орбиту класса сопряженности y_α^G. Таким образом, $\mathrm{K} = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I'} \mathrm{K}_\alpha$, $I' \subseteq I$. Подгруппу инвариантных биекций, которые действуют тождественно вне $\mathrm{B}(G)$-орбиты класса сопряженности y_α^G, будем обозначать также через $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_\alpha}(G)$.

Для удобства переформулируем теоремы 2.1, 3.3, 3.5 в новых терминах, соответствующих случаю, когда Φ — группа внутренних автоморфизмов исследуемой группы G. Таким образом, выполнены следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}_\alpha(G)$ *класса сопряженности* y_α^G *изоморфна группе* $\mathrm{N}_G(\mathrm{C}_G(y_\alpha))/\,\mathrm{C}_G(y_\alpha)$.

Теорема 4.2. *Группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_\alpha}(G)$ *у* $\mathrm{B}(G)$*-орбиты* $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(y_\alpha^G) \mid \sigma \in \mathrm{B}(G)\}$ *изоморфна группе* $\mathrm{B}_\alpha(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} S(\mathrm{K}_\alpha)$.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$G = \bigsqcup_{\alpha \in I} y_\alpha^G, \quad \mathrm{K} = \bigsqcup_{\alpha \in I'} \mathrm{K}_\alpha, \quad I' \subseteq I,$$

где $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(y_\alpha^G) \mid \sigma \in \mathrm{B}(G)\}$. *Если* $\mathrm{B}_\alpha(G)$ *— группа инвариантных биекций класса сопряженности* y_α^G, *то группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}(G)$ *изоморфна группе* $\overline{\prod\limits_{\alpha \in I'}} \mathrm{B}_\alpha(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} S(\mathrm{K}_\alpha)$.

Покажем, как, используя сформулированные выше теоремы 4.1, 4.2, 4.3, можно вычислить группу инвариантных биекций для свободной бернсайдовой группы $\mathbf{B}_2(3) = F_2/F_2^3$.

Теорема 4.4. *Для свободной бернсайдовой группы* $\mathbf{B}_2(3)$ *группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))$ *изоморфна группе* $S_3 \times (\mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2)^4$, *где* $X_2 = \{1, 2\}$.

Доказательство. Во-первых, $|\mathbf{B}_2(3)| = 27$, $\gamma_3\mathbf{B}_2(3) = e$ и каждый элемент обладает канонической формой записи $x^m y^n [x, y]^k$, где x, y — порождающие группы $\mathbf{B}_2(3)$, а $m, n, k \in \{0, 1, 2\}$ [4, с. 346]. Далее, группа $\mathbf{B}_2(3)$ обладает следующим разбиением на классы сопряженности:

$$\mathbf{B}_2(3) = \mathrm{K}_1 \sqcup \mathrm{K}_2 \sqcup \mathrm{K}_3 \sqcup \mathrm{K}_4 \sqcup \mathrm{K}_5,$$

где

$$\mathrm{K}_1 = \{e\} \sqcup \{[x, y]\} \sqcup \{[x, y]^2\},$$

$$\mathrm{K}_2 = \{x,\ x[x,y],\ x[x,y]^2\} \sqcup \{x^2,\ x^2[x,y],\ x^2[x,y]^2\},$$
$$\mathrm{K}_3 = \{y,\ y[x,y],\ y[x,y]^2\} \sqcup \{y^2,\ y^2[x,y],\ y^2[x,y]^2\},$$
$$\mathrm{K}_4 = \{xy,\ xy[x,y],\ xy[x,y]^2\} \sqcup \{x^2y^2,\ x^2y^2[x,y],\ x^2y^2[x,y]^2\},$$
$$\mathrm{K}_5 = \{xy^2,\ xy^2[x,y],\ xy^2[x,y]^2\} \sqcup \{x^2y,\ x^2y[x,y],\ x^2y[x,y]^2\}.$$

Все классы сопряженности разбиты на подмножества всех классов, которые содержат элементы с общим централизатором. Таким образом, в силу лемм 1.2 и 1.4, каждое из этих подмножеств является орбитой некоторого класса сопряженности относительно действия группы инвариантных биекций $\mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))$.

Для классов сопряженности из орбиты $\mathrm{K}_1 = \{\sigma(e) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства $\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}([x,y]^k) = \mathbf{B}_2(3)$. Следовательно, по теореме 4.1 группа инвариантных биекций класса сопряженности из этой орбиты $\mathrm{B}_1(\mathbf{B}_2(3)) = e$, при этом $|\,\mathrm{K}_1\,| = 3$. Поэтому в силу теоремы 4.2 получаем $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_1}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_1(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) \simeq S_3$.

Для классов сопряженности из орбиты $\mathrm{K}_2 = \{\sigma(x^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2) = \langle x, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_2(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_2\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_2}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_2(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_2} S(\mathrm{K}_2) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_3 = \{\sigma(y^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(y) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(y^2) = \langle y, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_3(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_3\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_3}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_3(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_3} S(\mathrm{K}_3) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_4 = \{\sigma((xy)^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(xy) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2y^2) = \langle xy, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_4(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_4\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_4}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_4(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_4} S(\mathrm{K}_4) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_5 = \{\sigma((x^2y)^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2y) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(xy^2) = \langle xy^2, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

Следовательно, по теореме 4.1 $\mathrm{B}_5(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_5\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_5}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_5(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_5} S(\mathrm{K}_5) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Таким образом, в силу теоремы 4.3, получаем требуемый результат.

Благодарности. Автор выражает благодарность участникам семинара «Эварист Галуа» Новосибирского государственного университета и лично В. Г. Бардакову и М. В. Нещадиму за полезные предложения и плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симонов А. А., Нещадим М. В., Бородин А. Н.* Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.
2. *Borodin A. N., Neshchadim M. V., Simonov A. A.* Group bijections commuting with inner automorphisms // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 5. P. 1015–1025.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

4. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 19 октября 2024 г.
После доработки 27 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Брюханов Олег Вадимович (ORCID 0009-0000-7512-6992)
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
bryuolegvad@ya.ru