

УДК 517.983:517.986

О ГИПОНОРМАЛЬНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРАХ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследованы случаи, когда гипонормальный τ -измеримый оператор (или некоторое его сужение) является нормальным. Получен критерий гипонормальности τ -измеримого оператора в терминах его функции сингулярных значений. Множество всех τ -измеримых гипонормальных операторов замкнуто в топологии τ -локальной сходимости по мере. Это утверждение является обобщением задачи 226 из книги “P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Second Edition, Springer-Verl., Berlin, 1982” на неограниченные операторы. Множество всех τ -измеримых когипонормальных операторов замкнуто в топологии τ -локальной сходимости по мере тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ конечна.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.306

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, гипонормальный оператор.

1. Введение

Ограниченным гипонормальным операторам в гильбертовом пространстве посвящены работы многих исследователей (см., например, [1–7] и библиографию в них). В контексте полуконечных алгебр фон Неймана автором были опубликованы работы [8–13] о свойствах (неограниченных) τ -измеримых гипонормальных операторов (см. также [14]). Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ — *-алгебра всех τ -измеримых операторов, $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$ — эрмитова часть $S(\mathcal{M}, \tau)$, $\mu(t; X)$ — функция сингулярных значений оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Перечислим основные результаты нашей статьи; некоторые из них являются новыми даже в случае алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с $\tau = \text{tr}$. Если $T \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$, $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и оператор $A := PT$ гипонормален, то $TP = PT$ и $A = PTP \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$ (теорема 2). Если оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то $TP = PT$ и оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален (теорема 3). Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ (соответственно $\mu(t; T^*P) \geq \mu(t; TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $\tau(P) < +\infty$ (теорема 6). В частности, оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ нормален тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) = \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

с $\tau(P) < +\infty$ (следствие 3). Множество всех τ -измеримых гипонормальных операторов t_τ -замкнуто (теорема 7). Это утверждение является обобщением задачи 226 из [15] на неограниченные операторы. Множество всех τ -измеримых когипонормальных операторов t_τ -замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является конечной (следствие 4).

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Пусть $\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$, $\|\cdot\|$ — C^* -норма на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{M} : \|X\| \leq 1\}$ — единичный шар алгебры $\mathcal{M}$. Для $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея — фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathcal{M}$; $\mathcal{M}$ называется *конечной*, если I не эквивалентна никакому проектору $P \in \mathcal{M} \setminus \{I\}$. Запись $P \preceq Q$ означает, что $P \sim R$ для некоторого $R \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $R \leq Q$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *конечным*, если $\varphi(I) < +\infty$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$

для каждого $X \in \mathcal{M}^+$ (см. [16, гл. V, § 2; 17, гл. 1, § 1.15]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} = \{P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P) < +\infty\}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ -измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [18, гл. IX; 17, гл. 2, § 2.3]). Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^h$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$; *когипонормальным*, если оператор A^* гипонормален.

В $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ вводится топология t_τ сходимости по мере (см. [18, гл. IX, § 2; 17, гл. 2, § 2.5]), фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} (\|XP\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Известно, что $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$ -алгеброй [17, гл. 2, § 2.3, 2.5], причем $\mathcal{M}$ плотно в $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ [17, гл. 2, § 2.5]. Для обозначения сходимости сети $\{X_j\}_{j \in J} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ к $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в топологии t_τ используется запись $X_j \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что $\{X_j\}_{j \in J}$ *сходится к X по мере τ* .

Через $\mu(t; X)$ обозначим функцию сингулярных значений оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Лемма 1 [19]. Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $A, B \in \mathcal{M}$. Тогда

- (i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*)$ для всех $t > 0$;
- (ii) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu(t; X) \leq \mu(t; Y)$ для всех $t > 0$;
- (iii) $\mu(t; AXB) \leq \|A\|\|B\|\mu(t; X)$ для всех $t > 0$;
- (iv) $\mu(s+t; X+Y) \leq \mu(s; X) + \mu(t; Y)$ для всех $s, t > 0$;
- (v) $\mu(t; f(|X|)) = f(\mu(t; X))$ для всех непрерывных функций $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и $t > 0$.

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ определим множества

$$\mathcal{V}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (Q \leq P, \|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P - Q) \leq \delta)\}.$$

Пространство $S(\mathcal{M}, \tau)$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ τ -локальной сходимости по мере, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta = \{\mathcal{V}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$. Будем использовать символ $X_i \xrightarrow{\tau l} X$ для обозначения $t_{\tau l}$ -сходимости. С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [20, 21]), что $X_i \xrightarrow{\tau l} X$ тогда и только тогда, когда $X_i P \xrightarrow{\tau} XP$ для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$, ср. с [22, с. 114]; ясно, что $t_{\tau l} \leq t_\tau$. О свойствах топологии $t_{\tau l}$ (см. [20, 21; 23–25]). Если след τ конечен, то $t_\tau = t_{\tau l}$ является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в $S(\mathcal{M}, \tau)$ [26].

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \text{tr}$ — канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$, $t_{\tau l}$ совпадает с топологией сильной операторной сходимости. Имеем

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s -чисел компактного оператора X ; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$ [27, гл. II].

Если $\mathcal{M}$ — абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f d\nu$, где (Ω, Σ, ν) — локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν) , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры (при этом почти всюду равные функции отождествляются). Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [28].

3. Основные результаты

Лемма 2 [29, лемма 2]. Если $T \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $PT + TP \geq 0$, то $TP = PT$.

Теорема 1. Пусть $T \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Тогда

- (i) если $U = 2P - I$ и $T - UTU \geq 0$, то $TP = PT$;
- (ii) если $Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $PQ = 0$ и для некоторого числа $t > 0$

$$T(P - tQ) + (P - tQ)T \geq 0, \quad (1)$$

то $TP = PT$ и $TQ = QT = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из неравенства $T - (2P - I)T(2P - I) \geq 0$ получаем

$$PT + TP - 2PTP \geq 0.$$

Поскольку $PTP \geq 0$, должно быть $PT + TP \geq 0$. В силу леммы 2 имеем $TP = PT$.

(ii). Умножив обе части неравенства (1) слева и справа на проектор Q , получаем $-2QTQ \geq 0$. Так как $QTQ \geq 0$, то $QTQ = |T^{1/2}Q|^2 = 0$ и $T^{1/2}Q = 0$. Значит, $TQ = T^{1/2} \cdot T^{1/2}Q = 0$ и $QT = (TQ)^* = 0$. Теперь из (1) следует $PT + TP \geq 0$, поэтому $TP = PT$ в силу леммы 2. Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Условие положительности оператора T существенно в п. (ii) теоремы 1. В алгебре $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ для проекторов $P := \text{diag}(0, 1)$, $Q := \text{diag}(1, 0)$ и эрмитовой матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем $T(P - Q) + (P - Q)T = 0$ (ср. с (1)), но $TP \neq PT$ и $TQ \neq 0 \neq QT$.

Теорема 2. Пусть $T \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$, $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и оператор $A := PT$ гипонормален. Тогда $TP = PT$ и $A = PTP \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $PT^2P = AA^* \leq A^*A = TPT$, умножив все части этого неравенства слева и справа на проектор P , получаем

$$0 \leq PT^2P \leq PTPPTP = (PTP)^2 = |PTP|^2.$$

Отсюда с помощью неравенства $PTPTP \leq PTITP = PT^2P$ в силу операторной монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}$ ($t \geq 0$) имеем

$$\sqrt{PT^2P} \leq |PTP| = \sqrt{PTPTP} \leq \sqrt{PT^2P},$$

т. е. $|PTP| = \sqrt{PT^2P}$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, получаем $PTPTP = PT^2P (= PTPTP + PTP^\perp TP)$. Следовательно,

$$PTP^\perp TP = |P^\perp TP|^2 = 0$$

и $P^\perp TP = 0$. Таким образом, $TP = PTP = (PTP)^* = (TP)^* = PT$ и $A = PTP \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Если оператор $A = A^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален (или когипонормален), то $A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [30, теорема 2.21] каждый оператор $A = A^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ представляется в виде произведения $A = PT$, где $P = A(A + A^* - I)^{-1} \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и обратимый в $S(\mathcal{M}, \tau)$ оператор $T = A + A^* - I$ принадлежит $S(\mathcal{M}, \tau)^h$. Теперь утверждение вытекает из спектральной теоремы. Если оператор $A = A^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ когипонормален, то $A^* = A^{*2}$ гипонормален. $\square$

Теорема 3. Пусть оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $PT = TP$ и оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $PTT^*P \leq PT^*TP$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq (PT - \lambda P)(PT - \lambda P)^* = PTT^*P - \bar{\lambda}PTP - \lambda PT^*P + |\lambda|^2 P \\ &\leq PT^*TP - |\lambda|^2 P - \lambda PT^*P + |\lambda|^2 P = PT^*\lambda P - \lambda PT^*P = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $T^*P - \bar{\lambda}P = (PT - \lambda P)^* = 0$ и $PT = \lambda P = TP$. Имеем $T|_{P\mathcal{H}} = PTP$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (PTP)^*PTP &= PT^*PTP = PT^*PPT = PT^*P\lambda P = \lambda PT^*P, \\ PTP(PTP)^* &= PTPPT^*P = PPTT^*P = PTT^*P = \lambda PT^*P. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. Пусть оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, $P_1, P_2 \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $TP_1 = \lambda_1 P_1$, $TP_2 = \lambda_2 P_2$ для некоторых ненулевых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $P_1P_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\lambda_1 \notin \{0, \lambda_2\}$ имеем $P_1T = \lambda_1 P_1$ в силу теоремы 3 и

$$\lambda_1 \lambda_2 P_1P_2 = TP_1TP_2 = TP_1TP_2 = T\lambda_1 P_1P_2 = \lambda_1 TP_1P_2 = \lambda_1 \lambda_1 P_1P_2 = \lambda_1^2 P_1P_2.$$

Следовательно, $\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)P_1P_2 = 0$ и $P_1P_2 = 0$.

Для $\lambda_2 \notin \{0, \lambda_1\}$ рассмотрим произведение $\lambda_1 \lambda_2 P_2P_1$ и аналогичным образом получим $P_2P_1 = 0 = 0^* = (P_2P_1)^* = P_1P_2$. $\square$

Теорема 4. Пусть оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

(i) Если $0 \leq TP \leq P$, то $TP = PT$.

Пусть $TP = PTP$. Тогда

(ii) оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ гипонормален; если $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален, то $TP = PT$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для оператора $A := TP$ имеем $0 \leq A \leq P$, поэтому $AP = PA = A$ в силу [31, гл. 2, п. 2.17]. Аналогичным образом из $0 \leq A^2 \leq P$ получаем $A^2P = PA^2 = A^2$. Заметим, что $PT^* = (TP)^* = A$ и $PTT^*P \leq PT^*TP$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq (PT - TP)(PT - TP)^* = PTT^*P - PTTP - TPT^*P + TPPT^* \\ &\leq PT^*TP - PTA - AT^*P + A^2 = 2A^2 - PTA - AT^*P \\ &= 2A^2 - PTPA - APT^*P = 2A^2 - PTPA - APT^*P \\ &= 2A^2 - PA^2 - A^2P = 2A^2 - A^2 - A^2 = 0 \end{aligned}$$

и $TP = PT$.

Имеем $PT^*TP \geq PTT^*P$ и $T|_{P\mathcal{H}} = PTP$. Пусть $TP = PTP$.

(ii) Легко видеть, что

$$(PTP)^*PTP = (TP)^*TP = PT^*PT \geq PTT^*P \geq PTPPT^*P = PTP(PTP)^*,$$

т. е. оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ гипонормален. Пусть $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален. Тогда $PTP(PTP)^* = (PTP)^*PTP$ и $P^\perp TP = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq (TP - PT)(TP - PT)^* = TPT^*P - TPT^*P - PTPPT^* + PTT^*P \\ &= TPT^* - TPT^*P - TPT^* + PTT^*P = -TPT^*P + PTT^*P \\ &= -PTPPT^*P + PTT^*P \leq -PTPPT^*P + PT^*TP = PT^*P^\perp TP = 0 \end{aligned}$$

и $TP = PT$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 5. Пусть $T \in \mathcal{M}_1$ и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Тогда

- (i) если $TP \geq P$, то $TP = PT = P$;
- (ii) если T гипонормален и $TT^*P = P$ (или $\tau(TT^*P) = \tau(P) < +\infty$), то $T^*TP = P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку $P \leq TP \leq I$, имеем $0 \leq TP - P \leq P^\perp \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Поэтому $0 = (TP - P)P^\perp = P^\perp(TP - P) = TP - P$ в силу [31, гл. 2, п. 2.17] и $TP = P = PT^*$. Ввиду $0 \leq TT^* \leq I$ имеем

$$0 \leq (PT - P)(PT - P)^* = PTT^*P - PTP - PT^*P + P \leq P - P = 0$$

и $PT = P$.

- (ii) Если $TT^*P = P$, то $0 \leq (T^*T)^2 \leq T^*T \leq I$ и $P = PTT^*P \leq PT^*TP \leq P$, т. е. $PTT^*P = PT^*TP = P$. (Если $\tau(TT^*P) = \tau(P) < +\infty$, то из оценок $PTT^*P \leq PT^*TP \leq P$ и

$$\tau(P) = \tau(TT^*P) = \tau(TT^*PP) = \tau(PTT^*P) \leq \tau(PT^*TP) \leq \tau(P)$$

в силу точности следа τ получаем $PTT^*P = PT^*TP = P$.) Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T^*TP - P)^*(T^*TP - P) = P(T^*T)^2P - 2PT^*TP + P \\ &= P(T^*T)^2P - P \leq P - P = 0 \end{aligned}$$

и $T^*TP = P$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ (соответственно $\mu(t; T^*P) \geq \mu(t; TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Поскольку $PT^*TP \geq PTT^*P$ для гипонормального T , в силу пп. (i), (ii) и (v) леммы 1 для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \mu(t; TP) &= \mu(t; (PT^*TP)^{1/2}) = \mu(t; PT^*TP)^{1/2} \geq \mu(t; PTT^*P)^{1/2} \\ &= \mu(t; (PTT^*P)^{1/2}) = \mu(t; T^*P). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$. Предположим, что $A_- \neq 0$ в разложении Жордана

$$T^*T - TT^* = A_+ - A_-,$$

где $A_+, A_- \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ с $A_+A_- = 0$. Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что спектральный проектор $E^{A_-}(\varepsilon, +\infty) = P$ ненулевой. Переходя при необходимости к подпроектору, считаем $\tau(P) < +\infty$. Имеем $PT^*TP - PTT^*P = -PA_-P \leq -\varepsilon P$, т. е.

$$PT^*TP + \varepsilon P \leq PTT^*P. \quad (2)$$

Рассмотрим редуцированную алгебру фон Неймана $\mathcal{M}_P = P\mathcal{M}P$ с единицей P и редуцированный точный конечный нормальный след $\tau_P = \tau(P \cdot P)$ на $\mathcal{M}_P$. Тогда

$$S(\mathcal{M}_P, \tau_P) = PS(\mathcal{M}, \tau)P$$

и для функции сингулярных значений $\mu_P(t; \cdot)$, вычисленной по следу τ_P , в силу неравенства (2) и хорошо известного представления

$$\mu(t; X) = \inf\{s > 0 : d_X(s) \leq t\}, \quad t > 0,$$

см. [19, предложение 2.2] (здесь $d_X(s) = \tau(E^{|X|}(s, +\infty))$, $s > 0$, есть функция распределения оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $E^{|X|}(s, +\infty)$ — спектральный проектор оператора $|X|$, соответствующий интервалу $(s, +\infty)$) и пп. (i) и (v) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \mu(t; T^*P)^2 &= \mu(t; |T^*P|^2) = \mu(t; PTT^*P) = \mu_P(t; PTT^*P) \geq \mu_P(t; PT^*TP + \varepsilon P) \\ &= \mu_P(t; PT^*TP) + \varepsilon = \mu(t; PT^*TP) + \varepsilon = \mu(t; |TP|^2) + \varepsilon = \mu(t; TP)^2 + \varepsilon; \end{aligned}$$

противоречие. Теорема доказана. $\square$

Следствие 3. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ нормален тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) = \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$.

Топологию $t_{\tau l}$ можно определить и в терминах функций сингулярных значений. Семейство $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\mathcal{V}}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$, где

$$\tilde{\mathcal{V}}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(\delta; XP) < \varepsilon\},$$

также задает базис окрестностей нуля для $t_{\tau l}$.

Теорема 7. Множество всех τ -измеримых гипонормальных операторов $t_{\tau l}$ -замкнуто.

Доказательство. Окрестность нуля оператора $B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в топологии $t_{\tau l}$ есть множество

$$V_{\varepsilon, \delta, P}(B) := \{A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(\delta; AP - BP) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ (см. также [20, § 2; 21, § 2; 25, § 3]). Наша теорема утверждает, что если каждая такая окрестность оператора B содержит гипонормальный оператор, то

$$\mu(t; B^*P) \leq \mu(t; BP)$$

для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ (см. теорему 6). Для фиксированного $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ рассмотрим проектор

$$Q := P \vee s_l(B^*P).$$

Так как $s_l(B^*P) \preceq P$, имеем $\tau(Q) \leq \tau(P) + \tau(s_l(B^*P)) \leq 2\tau(P) < +\infty$ и $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$.

Для лучшего понимания идеи использования гипотезы окрестностей допустим на время, что выполнена более сильная гипотеза, а именно, пусть существует гипонормальный оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такой, что

$$AQ = BQ.$$

В этом случае, переходя к сопряженным операторам, имеем $QA^* = QB^*$, а это влечет

$$\begin{aligned} \mu(t; B^*P) &= \mu(t; s_l(B^*P)QB^*P) \leq \|s_l(B^*P)\| \mu(t; QB^*P) = \mu(t; QA^*P) \\ &\leq \|Q\| \mu(t; A^*P) = \mu(t; A^*P) \leq \mu(t; AP) = \mu(t; AQ) = \mu(t; BQ) = \mu(t; BP) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$ в силу п. (iii) леммы 1 и теоремы 6 для оператора A .

Доказательство, собственно, делается снова путем проноса ε и δ вдоль приведенной выше цепочки рассуждений с использованием леммы 1 о свойствах функций сингулярных значений. Для произвольного $t > 2\delta > 0$ имеем

$$\mu(t; B^*P) = \mu(t; s_l(B^*P)QB^*P) \leq \|s_l(B^*P)\| \mu(t; QB^*P) = \mu(t; QB^*P)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(t; QB^*P - QA^*P + QA^*P) \leq \mu(\delta; QB^*P - QA^*P) + \mu(t - \delta; QA^*P) \\
&\leq \|P\| \mu(\delta; QB^* - QA^*) + \mu(t - \delta; QA^*P) = \mu(\delta; BQ - AQ) + \mu(t - \delta; QA^*P) \\
&\leq \varepsilon + \mu(t - \delta; QA^*P) \leq \varepsilon + \|Q\| \mu(t - \delta; A^*P) \leq \varepsilon + \mu(t - \delta; AP) = \varepsilon + \mu(t - \delta; AQP) \\
&= \varepsilon + \mu(t - \delta; AQP - BQP + BQP) \leq \varepsilon + \mu(\delta; AQP - BQP) + \mu(t - 2\delta; BQP) \\
&\leq 2\varepsilon + \mu(t - 2\delta; BQP) = 2\varepsilon + \mu(t - 2\delta; BP).
\end{aligned}$$

Если t — точка непрерывности функции $\mu(\cdot; BP)$, то в силу малости ε и δ получаем $\mu(t; B^*P) \leq \mu(t; BP)$ и оператор B гипонормален ввиду теоремы 6. Наконец, напомним, что функция сингулярных значений $\mu(\cdot; X)$ ($X \in S(\mathcal{M}, \tau)$) непрерывна справа на $\mathbb{R}^+$ и имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4. Множество всех τ -измеримых когипонормальных операторов $t_{\tau l}$ -замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ конечна.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что множество всех когипонормальных операторов из $S(\mathcal{M}, \tau)$ является $t_{\tau l}$ -замкнутым. Тогда множество всех τ -измеримых нормальных операторов $t_{\tau l}$ -замкнуто как пересечение двух $t_{\tau l}$ -замкнутых множеств в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Напомним, что множество $\mathcal{M}^{\text{iso}}$ всех изометрий ($U^*U = I$) является $t_{\tau l}$ -замкнутым множеством в $S(\mathcal{M}, \tau)$ [20, п. 3 леммы 3.7]. Следовательно, множество $\mathcal{M}^u$ всех унитарных операторов ($U^*U = UU^* = I$) является $t_{\tau l}$ -замкнутым множеством в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Но $\mathcal{M}^u$ $t_{\tau l}$ -замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ конечна [24, п. (i) теоремы 1].

Необходимость. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ конечна тогда и только тогда, когда инволюция $A \mapsto A^*$ $t_{\tau l}$ -непрерывна из $S(\mathcal{M}, \tau)$ в $S(\mathcal{M}, \tau)$ [20, п. 5 теоремы 4.1]. При этом если сеть $\{X_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{M}, \tau)$ когипонормальных операторов $t_{\tau l}$ -сходится к оператору $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, то $X_j^* \xrightarrow{\tau l} X^*$. Поскольку операторы X_j^* , $j \in J$, гипонормальны, оператор X^* гипонормален; поэтому X когипонормален. $\square$

Замечание 1. На алгебрах локально измеримых операторов М. А. Муравьевым и В. И. Чилиным в [32] была исследована другая топология локальной сходимости по мере, отличная от нашей топологии $t_{\tau l}$. Вопрос о замкнутости множества всех локально измеримых гипонормальных операторов в этой топологии остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogdanović K. A class of norm inequalities for operator monotone functions and hyponormal operators // Complex Anal. Oper. Theory. 2024. V. 18, N 2. Paper No. 32. 12 pp.
2. Uchiyama A. Decomposition of hyponormal operator // Nihonkai Math. J. 2023. V. 34, N 2. P. 91–102.
3. Bala N., Ramesh G. A representation of hyponormal absolutely norm attaining operators // Bull. Sci. Math. 2021. V. 171. Paper No. 103020, 15 pp.
4. Gu C., Hendricks J., Rutherford D. Hyponormality of block Toeplitz operators // Pacif. J. Math. 2006. V. 223, N 1. P. 95–111.
5. Chō M., Itoh M. Putnam's inequality for p -hyponormal operators // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 8. P. 2435–2440.
6. Curto R. E., Hwang I. S., Lee W. Y. Hyponormality and subnormality of block Toeplitz operators // Adv. Math. 2012. V. 230. P. 2094–2151.
7. Duggal B. P. On p -hyponormal contractions // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 1. P. 81–86.

8. Бикчентаев А. М. О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 3. С. 350–360.
9. Bikhchentaev A. M. Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, N 6. P. 731–741.
10. Bikhchentaev A. Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra. II // Positivity. 2020. V. 24, N 5. P. 1487–1501.
11. Бикчентаев А. М. К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 2. С. 3–11.
12. Bikhchentaev A. M. Concerning the theory of τ -measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 10. P. 4507–4511.
13. Bikhchentaev A. Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Adv. Operator Theory. 2024. V. 9, N 4. Article 83.
14. Dehimi S., Mortad M. H. Unbounded operators having self-adjoint, subnormal, or hyponormal powers // Math. Nachr. 2023. V. 296, N 9. P. 3915–3928.
15. Halmos P. R. A Hilbert space problem book, Second Edition. Berlin: Springer-Verl., 1982.
16. Takesaki M. Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5.. Berlin: Springer-Verl., 2002.
17. Dodds P. G., de Pagter B., Sukochev F. A. Noncommutative integration and operator theory. Cham: Birkhäuser, 2023 (Progress in mathematics; V. 349).
18. Takesaki M. Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.
19. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators // Pacif. J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
20. Бикчентаев А. М. Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 41–54.
21. Бикчентаев А. М. Топологии локальной сходимости по мере в алгебрах измеримых операторов // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 17–27.
22. Ciach L. J. Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.
23. Bikhchentaev A. M. The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.
24. Бикчентаев А. М. Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана, II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 783–786.
25. Бикчентаев А. М., Тихонов О. Е. Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере // Тр. МИАН. 2024. Т. 324. С. 51–59.
26. Бикчентаев А. М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
27. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
28. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
29. Бикчентаев А. М. Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях // Изв. вузов. Математика. 2016. № 5. С. 70–74.
30. Бикчентаев А. М. Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 492–503.
31. Strătilă S. V., Zsidó L. Lectures on von Neumann algebras. 2nd edition. Cambridge-IISc Series.. Delhi: Camb. Univ. Press, 2019.
32. Муратов М. А., Чилин В. И. Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 61.

С. 115–163.

Поступила в редакцию 26 сентября 2024 г.

После доработки 14 февраля 2025 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID 0000-0001-5992-3641)

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

420008 Казань, ул. Кремлевская, 18

Airat.Bikchentaev@kpfu.ru