Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 519.6+515.127

ОБ АСИМПТОТИКЕ АЛЕКСАНДРОВСКОГО n–ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА АНАЛИТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Белых

Аннотация. Найдена асимптотика александровского n-поперечника компакта аналитических периодических функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных периодических функций.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.305

Ключевые слова: компакт, аналитическая функция, топологическая размерность, александровский n-поперечник.

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию [1]. Причем содержательное представление об X извлекается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. Наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в метрический компакт, приводит к понятию александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$, который определяется, в свою очередь, как нижняя грань ε-сдвигов X в компакт топологической размерности, не большей n [2, гл. 1, 2, п. 4].

Асимптотика величины $\alpha_n(X)$ указывает точность, с которой компакт X исчерпывается (с ростом n) компактами топологической размерности n. При этом скорость убывания $\alpha_n(X)$ к нулю сравнивается с числом n свободных числовых параметров конечномерного описания X: она тем выше, чем бо́льший «запас» гладкости X. Для компактов X функций конечной и бесконечной гладкости асимптотики различаются принципиально: если в первом случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю происходит как некоторая фиксированная степень числа $1/n$, то во втором случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю осуществляется быстрее любой конечной степени $1/n$, т. е. экспоненциально (см. [2]).

Оказавшись глубоким математическим фактом, понятие александровского n-поперечника подвигло К. И. Бабенко (см. [3, гл. 3, разд. 2, п. 5]) к переосмыслению самого статуса значимости для цифровых вычислений дополнительной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задачи. Последнее привело к открытию принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных методов, практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$. В результате экстраординарная

Работа выполнена в рамках государственного задания задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

гладкость компакта X, прежде находившаяся на периферии насущных интересов компьютерных вычислений, становится их активным персонажем. Причем пик эффективности методов — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классе бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов насыщаемых: конечно разностных, конечных элементов, квадратур и др. [1, 3].

Существуют классы задач (например, эллиптические [4]), компакты X решений которых состоят из аналитических функций и задаются указанием мажоранты роста их k-х производных при $k \to \infty$. Причем формулировка основных допущений на рост мажоранты становится одним из способов их классификации.

В работе продолжено (см. [5]) изучение оценок снизу александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ компакта X бесконечно гладких функций; в частности, найдена асимптотика $\alpha_n(X, C)$ компакта X аналитических периодических функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных периодических функций. Получение результата основано на предложенной ранее автором характеризации класса C^∞-гладких функций [6], апеллирующей к его наилучшему чебышёвскому описанию тригонометрическими многочленами. Идея привлечения геометрического подхода для вычисления асимптотики $\alpha_n(X, C)$ сыграла здесь определяющую роль. К сожалению, используемый метод не удалось распространить на более общий класс компактов C^∞-гладких функций на конечном отрезке.

Отметим, что вычисление асимптотик александровских n-поперечников $\alpha_n(X, C)$ для различных классов C^∞-гладких функций — задача непростая, поддающаяся решению лишь для небольшого числа случаев (см. [2, гл. 4, разд. 3, п. 3; 5; 7, гл. 4, разд. 4.5.4]).

Обратим внимание, что предлагаемый метод получения оценок александровского n-поперечника компакта аналитических функций никак не использует ни аналитическое продолжение функций, ни представление их интегралом Коши.

1. Компакт: ε-покрытие, размерность, александровский n-поперечник

Пусть X — компакт в банаховом пространстве B и Υ — его открытое конечное покрытие. Пусть $m \geq 0$ — целое число. Покрытие Υ имеет *кратность* m, если любые $m + 1$ его элементов не пересекаются и существует m элементов, имеющих непустое пересечение. Ранее, говоря о финитизации компакта X, мы несколько неопределенно характеризовали ее, указывая лишь на то, что элементы X определяются конечным набором числовых независимых параметров. Между тем совсем не очевидно, что идею числа измерений (или размерности) можно математически сформулировать для столь общих объектов, как функциональный компакт X. Однако понятие кратности делает восприятие числа измерений внутренне непротиворечивым. Нетривиальность этого обстоятельства (понятия размерности) подчеркивает следующее

Определение (см. [7, п. 1.7.3]). Компакт X *имеет топологическую размерность* m ($\dim X = m$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие X открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$ и кратности $\leq m + 1$, но для достаточно малого ε уже не существует открытого ε-покрытия, кратность которого не превосходит m.

Итак, с каждым ε-покрытием компакта X всегда можно связать некое натуральное число, а именно число m, для которого в X существует точка, принадлежащая m различным элементам Υ. Указанное определение вполне соответствует интуитивному восприятию размерности, например, куба $\mathbb{I}^m$ с ребром $d > 0$:

$$\mathbb{I}^m \equiv \mathbb{I}^m_d = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m : |\xi_r| \le d/2, r = 0, 1, \dots, m-1\}, \tag{1.1}$$

поскольку его содержательность подкреплена теоремой Лебега — Брауэра: $\dim \mathbb{I}^m = m$.

Александровский m-поперечник компакта X определяется так [2, гл. 1, разд. 2, п. 4]:

$$\alpha_m(X, B) = \inf_{(X^m,\nu)} \sup_{f \in X \subset B} \|f - \nu(f)\|, \tag{1.2}$$

где inf берется по всевозможным парам (X^m, ν), состоящим из лежащего в банаховом пространстве B компакта X^m топологической размерности m и непрерывного отображения $\nu : X \to X^m$.

Пусть $m \ge 0$ — целое число и

$$l^m_\infty = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in \mathbb{R}^m,\ |\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max_{r=0,1,\dots,m-1} |\,\xi_r|\}.$$

Справедлива следующая важная для дальнейшего (см. [1])

Лемма 1. *Если $\mathbb{I}^m_d$ — куб с длиной ребра d и $\dim \mathbb{I}^m_d = m$, то $\alpha_{m-1}(\mathbb{I}^m_d, l^m_\infty) = d/2$.*

Согласно следствию теоремы 1.4 из работы [1] справедливость леммы вытекает из теоремы 2 (см. [7, п. 4.1.1]) и следствия теоремы 4 (см. [7, п. 4.1.2]).

2. Периодический случай: основные факты, определения и результат

Проведению оценок александровского m-поперечника компакта аналитических функций предпошлем ряд вспомогательных определений и результатов, связанных непосредственно с их приближением многочленами. Начнем с определений.

Вещественная бесконечно дифференцируемая на конечном отрезке S функция $\varphi(t)$ называется *аналитической*, если для каждой точки t этого отрезка имеет место разложение $\varphi(t)$ в сходящийся ряд Тейлора:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k, \quad t, s \in S.$$

Критерием аналитичности функции $\varphi(t)$ служит следующая классическая

Теорема 1. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(s)$ была аналитической на конечном замкнутом отрезке S, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные константы c и A, что*

$$|\varphi^{(k)}(s)| \le cA^k k^k \quad (s \in S) \quad c > 0,\ A > 0,\ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.1}$$

Пусть $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t \in [0,2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности $S \equiv [0, 2\pi]$

функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом их продолжении на всю ось $\mathbb{R}$; пусть $C^k \equiv C^k[S]$ — пространство таких непрерывно $k \geq 0$ раз дифференцируемых на S периодических функций; через $C^\infty \equiv C^\infty[S]$ обозначим класс 2π-периодических бесконечно дифференцируемых на единичной окружности S функций.

Пространство аналитических 2π-периодических на S функций обозначим через $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$. Всякую $\varphi(t)$ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ отождествим с ее тригонометрическим рядом

$$\varphi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{2p}\cos pt + c_{2p-1}\sin pt) \equiv \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \pi_p(t). \tag{2.2}$$

Ряд (2.2) является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ и потому

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt, \quad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt \quad \forall p \geq 1.$$

Пусть $\mathscr{T}^m \subset \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс тригонометрических многочленов порядка $\leq m$ и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m \in \mathscr{T}^m} \|\varphi - \iota_m\|, \quad m \geq 0, \ \varphi \in C. \tag{2.3}$$

Здесь inf осуществляется всегда на некотором элементе (многочлене) из $\mathscr{T}^m$.

Классический подход к описанию C^k-гладких периодических функций φ основан на использовании неравенств Фавара — Ахиезера — Крейна для $k \geq 0$ (см. [3, гл. 3, разд. 1, п. 5]):

$$e_m(\varphi) \leq \mathscr{K}_k \cdot \frac{\|\varphi^{(k)}\|}{m^k}, \ m \geq 0, \quad \mathscr{K}_k \equiv \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\{G(k)\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Согласно известной теоремы Арцела множество периодических функций

$$\widetilde{K}_G^\infty \equiv \{\varphi \in \widetilde{\mathbb{A}}^\infty : \|\varphi\| \leq G(0), \ \|\varphi^{(k)}\| \leq G(k), \forall k > 0\} \tag{2.4}$$

является компактом в пространстве C непрерывных на окружности S функций.

В работе [6] дано описание класса 2π-периодических C^∞-гладких функций (не обязательно аналитических!) в терминах функции

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leq r < 1, \\ \inf\limits_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k} & \text{при} \quad r \geq 1, \end{cases}$$

Теорема 2 (см. [6]). *При $r \geq 1$ функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $r \to \infty$. При этом $\mu(r)$ стремится к нулю быстрее любой конечной степени числа r, т. е. для любого $p \geq 0$ верно равенство* $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\mu(r) = 0$.

Обратим внимание, что в определении функции $\mu(r)$ знак inf всегда можно заменить на min и потому согласно неравенству Фавара — Ахиезера — Крейна имеем

$$\mu(r) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k}, \quad \text{отсюда} \quad e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m). \tag{2.5}$$

Поскольку компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ задается (см. (2.4)) указанием мажоранты $G(k)$ роста k-х производных его элементов и при этом вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (2.2), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $\widetilde{K}_G^\infty$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей этот компакт $\widetilde{K}_G^\infty$?

Лемма 2 [5]. *Если функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$, то*

$$|c_0| \le 2G(0), \quad |c_{2p-1}| \le 2\mu(p), \quad |c_{2p}| \le 2\mu(p) \quad \forall p \ge 1.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ удовлетворяют

$$|c_0| \le G(0), \quad |c_{2p-1}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad |c_{2p}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2} \quad \forall p \ge 1,$$

то функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$ (см. (2.4)).

Отождествив компакт (2.4) с множеством тригонометрических рядов (2.2), мы создаем конструктивный аппарат для получения нужных оценок.

Действительно, для функции $\mu(r)$ из класса $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$, т. е. когда $G(k) = cA^k k^k$, справедливы следующие двусторонние оценки (подробности см. в [6]):

$$ce^{-\varrho r} \le \mu(r) \le ce^{0.5eA}e^{-\varrho r}, \quad \varrho = 1/(Ae). \tag{2.6}$$

Сложность внутреннего устройства класса C^∞-гладких функций на конечном отрезке S свяжем с поведением (с ростом параметра m) функции

$$\gamma(m) = \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)}, \quad m \ge 0.$$

Для аналитического класса $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$ справедлив следующий простой факт:

$$\begin{aligned}\gamma(m) \equiv \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} &= \sum_{r=0}^{m} e^{-\varrho(m-r)} = e^{-\varrho m}\sum_{r=0}^{m} e^{\varrho r} \\ &= e^{-\varrho m}(1 + e^{\varrho} + e^{2\varrho} + e^{3\varrho} + \ldots + e^{m\varrho}) \\ &= \frac{e^{\varrho} - e^{-\varrho m}}{e^{\varrho} - 1} \le \frac{e^{\varrho}}{e^{\varrho} - 1} = \Big(1 + \frac{1}{e^{\varrho} - 1}\Big) \equiv \varkappa, \quad \varrho = \frac{1}{Ae}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Приближение (2.3) периодических функций тригонометрическими многочленами порядка не выше $m-1$ определяет подпространство $\mathscr{T}^{m-1} \subset C$ тригонометрических многочленов топологической размерности $\dim \mathscr{T}^{m-1} = 2m-1$.

Оценка сверху для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ (см. (1.2), (2.5)) получена в [5]:

$$\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C) \le \inf_{(\mathscr{T}^{m-1},\nu)} \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} \|\varphi - \nu(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} e_{m-1}(\varphi) \le \frac{\pi}{2}\mu(m-1). \tag{2.8}$$

Найдем оценку снизу для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$. Поступим так, как это было проделано в работе [5]. Необходимую роль здесь сыграли соображения об использовании свойств монотонности поперечника $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ по включению множеств и невозрастания его величины как функции цифрового параметра m. Действительно, если компакт X_0 можно линейно и изометрично отобразить в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, то $\alpha_{2m}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$.

В качестве X_0 удобно выбрать куб $\mathbb{Q}^{2m+1} \subset \widetilde{K}_G^\infty$, для которого $\alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C)$ эффективно вычисляется.

В самом деле, пусть φ из $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ и $\varphi(t) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \pi_r(t)$, тогда для любого $k \geq 0$

$$\|\varphi^{(k)}\| \leq G(k), \quad \mu(r) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k},$$

$$\|\pi_r^{(k)}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix}^{(k)} \right\| \leq r^k \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad \gamma(m) \leq \varkappa < \infty.$$

Введя функции (см. (2.7))

$$\phi_r(t) \equiv \frac{\mu(m)}{2\varkappa} \pi_r(t) \leq \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \pi_r(t) = \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_r^c(t) \\ \phi_r^s(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq m,$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} \left\|\phi_r^{(k)}(t)\right\| &= \frac{\mu(m)}{2\varkappa} \left\|\pi_r^{(k)}(t)\right\| \leq \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \|\pi_r^{(k)}(t)\| \leq \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot \frac{r^k}{G(k)} \\ &\leq \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot \left(\min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k} \right)^{-1} = \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot (\mu(r))^{-1} \\ &\leq \frac{G(k)}{2\gamma(m)} \cdot \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \leq \frac{G(k)}{2} < G(k) \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Функции $\phi_r(t)$ линейно независимы и принадлежат компакту $\widetilde{K}_G^\infty$; их линейные комбинации $\omega(t) = \sum\limits_{r=0}^{m} \big(\xi_r \phi_r^c(t) + \eta_r \phi_r^s(t)\big)$ при $|\xi_r|, |\eta_r| \leq 1$ также принадлежат $\widetilde{K}_G^\infty$:

$$\|\omega^{(k)}(t)\| \leq \sum_{r=0}^{m} \big(|\xi_r| \left\|\phi_r^{c(k)}(t)\right\| + |\eta_r| \left\|\phi_r^{s(k)}(t)\right\|\big) \leq \frac{G(k)}{\gamma(m)} \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \leq G(k) \quad \forall k \geq 0.$$

В компакте $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$, как и в работе [5], определим семейство функций

$$\mathbb{Q}^{2m+1} = \left\{ \omega(t) = \sum_{r=0}^{m} (\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt) : |\xi_r|, |\eta_r| \leq \frac{\mu(m)}{2\varkappa}, \ r = 0, 1, \ldots, m \right\}, \tag{2.9}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — вещественные числа.

Пусть $|\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max\{|\xi_0|/2, |\xi_1|, \ldots, |\xi_m|\}$, $|\boldsymbol{\eta}|_\infty = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, \ldots, |\eta_m|\}$.

Куб

$$\mathbb{I}^{2m+1} = \left\{ \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{2m+1} : |\zeta_r| \leq \frac{\mu(m)}{2\varkappa}, \ r = 0, 1, \ldots, 2m \right\}, \quad \varkappa = \frac{e^\varrho}{e^\varrho - 1}, \ \varrho = \frac{1}{Ae},$$

топологической размерности $2m+1$ с длиной ребра $d = \frac{\mu(m)}{\varkappa}$ линейно и гомеоморфно с не уменьшением расстояния (т. е. изометрично (см. [3, гл. 3, разд. 7, предложение 3]) вкладывается в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, и его образом является множество (2.9), поскольку

$$|\boldsymbol{\zeta}|_\infty \equiv \max(|\boldsymbol{\xi}|_\infty, |\boldsymbol{\eta}|_\infty) \leq \sqrt{2} \cdot \left\| \xi_0/2 + \sum_{r=1}^{m} (\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt) \right\|. \tag{2.10}$$

Оценка (2.10) получена с использованием неравенства Бесселя (см. [3, гл. 2, разд. 3, п. 1]):

$$|\boldsymbol{\zeta}|_\infty^2 \equiv \left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{2}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2$$
$$\le \overbrace{\left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{\sqrt{2}}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2}$$
$$\le \frac{\xi_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{m}\bigl(\xi_r^2+\eta_r^2\bigr) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega^2(t)\,dt \le 2\max_{t\in[0,2\pi]}|\omega(t)|^2 = 2\|\omega\|^2.$$

Отсюда согласно сказанному выше и леммы 1 находим оценку снизу:

$$\alpha_{2m}\bigl(\widetilde{K}_G^\infty, C\bigr) \ge \alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\alpha_{2m}(\mathbb{I}^{2m+1}, l_\infty^{2m+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mu(m)}{(2\varkappa)}.$$

Теорема 3. *Компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ аналитических периодических на окружности S функций с мажорантой $G(k) = cA^kk^k$ $(c > 0,\ A \ge 1)$ обладает следующей асимптотикой александровских m-поперечников* (см. (2.6) *и подробности в* [6])*:*

$$a\cdot e^{-\varrho m} \le \alpha_{2m}\bigl(\widetilde{K}_G^\infty, C\bigr) \le \alpha_{2m-1}\bigl(\widetilde{K}_G^\infty, C\bigr) \le b\cdot e^{-\varrho m}, \quad m > 0.$$

Здесь

$$a = c\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{e^\varrho-1}{e^\varrho}, \quad b = c\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{(0.5e+\varrho+0.5/\varrho)}, \quad \varrho = 1/(eA)$$

— вещественные постоянные.

Благодарность. Автор выражает благодарность рецензенту за интересные предложения и полезные замечания, способствующие лучшему восприятию результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms. Part 1, 2 // Comput. Methods Appl. Engin. 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152.
2. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1977.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.
4. *Belykh V. N.* Unsaturated algorithms for the numerical solution of elliptic boundary value problems in smooth axisymmetric domains // Sib. Adv. Math. 2022. V. 32, N 3. P. 157–185.
5. *Белых В. Н.* Оценки александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких на конечном отрезке функций // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 3–14.
6. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.

Поступила в редакцию 21 мая 2024 г.
После доработки 10 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Белых Владимир Никитич (ORCID 0000-0002-4428-3087)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru