Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 510.67

О СЛАБО КОГОЛОГРАФИЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Н. А. Баженов,
Б. Касымканулы, А. С. Морозов

Аннотация. Вводится и изучается понятие слабой когологрaфичности, обобщающее понятие голографичности и в некотором смысле являющееся двойственным к понятию слабой голографичности. Получены описания слабо когологрaфичных полей и абелевых групп, доказана слабая когологрaфичность любых ординалов и эквивалентностей, счетных булевых алгебр. Дана полная картина соотношений между свойствами голографичности, слабой голографичности, слабой когологрaфичности и счетной категоричности.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.304

Ключевые слова: голографичность, голографичные структуры, слабо голографичные структуры, слабо когологрaфичные структуры, категоричные структуры.

В данной работе мы продолжаем начатое в работах [1, 2] изучение возможностей задания алгебраических структур путем «размножения» некоторой конечной части такой структуры с помощью различных классов морфизмов. Можно сказать, что в таких структурах значение истинности предикатов на кортежах элементов можно определять путем некоторого сравнения этих кортежей с подходящим кортежем, все элементы которого содержатся в некотором априори фиксированном конечном эталонном множестве, так называемом *множестве прототипов*. Способы сравнения при этом могут варьироваться. При различных способах сравнения с элементами эталонного множества возникают различные варианты голографичности. Общее название семейства подобных свойств — *голографичность* — было выбрано в силу того, что эти свойства некоторым образом перекликаются со свойством специфических физических изображений — голограмм, в которых часть голограммы может содержать информацию обо всем изображении.

Ранее в упомянутых работах изучались свойства голографичности и слабой голографичности, определения которых будут даны чуть позже. Здесь мы изучаем новое свойство структур, которое мы назвали *слабой когологрaфичностью*.

Всюду далее мы подразумеваем, что рассматриваемые нами сигнатуры конечны и состоят только из предикатных символов. Даже в случаях, когда мы говорим об операциях, все равно в соответствующих ситуациях подразумеваем, что на самом деле работаем не с самими операциями, а с их предикатными

Б. Касымканулы и А. С. Морозов поддержаны грантом МОН РК No. AP19677451. А. С. Морозов поддержан также базовым проектом Минобрнауки РФ No. FWNF 2022–0012. Работа Н. А. Баженова поддержана Nazarbayev University Faculty Development Competitive Research Grant 201223FD8823.

представлениями. Максимальное число аргументов сигнатурных символов сигнатуры $\|\sigma\|$ будем называть ее *высотой.* Так, например, высота сигнатуры упорядоченных множеств равна 2, а высота сигнатуры для полей или колец равна 3.

Определение 1. Структура $\mathfrak{A}$ конечной предикатной сигнатуры σ называется *слабо кологолографичной*, если она содержит конечное подмножество M такое, что для любого $S \subseteq \mathfrak{A}$ мощности, не превосходящей высоту сигнатуры σ, существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ такое, что $S \subseteq \varphi(M)$. Множество M при этом называется *множеством прототипов* этой структуры.

Если заменить в определении выше «изоморфное вложение» на «автоморфизм», то получим определение голографичности (в оригинале [1] $\varphi(S) \subseteq M$, но эта формулировка эквивалентна данной). Если в этом же определении заменить $S \subseteq \varphi(M)$ на $\varphi(S) \subseteq M$, то получим определение слабой голографичности [2]. В работе [1] было также отмечено, что любая не более чем счетная счетно категоричная структура конечной сигнатуры является голографичной и приведен пример счетной голографичной, но не счетно категоричной структуры. К сожалению, авторам до сих пор не известны другие примеры таких структур. Поиск новых подобных примеров представляет несомненный интерес.

Очевидно, что голографичность структуры влечет как ее слабую голографичность, так и слабую кологолографичность.

В работах [1, 2] наряду с доказательством некоторых общих свойств голографичных и слабо голографичных структур получены также полные или частичные описания структур, обладающих соответствующим свойством голографичности для классов абелевых групп, линейных порядков, булевых алгебр, эквивалентностей и полей.

Данная работа организована примерно по той же схеме, что и предшествующие ей вышеупомянутые работы [1, 2].

1. Общие свойства

Некоторые общие свойства слабо кологолографичных структур очень похожи на свойства голографичных и слабо голографичных структур из уже упомянутых работ [1, 2].

Следующее утверждение достаточно очевидно.

Предложение 1. *Декартово произведение двух слабо кологолографичных структур слабо кологолографично. При этом в качестве множества прототипов для декартова произведения можно взять декартово произведение множеств прототипов исходных структур.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — слабо кологолографичная структура сигнатуры σ и M — ее множество прототипов. Тогда любое ее подмножество мощности строго меньшей чем $\|\sigma\|$ порождает в ней подструктуру мощности не более чем $|M|^{\|\sigma\|}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{s}$ — произвольный конечный кортеж из попарно различных элементов структуры $\mathfrak{A}$, длина которого строго меньше, чем $\|\sigma\|$, и пусть S — множество всех его элементов. Обозначим через $\langle S\rangle$ основное множество подструктуры, порожденной в $\mathfrak{A}$ множеством S. Для каждого $a \in \langle S\rangle$ определим кортеж $\psi(a) \in M^{|\overline{s}|}$ следующим образом: сначала фиксируем некоторое изоморфное вложение $\varphi_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ со свойством $\varphi_a(M) \supseteq S \cup \{a\}$ (здесь под $\varphi_a^{-1}(\overline{s})$ мы понимаем соответствующий кортеж), а затем полагаем $\psi(a) =$

$\langle\varphi_a^{-1}(\overline{s}), \varphi_a^{-1}(a)\rangle$. Покажем, что ψ инъективно. Предположим, что $\psi(a_0) = \psi(a_1)$. Из равенства

$$\langle\varphi_{a_0}^{-1}(\overline{s}), \varphi_{a_0}^{-1}(a_0)\rangle = \langle\varphi_{a_1}^{-1}(\overline{s}), \varphi_{a_1}^{-1}(a_1)\rangle$$

получаем, что отображения $\varphi_{a_0}^{-1}$ и $\varphi_{a_1}^{-1}$ совпадают на S, а также и $\varphi_{a_0}^{-1}(a_0) = \varphi_{a_1}^{-1}(a_1)$. Далее зафиксируем терм t со свойством $a_1 = t(\overline{s})$. Имеем

$$\varphi_{a_0}^{-1}(a_0) = \varphi_{a_1}^{-1}(a_1) = \varphi_{a_1}^{-1}(t(\overline{s})) = t\big(\varphi_{a_1}^{-1}(\overline{s})\big) = t\big(\varphi_{a_0}^{-1}(\overline{s})\big) = \varphi_{a_0}^{-1}(t(\overline{s})) = \varphi_{a_0}^{-1}(a_1).$$

Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получаем $a_0 = a_1$.

Итак, отображение ψ из множества $\langle S\rangle$ разнозначно. Его множество значений содержит не более чем $|M|^{|\overline{s}|+1}$, а значит и не более чем $|M|^{\|\sigma\|}$ элементов. Отсюда получаем, что и мощность множества $\langle S\rangle$ не превосходит $|M|^{\|\sigma\|}$. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что рассмотрение голографичных структур бесконечных сигнатур не имеет смысла. Отметим, что такой же результат верен и для голографичных и слабо голографичных структур (см. [1, 2]).

Теорема 2. *Предположим, что $\mathfrak{A}$ — структура сигнатуры конечной высоты, удовлетворяющая определению слабой кологографичности, в котором опущено требование конечности сигнатуры. Тогда среди ее сигнатурных предикатов можно выбрать такое конечное подмножество, что любой ее сигнатурный предикат совпадает с одним из выбранных.*

Доказательство похоже на доказательства аналогичных результатов о голографичных и слабо голографичных структурах в [1, 2].

Пусть M — множество прототипов для $\mathfrak{A}$, и пусть P — произвольный n-арный сигнатурный предикат нашей структуры. Стрелкой $\hookrightarrow$ будем обозначать изоморфное вложение. Из определения непосредственно следует, что

$$\mathfrak{A} \models P(\overline{x}) \leftrightarrow \exists\varphi : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}(\{\overline{x}\} \subseteq \varphi(M) \land \varphi^{-1}(\overline{x}) \in M^n \cap P).$$

Отсюда следует, что для любых n-арных предикатов P_0 и P_1 из $M^n \cap P_0 = M^n \cap P_1$ следует $P_0 = P_1$. В силу конечности числа множеств вида $M^n \cap P$ число различных n-арных предикатов в $\mathfrak{A}$ будет конечным. Поскольку наша сигнатура имеет конечную высоту, число попарно различных предикатов в $\mathfrak{A}$ также будет конечным. Теорема доказана.

2. Абелевы группы

Напомним, что группа называется *группой ограниченной экспоненты*, если она удовлетворяет тождеству $x^n = 1$ для некоторого натурального $n > 0$.

Оказывается, что слабая кологографичность для абелевых групп эквивалентна голографичности.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *G слабо кологографична,*

(2) *G — группа ограниченной экспоненты,*

(3) *G голографична,*

(4) *G слабо голографична.*

Действительно, если группа слабо кологографична, то из теоремы 1 следует, что она является группой ограниченной экспоненты. Следовательно, по [1, теорема 6] она голографична. В силу [2, теорема 8] это свойство эквивалентно слабой голографичности. Далее, из голографичности следует и слабая кологографичность (т. е. п. 1). Теорема доказана.

3. Линейные порядки

Здесь покажем, что класс всех счетных слабо когологрaфичных порядков весьма широк. Конечные линейные порядки, а также счетные счетно категоричные плотные линейные порядки (как и все счетно категоричные структуры конечной сигнатуры), голографичны и, следовательно, они слабо когологрaфичны. Слабая когологрaфичность также сохраняется при произведениях и суммировании конечного числа порядков. Также покажем, что любой ординал (не обязательно счетный) слабо когологрaфичен. Отметим, что несчетные не слабо когологрaфичные линейные порядки существуют. В качестве примера можно привести линейный порядок мощности 2^ω, не имеющий нетривиальных изоморфных вложений в самого себя, построенный в работе [3]. Вопрос о существовании счетных не слабо когологрaфичных порядков остается открытым.

Предложение 2. *Если порядки L_0 и L_1 слабо когологрaфичны, то порядки $L_0 + L_1$ и $L_0 \times L_1$ также слабо когологрaфичны.*

Доказательство. Пусть L_0 и L_1 — непересекающиеся слабо когологрaфичные линейные порядки и M_0, M_1 — их множества прототипов соответственно. Как нетрудно проверить, множества $M_0 \cup M_1$ и $M_0 \times M_1$ годятся в качестве множеств прототипов соответственно для $L_0 + L_1$ и $L_0 \times L_1$. Предложение доказано.

Теорема 4. *Любой ординал слабо когологрaфичен.*

Доказательство. Ввиду того, что любой ординал α представим в виде конечной суммы вида $\alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \dots + \omega^{\beta_{k-1}} \cdot m_{k-1}$, где $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ — ординалы, а $m_0, \dots, m_{k-1} \in \omega$, из предложения 2 следует, что достаточно доказать слабую когологрaфичность любого ординала вида ω^α, где α — произвольный ординал.

Если γ и β — ординалы и $\gamma \leq \beta$, то через $\beta - \gamma$ будем обозначать такой (единственный) ординал δ, что $\gamma + \delta = \beta$.

Лемма 4.1. *Пусть β — ненулевой ординал. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *β представим в виде ω^α, где α — ординал,*

(2) *для любого $\gamma < \beta$ выполнено $\beta - \gamma = \beta$.*

Доказательство леммы. Докажем импликацию (1) $\to$ (2) индукцией по α. Предположим, что для всех ординалов, меньших чем α, утверждение доказано.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Ординал α непредельный.

Пусть $\alpha = \alpha_0 + 1$. Тогда $\omega^\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot \omega = \omega^{\alpha_0} + \omega^{\alpha_0} + \cdots$ и, следовательно, для подходящего $k < \omega$ выполнено $\gamma < \omega^{\alpha_0} \cdot k$ и наш ординал изоморфно вкладывается в свой сегмент, начинающийся с $\omega^{\alpha_0} \cdot k$. Отсюда получаем $\omega^\alpha \leq \omega^\alpha - \gamma$. Обратное неравенство $\omega^\alpha - \gamma \leq \omega^\alpha$ очевидно. В итоге получаем $\omega^\alpha - \gamma = \omega^\alpha$.

Случай 2. Ординал α предельный.

Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Поскольку $\omega^\alpha - \gamma \leq \omega^\alpha$, достаточно убедиться, что $\omega^\alpha \leq \omega^\alpha - \gamma$. Обозначим конфинальность α через $\mathrm{cf}(\alpha)$. Зафиксируем строго возрастающую последовательность ординалов $(\alpha_\delta)_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)}$ такую, что $\alpha = \bigcup\limits_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} \alpha_\delta$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\alpha_0 = 0$ и для предельных $\beta < \alpha$ выполнено $\alpha_\beta = \bigcup\limits_{\delta<\beta} \alpha_\delta$. В силу только что сделанных предположений получаем

$$\omega^\alpha = \bigcup_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} \omega^{\alpha_\delta} = \bigcup_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} [\omega^{\alpha_\delta}, \omega^{\alpha_{\delta+1}}).$$

Зафиксируем некоторый ординал $\delta_0 < \mathrm{cf}(\alpha)$ со свойством $\gamma < \omega^{\alpha_{\delta_0}}$. Поскольку $\mathrm{cf}(\alpha)$ является еще и кардиналом, для любого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ будет выполнено $\delta_0 + \tau < \mathrm{cf}(\alpha)$. Далее, заметим, что порядковый тип любого интервала вида $[\omega^{\alpha_\lambda}, \omega^{\alpha_{\lambda+1}})$, $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$, равен $\omega^{\alpha_{\lambda+1}} - \omega^{\alpha_\lambda}$, который, в свою очередь, по предположению индукции равен $\omega^{\alpha_{\lambda+1}}$. Отсюда следует, что для любого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ порядковый тип интервала $[\omega^{\alpha_\tau}, \omega^{\alpha_{\tau+1}})$ меньше либо равен порядкового типа интервала $[\omega^{\alpha_{\delta_0+\tau}}, \omega^{\alpha_{\delta_0+\tau+1}})$. Для каждого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ зафиксируем изоморфное вложение

$$\psi_\tau : [\omega^{\alpha_\tau}, \omega^{\alpha_{\tau+1}}) \to [\omega^{\alpha_{\delta_0+\tau}}, \omega^{\alpha_{\delta_0+\tau+1}}).$$

Легко проверить, что отображение $\psi = \bigcup\limits_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} \psi_\delta$ будет изоморфным вложением из ω^α в $\omega^\alpha - \gamma$, откуда получаем $\omega^\alpha \le \omega^\alpha - \gamma$.

Докажем импликацию (2) $\to$ (1). Пусть ординал $\beta \ne 0$ обладает свойством (2). Рассмотрим разложение β по степеням ω:

$$\beta = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k,$$

где все m_i — ненулевые натуральные числа и $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$ — ординалы. Если $k > 1$ или $m_k > 1$, то β можно представить в виде суммы некоторого ординала $\gamma < \beta$ и ω^{α_k}, причем $\omega^{\alpha_k} = \beta - \gamma < \beta$. Это означает, что $k = 1$ и $m_k = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Любой ординал вида ω^α слабо коголографичен.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. В остальных случаях из леммы 4.1 легко получаем, что в качестве множества прототипов можно взять множество, состоящее из первого и второго элементов этого порядка. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

4. Булевы алгебры

Известно, что существуют несчетные нетривиальные булевы алгебры, не допускающие нетривиальных вложений в себя (см. обзор [4]), откуда следует существование не слабо коголографичных булевых алгебр. Тем не менее класс слабо коголографичных булевых алгебр оказывается достаточно широким.

Будем использовать представление булевых алгебр в виде алгебр над порядками: если L — линейный порядок с наименьшим элементом, то через $\mathfrak{B}_L$ будем обозначать булеву алгебру, порожденную в множестве всех подмножеств L замкнутыми слева и открытыми справа интервалами $[a, b)$, $a, b \in L$.

Теорема 5. 1. *Любая булева алгебра вида $\mathfrak{B}_\alpha$ где α — произвольный ординал (не обязательно счетный), слабо коголографична.*

2. *Любая не более чем счетная булева алгебра слабо коголографична.*

Доказательство. Докажем п. 1. Нам понадобится следующая очевидная

Лемма 5.1. *Пусть $\varphi : L_0 \to L_1$ — изоморфное вложение линейных порядков, обладающих наименьшими элементами и переводящее наименьший элемент из L_0 в наименьший элемент из L_1. Тогда отображение*

$$[a,b) \mapsto [\varphi(a), \varphi(b)), \quad a,b \in L_0,$$

однозначно продолжается до изоморфного вложения $\overline{\varphi}$ из $\mathfrak{B}_{L_0}$ в $\mathfrak{B}_{L_1}$.

Под *разбиением единицы* в булевой алгебре будем понимать любое семейство вида $(a_i)_{i<k}$, состоящее из ее ненулевых элементов, такое, что при $i \neq j$ выполнено $a_i \cap a_j = 0$, а $\bigcup\limits_{i<k} a_i = 1$.

Лемма 5.2. *Пусть $(a_i)_{i<8}$ — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ и для любого разбиения единицы $(b_j)_{j<8}$ этой алгебры существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ такое, что*

$$\varphi(\{a_i \mid i < 8\}) = \{b_i \mid i < 8\}.$$

Тогда $\mathfrak{B}$ слабо кохолографична и булева алгебра $\mathfrak{M}$, порожденная множеством $\{a_i \mid i < 8\}$, является множеством ее прототипов.

Доказательство леммы. Пусть $x_0, x_1, x_2 \in \mathfrak{B}$. Эти элементы порождают в $\mathfrak{B}$ конечную подалгебру, содержащую не более восьми атомов. Из существования разбиения единицы из восьми элементов следует, что в нашей алгебре имеется достаточно элементов, чтобы расширить эту подалгебру до подалгебры $\mathfrak{B}'$ с ровно восемью атомами. Семейство этих атомов образует разбиение единицы. Возьмем изоморфное вложение φ как в условии леммы, переводящее разбиение $(a_i)_{i<8}$ в семейство атомов алгебры $\mathfrak{B}'$. Тогда $\varphi(\mathfrak{M}) \supseteq \{x_0, x_1, x_2\}$, что и требовалось. Лемма доказана.

В дальнейшем через $\mathfrak{B} \restriction a$ будем обозначать ограничение булевой алгебры $\mathfrak{B}$ на ее элемент a.

Лемма 5.3. *Если $\mathfrak{B}$ —булева алгебра $a \in \mathfrak{B}$ и булевы алгебры $\mathfrak{B} \restriction a$ и $\mathfrak{B} \restriction \overline{a}$ слабо кохолографичны, то $\mathfrak{B}$ слабо кохолографична.*

Доказательство леммы. Следует из предложения 1 и хорошо известного разложения $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B} \restriction a \times \mathfrak{B} \restriction \overline{a}$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.4. *Пусть $L_1, \ldots, L_k$ — линейные порядки с наименьшими элементами. Тогда $\mathfrak{B}_{L_1+\cdots+L_k} \cong \mathfrak{B}_{L_1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{L_k}$.*

Лемма 5.5. *Для любого ординала α булева алгебра $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ слабо кохолографична.*

Доказательство леммы. Для $\alpha = 0$ лемма очевидна.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Пусть $0 < 1 < \ldots < 7$ — первые 8 элементов ординала ω^α. Покажем, что множество элементов конечной подалгебры, порожденной в $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ множеством $A = \{a_i \mid i < 8\}$, где

$$a_i = \begin{cases} [i, i+1) & \text{при } i < 7, \\ [7, \omega^\alpha) & \text{при } i = 7, \end{cases}$$

годится в качестве множества прототипов. Заметим, что $(a_i)_{i<8}$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$. Для доказательства достаточно проверить для этого разбиения выполнение условий леммы 5.2.

Пусть $(b_i)_{i<8}$ — произвольное разбиение единицы в нашей алгебре. Каждый из элементов b_i есть объединение конечного семейства попарно не пересекающихся непустых интервалов вида $[a,b) \subseteq \omega^\alpha$, где $a,b \in \omega^\alpha \cup \{\infty\}$. Пусть $L_0,\dots,L_k$ — список всех таких интервалов, участвующих в образовании элементов b_i в порядке их следования. Заметим, что L_k как самый правый из них имеет вид $[a,\omega^\alpha)$, где $a<\omega^\alpha$. Без ограничения общности рассуждений считаем, что $L_k \subseteq b_7$. По лемме 5.4 имеем $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha} \cong \mathfrak{B}_{L_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L_k}$. Переставим элементы последовательности $L_0,\dots,L_k$, сначала расположив в порядке следования интервалы, содержащиеся в b_0, потом в порядке следования интервалы, содержащиеся в b_1, и т. д. В результате получим новую последовательность интервалов $L'_0,\dots,L'_k$ со свойством $L'_k = L_k$.

Имеем последовательность естественных изоморфизмов

$$\mathfrak{B}_{L_0+\dots+L_k} \cong \mathfrak{B}_{L_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L_k} \cong \mathfrak{B}_{L'_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L'_k} \cong \mathfrak{B}_{L'_0+\dots+L'_k}.$$

Обозначим композицию этих изоморфизмов из $\mathfrak{B}_{L_0+\dots+L_k}$ на $\mathfrak{B}_{L'_0+\dots+L'_k}$ через φ. Нетрудно видеть, что в L существуют точки $c_0,c_1,\dots,c_7$ такие, что c_0 — наименьший элемент в L, $c_0<c_1<\ldots<c_7$, $\varphi(b_i)=[c_i,c_{i+1})$ для всех $i=0,\dots,6$ и $\varphi(b_7)=[c_7,\infty)$

В силу леммы 4.1 промежуток $[c_7,\infty)$ в L, а также $[7,\infty)$ в ω^α изоморфны ω^α. Зафиксируем изоморфизм $\theta_0 : [7,\infty) \to [c_7,\infty)$ между этими интервалами и расширим его до изоморфного вложения θ из ω^α в L, положив

$$\theta(x) = \begin{cases} c_x, & \text{если } x<7,\\ \theta_0(x), & \text{если } x \geq 7. \end{cases}$$

Заметим, что θ сохраняет наименьший элемент. По лемме 5.1 θ продолжается до изоморфного вложения $\widehat{\theta} : \mathfrak{B}_{\omega^\alpha} \to \mathfrak{B}_L$. При этом $\widehat{\theta}([i,i+1)) = [c_i,c_{i+1})$ при всех $i<7$ и $\widehat{\theta}([7,\omega^\alpha)) = [c_7,\infty)$. Остается заметить, что $\varphi^{-1}\widehat{\theta}$ также является изоморфным вложением из $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ в себя и $\varphi^{-1}\widehat{\theta}(a_i)=b_i$ для всех $i<8$.

Лемма доказана.

Теперь все готово для завершения доказательства п. 1 теоремы. Пусть α — произвольный ординал. Представим его в виде

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\cdot k_0 + \omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_l}\cdot k_l$$

для подходящих $l,k_0,\dots,k_l<\omega$ и ординалов $\alpha_0>\alpha_1>\dots>\alpha_k$. Имеем

$$\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_0}\cdot k_0+\omega^{\alpha_1}\cdot k_1+\dots+\omega^{\alpha_k}\cdot k_l} \cong (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_0}})^{k_0} \times (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_1}})^{k_1} \times \dots \times (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_k}})^{k_l}.$$

Теперь п. 1 нашей теоремы следует из лемм 5.4, 5.5 и предложения 1.

Докажем п. 2 теоремы. Пусть $\mathfrak{B}$ — не более чем счетная булева алгебра. Поскольку все счетные суператомные булевы алгебры имеют вид $\mathfrak{B}_\alpha$, где α — подходящий счетный ординал (см. [5]), все не более чем счетные суператомные булевы алгебры слабо кологографичны. Если число ее атомов конечно, то она счетно категорична и, следовательно, слабо кологографична. Остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{B}$ — счетная не суператомная алгебра с бесконечным числом атомов. Зафиксируем в ней 7 атомов, которые обозначим через a_i, $i<7$, и положим $a_7 = 1 \cap \overline{\bigcup_{i<7} a_i}$. Покажем, что разбиение единицы $(a_i)_{i<8}$ удовлетворяет условиям леммы 5.2, откуда и будет следовать слабая кологографичность $\mathfrak{B}$. Пусть $(b_i)_{i<8}$ — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{B}$. Среди алгебр $\mathfrak{B} \upharpoonright b_i$ имеется не суператомная булева алгебра, поскольку в противном случае сама алгебра $\mathfrak{B}$, изоморфная $\mathfrak{B} \upharpoonright b_0 \times \cdots \times \mathfrak{B} \upharpoonright b_7$, была бы суператомной. Без ограничения общности считаем, что алгебра $\mathfrak{B} \upharpoonright b_7$ не суператомна и, следовательно, содержит счетную безатомную булеву подалгебру. Для каждого $i < 7$ пусть φ_i будет (единственным) изоморфным вложением из двухэлементной алгебры $\mathfrak{B} \upharpoonright a_i$ в алгебру $\mathfrak{B} \upharpoonright b_i$, а в качестве φ_7 зафиксируем какое–нибудь изоморфное вложение алгебры $\mathfrak{B} \upharpoonright a_7$ в $\mathfrak{B} \upharpoonright b_7$, которое существует в силу того, что последняя содержит счетную безатомную булеву подалгебру, в которую, как хорошо известно, изоморфно вкладывается любая счетная булева алгебра. Теперь определим вложение $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ как

$$\varphi(x) = \bigcup_{i<8} \varphi_i(x \cap a_i).$$

Очевидно, что $\varphi(a_i) = b_i$ для всех $i < 8$.

Теорема доказана.

5. Эквивалентности

Здесь под эквивалентностью будем понимать в зависимости от ситуации как предикатную структуру, единственным сигнатурным отношением которой является эта эквивалентность, так и само это отношение. Эти два понятия незначительно отличаются: всякая структура должна иметь непустое основное множество, в то время как сами эквивалентности можно рассматривать и на пустом множестве. Тем не менее мы надеемся, что это не приведет к недоразумениям. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Любая эквивалентность слабо кологолографична.*

Нам понадобится следующее описание голографичных эквивалентностей.

Теорема 7 [2, теорема 11]. *Произвольное отношение эквивалентности голографично тогда и только тогда, когда множество мощностей его классов конечно.*

Доказательство теоремы 6. Следующая лемма очевидна.

Лемма 7.1. *Пусть E_0 и E_1 — слабо кологолографичные эквивалентности на непересекающихся множествах S_0 и S_1 соответственно. Тогда эквивалентность $E = E_0 \cup E_1$ также слабо кологолографична.*

Пусть E — произвольная эквивалентность. Ее можно представить в виде $E = E_0 \cup E_1$, где E_0 и E_1 — эквивалентности на непересекающихся множествах такие, что все классы E_0 одноэлементны, а все классы E_1 содержат как минимум два элемента. Эквивалентность E_0 либо пуста, либо по теореме 7 слабо кологолографична. Поэтому в силу леммы 7.1 достаточно доказать теорему для случая, когда все классы эквивалентности E содержат как минимум два элемента.

Зафиксируем некоторое взаимно однозначное отображение $\gamma \mapsto A_\gamma$ из подходящего ординала α на множество всех классов эквивалентности E такое, что выполняется условие

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \to |A_{\gamma_0}| \leq |A_{\gamma_1}|. \tag{1}$$

Пользуясь тем, что по теореме 4 ординал α слабо кологолографичен, зафиксируем в α множество прототипов M_0, и в каждом классе A_γ, $\gamma \in M$, также зафиксируем не равные между собой элементы a_γ и b_γ. Покажем, что множество $M = \{a_\gamma, b_\gamma \mid \gamma \in M_0\}$ годится в качестве множества прототипов для E.

Проверим выполнимость определения слабой кохолографичности для E. Возьмем произвольные x_0 и x_1, $x_0 \neq x_1$, и рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\langle x_0, x_1 \rangle \notin E$.

Возьмем ординалы $\gamma_0, \gamma_1 < \alpha$ такие, что $x_0 \in A_{\gamma_0}$ и $x_1 \in A_{\gamma_1}$. Очевидно, что $\gamma_0 \neq \gamma_1$. Пусть $\psi : \alpha \to \alpha$ — изоморфное вложение α в себя со свойством $\psi(M_0) \supseteq \{\gamma_0, \gamma_1\}$. Пусть $\delta_0 = \psi^{-1}(\gamma_0)$ и $\delta_1 = \psi^{-1}(\gamma_1)$. Поскольку ψ — вложение ординалов, для всех $\delta < \alpha$ справедливо $\delta \leq \psi(\delta)$, откуда в силу (1) также имеем $|A_\delta| \leq |A_{\psi(\delta)}|$. Ввиду этого для каждого $\delta < \alpha$ можно зафиксировать вложение $\psi_\delta : A_\delta \to A_{\psi(\delta)}$, удовлетворив при этом условия $\psi_{\delta_0}(a_{\delta_0}) = x_0$ и $\psi_{\delta_1}(a_{\delta_1}) = x_1$. Очевидно, что отображение $\varphi = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \psi_\delta$ является изоморфным вложением E в себя со свойством $\varphi(M) \supseteq \{x_0, x_1\}$.

Случай 2. $\langle x_0, x_1 \rangle \in E$.

Пусть ординал $\gamma < \alpha$ таков, что $x_0, x_1 \in A_\gamma$. Возьмем изоморфное вложение $\psi : \alpha \to \alpha$ со свойством $\psi(M_0) \supseteq \{\gamma\}$. Пусть $\mu = \psi^{-1}(\gamma)$. Так же, как и в случае 1, можно для каждого $\delta < \alpha$ зафиксировать вложение $\psi_\delta : A_\delta \to A_{\psi(\delta)}$, удовлетворив при этом условия $\psi_\mu(a_\mu) = x_0$ и $\psi_\mu(b_\mu) = x_1$. Тогда отображение $\varphi = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \psi_\delta$ является изоморфным вложением E в себя со свойством $\varphi(M) \supseteq \{x_0, x_1\}$.

Тем самым мы доказали существование требуемого в определении изоморфного вложения, а вместе с этим и саму теорему.

6. Поля

Теорема 8. *Пусть F — поле. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *F — конечное поле,*
(2) *F слабо кохолографично,*
(3) *F слабо голографично,*
(4) *F голографично.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (3) и (4) доказана в [2, теорема 9]. Остается доказать эквивалентность пп. (1) и (2).

Импликация (1)⇒(2) очевидна. Докажем импликацию (2)⇒(1). Пусть F — слабо кохолографичное поле. Тогда его характеристика конечна, так как в противном случае множество $\{1\}$ порождало бы бесконечную подструктуру. По той же самой причине поле F не может иметь трансцендентных элементов, и это означает, что все элементы поля F алгебраичны над его простым подполем.

Из теоремы 1 следует, что порядки всех элементов F относительно умножения ограничены в совокупности, т. е. существует натуральное число n со свойством $x^n = 1$ для всех $x \neq 0$. В силу этого степени всех минимальных многочленов для элементов из F над его простым подполем также ограничены в совокупности, а это означает, что такие многочлены образуют конечное множество. Поскольку любой многочлен имеет лишь конечное число корней, само поле F конечно. Теорема доказана.

7. Соотношения между типами голографичности

Обозначим через H класс всех счетных голографичных структур, WH — класс всех счетных слабо голографичных структур, WCH — класс всех счетных слабо кологографичных структур, а C — класс всех счетных счетно категоричных структур конечной предикатной сигнатуры.

Картину взаимного расположения данных классов дает следующая

Теорема 9. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WH} \supset & \mathrm{H} & \subset \mathrm{WCH}, \quad \mathrm{WCH} \nsubseteq \mathrm{WH}, \quad \mathrm{WH} \nsubseteq \mathrm{WCH} \\ & \cup & \\ & \mathrm{C} & \end{array}$$

причем все вышеупомянутые включения строгие.

Доказательство. Справедливость включений H $\subseteq$ WH, WCH и C $\subseteq$ H очевидна. Докажем, что эти включения строгие, т. е. что обратные к ним включения не выполнены.

Включение WH $\subseteq$ H не имеет места, поскольку любая счетная атомная не суператомная алгебра слабо голографична (см. [2, теорема 5]), содержит бесконечное число атомов и поэтому не является голографичной (см. [1, теорема 4]).

Включение WCH $\subseteq$ H не имеет места, поскольку любая счетная булева алгебра с бесконечным количеством атомов по теореме 5 слабо кологографична, но не голографична в силу [1, теорема 4].

Пример, показывающий, что H $\nsubseteq$ C, построен в [1, теорема 2].

В качестве примера структуры, доказывающего соотношение WCH $\nsubseteq$ WH, можно взять любую счетную суператомную булеву алгебру, например $\mathfrak{B}_\omega$. Действительно, она принадлежит классу WCH согласно п. 2 теоремы 5 и не принадлежит классу WH по теореме 5 из [2], утверждающей, что любая счетная булева алгебра слабо голографична тогда и только тогда, когда она не суператомна.

Для доказательства оставшегося утверждения WH $\nsubseteq$ WCH построим структуру $\mathscr{A}$ сигнатуры $\sigma = \{R^2, E^2\}$, являющуюся слабо голографичной, но не слабо кологографичной. Стоит отметить, что эта структура имеет вычислимую копию.

Напомним, что счетный неориентированный граф без петель G является *случайным графом* (random graph) в том и только том случае, когда для произвольных конечных множеств $X, Y \subseteq \mathrm{dom}(G)$ таких, что $X \cap Y = \varnothing$, в графе G существует вершина $v \notin X \cup Y$ такая, что v соединена ребром с каждой вершиной из X и v не соединена ребром ни с какой вершиной из Y (см., например, теорему 6.4.4 в [6]).

Зададим искомую структуру $\mathscr{A}$ по следующим правилам.

• Структура $(\mathrm{dom}(\mathscr{A}), R)$ есть неориентированный граф без петель.

• Отношение E является эквивалентностью на множестве $\mathrm{dom}(\mathscr{A})$, имеющей счетное число классов эквивалентности. Пусть $[a_0]_E$, $[b_0]_E$, $[a_1]_E$, $[b_1]_E, \ldots$ — это перечисление без повторений множества всех классов эквивалентности E.

• Если элементы x и y лежат в разных E-классах, то $\mathscr{A} \models \neg R(x, y)$.

• Для каждого $k \in \omega$ подструктура $([a_k]_E, R \restriction [a_k]_E)$ изоморфна случайному графу.

• Для каждого $k \in \omega$ подструктура $([b_k]_E, R \restriction [b_k]_E)$ есть цикл длины $k+3$.

Отметим следующее свойство структуры $\mathscr{A}$: если $x \notin [b_k]_E$, то подграф $([x]_E, R \restriction [x]_E)$ не вкладывается изоморфно в $([b_k]_E, R \restriction [b_k]_E)$.

(1) Структура $\mathscr{A}$ слабо голографична. Действительно, множество прототипов M можно построить следующим образом. Выберем произвольные элементы $c, d \in [a_0]_E$ такие, что $a_0 \notin \{c, d\}$ и $\mathscr{A} \models R(a_0, c) \wedge \neg R(a_0, d)$. Полагаем $M = \{a_0, c, d, a_1\}$.

Опираясь на свойства случайного графа, нетрудно показать, что для любой пары вершин x, y из $\mathscr{A}$ существует изоморфное вложение $\varphi\colon \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}$ такое, что $\varphi(\{x, y\}) \subset M$.

(2) Структура $\mathscr{A}$ не является слабо кологолографичной. Действительно, предположим, что M — конечное множество прототипов, свидетельствующее о слабой кологолографичности для $\mathscr{A}$. Тогда выберем произвольное b_k такое, что $M \cap [b_k]_E = \varnothing$.

Пусть φ — произвольное изоморфное вложение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$, и пусть $b_k = \varphi(a)$ для некоторого a. Нетрудно понять, что $a \in [b_k]_E$. Отсюда вытекает, что $\{b_k\} \not\subseteq \varphi(M)$, приходим к противоречию с предположением о слабой кологолографичности.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымканулы Б., Морозов А. С.* О голографичных структурах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 401–410.
2. *Касымканулы Б., Морозов А. С.* О слабо голографичных структурах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1276–1289.
3. *Dushnik B., Miller E. W.* Concerning similarity transformations of linearly ordered sets // Bull. Am. Math. Soc. 1940. V. 46, N 4. P. 322–326.
4. *van Douwen E.K., Monk J. D., Rubin M.* Some questions about Boolean algebras // Algebra Univers. 1980. V. 11. P. 220–243.
5. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
6. *Hodges W.* A shorter model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1997.

Поступила в редакцию 27 ноября 2024г.
После доработки 22 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Баженов Николай Алексеевич (ORCID 0000-0002-5834-2770)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
bazhenov@math.nsc.ru

Касымканулы Борибай (ORCID 0000-0002-5112-034X)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва,
ул. Пушкина 11, Астана 010008, Казахстан
boribay@mail.ru

Морозов Андрей Сергеевич (ORCID 0000-0001-8647-5629)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru