

ОБ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Асеев

Аннотация. Рассматривается непрерывное открытое конечнократное отображение f области G , содержащей замкнутое множество E . Для каждого натурального k рассматривается множество $E(k)$ (возможно, пустое) всех тех точек из E , в которых f принимает значение с кратностью k по области G . Пусть каждая точка из $E(k)$ имеет окрестность, в которой ограничение f на $E(k)$ инъективно и обратное к нему отображение является слабо (h, H) -квазисимметрическим. Если при этом f квазирегулярно вне E , то оно будет квазирегулярным на всей области G . Эта теорема является обобщением достаточного признака устранимости замкнутых множеств в классе квазиконформных отображений, полученного в статье [J. Väisälä, Manuscripta math., 69, 101–111 (1990)].

DOI 10.33048/smzh.2025.66.303

Ключевые слова: квазиконформное отображение, квазирегулярное отображение, слабо квазисимметрическое отображение, непрерывное открытое дискретное отображение, модуль семейства путей, емкость конденсатора.

Введение

Описание устранимых особенностей для заданного класса отображений (или функций) остается одной из важнейших задач современного математического анализа. В рамках теории функций эта проблема подробно рассматривалась, например, в фундаментальной статье [1], где было дано описание основных типов устранимых множеств для разных классов аналитических функций. В частности, там был выделен класс NED замкнутых множеств, не влияющих на модуль семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора. В 1956 г. И. Н. Песин в работе [2] доказал, что класс устранимых множеств для плоских квазиконформных отображений совпадает с классом NED -множеств, т. е. множеств, не влияющих на конформную емкость конденсаторов. Изучению свойств NED -множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ была посвящена статья Вайсяля [3]. Устранимость NED -множеств для пространственных квазиконформных отображений была доказана в [4] в 1974 г. Различные варианты задачи об устранимых множествах для емкости пространственных конденсаторов специального вида и для квазиконформных отображений были рассмотрены в работах В. А. Шлыка [5–8]. В статье Вайсяля [9] 1990 г. доказана устранимость замкнутого множества E для отображений, квазиконформных вне E и локально квазисимметрических на E . В данной работе будет доказано, что аналогичная теорема справедлива и в классе отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

Отображения с ограниченным искажением областей в $\mathbb{R}^n$ появились в работах Ю. Г. Решетняка в его статьях 1965/67 г. в результате естественного распространения аналитического определения квазиконформности на случай неинъективных отображений класса $W_{n,\text{loc}}^1$. Богатая теория этих отображений с их применением в теории соболевских функциональных пространств была изложена Ю. Г. Решетняком в его монографии [10]. В 1969/71 гг. топологические и метрические аспекты отображений с ограниченным искажением изучались в работах [11–13], где они рассматривались как специальный подкласс в классе непрерывных открытых дискретных отображений и были названы квазирегулярными (в более общей трактовке — квазиморфными) отображениями. Очень удобным для использования оказалось введенное в [11] метрическое определение квазирегулярности, не требующее априорного наличия дифференциальных свойств отображения.

Квазисимметрические (в более общем варианте — квазимёбиусовы) отображения метрических пространств были введены в [14] в целях распространения свойства квазиконформности на случай отображений произвольных метрических (в частности, дискретных) пространств без необходимости постулирования их дифференциальных свойств. В формулировке и в доказательстве основной теоремы об устранимости мы используем менее ограничительное условие слабой (h, H) -квазисимметричности, следуя [15]. Возможность такого усиления своей теоремы об устранимости в классе квазиконформных отображений была кратко упомянута Вайсяля в [9, 3.6, замечание 1].

В § 0 и § 1 приведены определения основных понятий, используемых в формулировке и доказательстве основной теоремы об устранимости. В § 2 доказывается лемма 2.1, необходимая для получения основного результата. Это наиболее трудоемкий этап в наших построениях. Наконец, § 3 содержит формулировку и доказательство итогового результата данной статьи (теорема 3.1). Заметим, что во всех доказательствах используются лишь те свойства квазирегулярных отображений, которые приведены в статьях [11–13].

§ 0. Обозначения и терминология

Для произвольного множества $X \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ через $\overline{X}$ или $\text{Cl}(X)$ обозначаем его замыкание в пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}$, а через ∂X или $\partial(X)$ — его границу.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r, s > 0$ используются обозначения:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}; \quad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\};$$

$$\overline{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r); \quad B(x_0; r, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < s\};$$

$$\overline{B}(x_0; r, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x - x_0| \leq s\}.$$

Для $(n-1)$ -мерной меры единичной сферы $S(x_0, 1)$ в $\mathbb{R}^n$ используем стандартный символ ω_{n-1} .

(0.0). Пусть в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) заданы непрерывное открытое дискретное отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in f(\Omega)$, и замкнутое относительно Ω множество $E \subset \Omega$.

Во всем дальнейшем тексте множества Ω , E , отображение f и число N считаем фиксированными.

Будем предполагать известным понятие (*конформного*) модуля $\text{Mod}(\Gamma)$ семейства путей Γ (открытых или замкнутых) в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Определение и свойства

модулей семейства путей см. в монографии Вайсяля [16, гл. 1]. В частности, в дальнейшем тексте следующие свойства будут использоваться по умолчанию.

[16, 6.10]. Для любого семейства Γ путей в $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\Gamma')$, где семейство Γ' состоит из всех спрямляемых путей $\gamma \in \Gamma$.

[16, 3.2]. Каждый открытый спрямляемый путь в $\mathbb{R}^n$ имеет два конца и имеет единственное продолжение до замкнутого пути.

[16, замечание 7.11]. Если в семействе Γ открытых путей в $\mathbb{R}^n$ оставить только спрямляемые пути, продолженные до замкнутых путей, то конформный модуль этого семейства не изменится. Таким образом, при рассмотрении конформного модуля $\text{Mod}(\Gamma)$ можно считать, что Γ состоит из спрямляемых замкнутых путей. При этом конформный модуль пустого семейства полагается равным нулю.

[16, 6.3, 6.4]. Семейство путей Γ *длиннее* семейства путей Γ' , если любой путь $\gamma \in \Gamma$ содержит подпуть $\gamma' \in \Gamma'$. В этом случае $\text{Mod}(\Gamma) \leq \text{Mod}(\Gamma')$.

Для двух непересекающихся замкнутых множеств F_0, F_1 в $\mathbb{R}^n$ и открытого множества U символом $\Gamma(F_0, F_1; U)$ обозначаем семейство всех спрямляемых путей $\gamma : (0, 1) \rightarrow U$, соединяющих F_0 и F_1 , т. е. имеющих концы $\gamma(0) \in F_0$, $\gamma(1) \in F_1$.

[11, 5.2–5.4]. *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$ называется пара $\mathbf{C} = (U, F)$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а F — непустое компактное подмножество в U . Для каждого конденсатора определена величина $\text{Cap}(\mathbf{C})$ — его *конформная емкость*.

[17, теорема 7.8, замечание 7.9]. Для любого конденсатора (U, F) в $\mathbb{R}^n$

$$\text{Cap}(U, F) = \text{Mod}(\Gamma(F, \partial U; U)). \quad (0.1)$$

Область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, дополнение к которой имеет в точности две компоненты, называется *кольцевой областью*. В частности, *шаровой слой* $B(x_0; r, s)$ (spherical ring) является кольцевой областью, а число

$$\Lambda(B(x_0; r, s)) := \log(s/r)$$

называем его *толщиной*. Шаровой слой $B(x_0; s, r)$ можно рассматривать как конденсатор $(B(x_0, r), \overline{B}(x_0, s))$, и тогда (см. [16, 7.5])

$$\text{Cap}(B(x_0; s, r)) = \text{Mod}(\Gamma(S(x_0, s), S(x_0, r); B(x_0; s, r))) = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r/s))^{n-1}}. \quad (0.2)$$

§ 1. Квазирегулярные и слабо квазисимметрические отображения

Точка $x_0 \in \Omega$ называется *регулярной*, если существует такая окрестность $U(x_0) \subset \Omega$, что ограничение $f|_{U(x_0)}$ является гомеоморфизмом. В противном случае x_0 называется *точкой ветвления*. Множество всех точек ветвления обозначается символом B_f . Его топологическая размерность $\dim B_f \leq n - 2$ (см. [11, лемма 2.11]), поэтому можно считать без ограничения общности, что f сохраняет ориентацию в каждой компоненте множества Ω .

[11, 2.4] Область $D \subset \Omega$ с компактным замыканием $\overline{D} \subset \Omega$ называется *нормальной* относительно отображения f , если $f(\partial D) = \partial(f(D))$. В этом случае $f^{-1}(f(D)) \cap \overline{D} = D$ и $f^{-1}(f(\partial D)) \cap \overline{D} = \partial D$. Указанные здесь прообразы могут иметь точки вне множества $\overline{D}$.

[11, 2.8] Для точки $x_0 \in \Omega$ и $r > 0$ символом $U(x_0, f, r)$ обозначается компонента открытого множества $f^{-1}(B(f(x_0), r))$, содержащая точку x_0 .

1.1. Лемма [11, лемма 2.9]. Для каждой точки $x_0 \in \Omega$ существует число $\sigma(x_0) > 0$ такое, что при $0 < r \leq \sigma(x_0)$ множества $U(x_0, f, r)$ являются нормальными областями со следующими свойствами:

$$f(U(x_0, f, r)) = B(f(x_0), r); f(\partial U(x_0, f, r)) = S(f(x_0), r); \quad (1.1.1)$$

$$U(x_0, f, r) \cap f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}; \quad (1.1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{diam}(U(x_0, f, r)) = 0; \quad (1.1.3)$$

$$U(x_0, f, r) = U(x_0, f, \sigma(x_0)) \cap f^{-1}(B(f(x_0), r)); \quad (1.1.4)$$

$$\partial U(x_0, f, r) = U(x_0, f, \sigma(x_0)) \cap f^{-1}(S(f(x_0), r)) \text{ при } r < \sigma(x_0); \quad (1.1.5)$$

$$\text{множества } \mathbb{R}^n \setminus U(x_0, f, r) \text{ и } \mathbb{R}^n \setminus \text{Cl}(U(x_0, f, r)) \text{ связны.} \quad (1.1.6)$$

При этом

если $0 < r < s \leq \sigma(x_0)$, то $\text{Cl}(U(x_0, f, r)) \subset U(x_0, f, s)$ и множество

$$U(x_0, f, s) \setminus \text{Cl}(U(x_0, f, r)) \text{ является кольцевой областью.} \quad (1.1.7)$$

Множества $U(x_0, f, r)$, указанные в лемме 1.1, называем *каноническими нормальными окрестностями* точки x_0 и в дальнейшем тексте обозначаем их через $U(x_0, r)$ с учетом того, что отображение f фиксировано. При этом через $\overline{U}(x_0, r)$ обозначаем замыкание канонической нормальной окрестности $U(x_0, r)$. Для краткости вводим обозначения

$$U(x_0; r, s) := U(x_0, s) \setminus \text{Cl}(U(x_0, r)); \quad \overline{U}(x_0; r, s) := \text{Cl}(U(x_0; r, s)). \quad (1.1.8)$$

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [11, определение 4.2, теорема 1.14]. Для точки $x \in \Omega$ и $r \in (0, \sigma(x))$ величина (возможно, $+\infty$)

$$H^*(x, f) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max\{|z - x| : z \in \partial U(x, r)\}}{\min\{|z - x| : z \in \partial U(x, r)\}} \quad (1.2.1)$$

называется *обратной линейной дилатацией* отображения f в точке x .

Отображение f называется *K^* -квазирегулярным* на открытом множестве $D \subset \Omega$, если величина $H^*(x, f)$ локально ограничена в D и $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$.

Для K^* -квазирегулярного отображения *внешняя дилатация* $K_O(f)$ и *внутренняя дилатация* $K_I(f)$ (см. определение в [11, 2.20]) удовлетворяют неравенству

$$\max\{K_O(f), K_I(f)\} \leq (K^*)^{n-1}, \quad (1.2.2)$$

которое легко проверяется в регулярных точках дифференцируемости отображения f .

1.3. Утверждение [11, теорема 4.6]. Если f является K^* -квазирегулярным на открытом множестве $D \subset \Omega$ и $\#(f^{-1}(y) \cap D) \leq N$ для всех $y \in f(D)$, то $H^*(x, f) \leq C^*$ всюду в D с константой C^* , зависящей лишь от $\{K^*, N, n\}$.

1.3.1. Для отображения f , заданного в $(0, 0)$, и подмножества $M \subset \Omega$ положим

$$H^*(M, f) := \sup_{x \in M} H^*(x, f).$$

При этом будем считать, что $H^*(\emptyset, f) = 1$.

На любом открытом подмножестве $D \subset \Omega$ оценка $H^*(D, f) \leq H^* < +\infty$ дает H^* -квазирегулярность отображения $f|_D$. Верно и обратное (см. утверждение 1.3): из K^* -квазирегулярности $f|_D$ вытекает оценка $H^*(D, f) \leq H^*$ с константой H^* , зависящей лишь от $\{K^*, N, n\}$.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [15, определение 1.2]. Инъективное отображение $\varphi : A \rightarrow \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *слабо (h, H) -квазисимметрическим* с константами $h > 0$ и $H \geq 1$, если для любых точек a_1, a_2, a_3 из A справедлива импликация

$$(|a_1 - a_3| \leq h \cdot |a_1 - a_2|) \Rightarrow (|\varphi(a_1) - \varphi(a_3)| \leq H \cdot |\varphi(a_1) - \varphi(a_2)|). \quad (1.4.1)$$

Заметим, что любое η -квазисимметрическое отображение в смысле [14] является слабо (h, H) -квазисимметрическим с любым $h \geq 1$ и $H = \eta(h)$.

1.5. Утверждение. Если $\#A < 3$, то любое инъективное отображение $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$ является слабо (h, H) -квазисимметрическим с любыми $h > 0$ и $H \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\#A \leq 2$, то для выбора трех точек a_1, a_2, a_3 в A имеются лишь 4 варианта:

$$a_1 = a_2 = a_3; \quad a_1 = a_2 \neq a_3; \quad a_1 = a_3 \neq a_2; \quad a_2 = a_3 \neq a_1.$$

Проверка истинности импликации (1.4.1) в каждом из этих вариантов осуществляется непосредственно.

1.6. Утверждение. Пусть $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi : A \rightarrow \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ — слабо (h, H) -квазисимметрическое отображение с константами $h > 1$, $H \geq 1$.

Если множество $A_0 \subset A \setminus \{a\}$ лежит в замкнутом шаровом слое с центром a и толщиной $\leq \log(h)$, то его образ $\varphi(A_0)$ лежит в замкнутом шаровом слое с центром $\varphi(a)$ и толщиной $\leq \log(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально верно в случае $\#A < 2$. Для любой пары различных точек x_1, x_2 из A_0 выполняется неравенство

$$\frac{|x_1 - a|}{|x_2 - a|} \leq h.$$

Тогда для их образов $y_1 = \varphi(x_1)$ и $y_2 = \varphi(x_2)$ имеем оценку

$$\frac{|y_1 - \varphi(a)|}{|y_2 - \varphi(a)|} \leq H.$$

Следовательно,

$$\frac{\sup\{|y - \varphi(a)| : y \in \varphi(A_0)\}}{\inf\{|y - \varphi(a)| : y \in \varphi(A_0)\}} \leq H.$$

Утверждение доказано.

§ 2. Основная лемма

Для фиксированного выше отображения $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедлива следующая

2.1. Лемма. Пусть $x_0 \in \Omega$, $\sigma(x_0)$ — число, указанное в лемме 1.1, и $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$. Пусть $U(x_0, \sigma_0)$ — каноническая нормальная окрестность, и пусть замкнутое множество $E' \subset \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ таково, что

$$(2.1.1) \quad x_0 \in E';$$

$$(2.1.2) \quad f^{-1}(f(x)) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = \{x\} \text{ для всех } x \in E';$$

(2.1.3) ограничение $f|_{E'}$ инъективно (это вытекает из (2.1.2)) и обратное к нему отображение $\varphi(y) = f^{-1}(y) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) : f(E') \rightarrow E'$ является слабо (h, H) -квазисимметрическим с константами $h > 1$, $H \geq 1$;

(2.1.4) отображение f является Q^* -квазирегулярным на $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E'$, где $0 < r_1 < r_2 < \sigma_0$ и $r_2/r_1 \leq h$.

Тогда

$$C_2^* \leq \frac{\max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\}}{\min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\}} \leq C_1^* \quad (2.1.5)$$

с константами C_1^* и $C_2^* > 0$, зависящими только от Q^*, h, H, N, n и r_2/r_1 . Эти оценки верны и в случае $U(x_0; r_1, r_2) \cap E' = \emptyset$ или $U(x_0; r_1, r_2) \subset E'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $y_0 := f(x_0)$, $U_0 := U(x_0, \sigma_0)$, $E_0 := E' \cap \overline{U}(x_0; r_1, r_2)$ и $g := f|_{U_0}$. Отображение $g : U_0 \rightarrow g(U_0) = B(y_0, \sigma_0)$ остается непрерывным, открытым и дискретным. Для любого множества $Y \subset B(y_0, \sigma_0)$

$$g^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) \cap U_0.$$

Поэтому из (1.1.4) и (1.1.5) для любого $t \in (0, \sigma_0)$ вытекают равенства

$$g^{-1}(B(y_0, t)) = U(x_0, t); \quad g^{-1}(\partial B(y_0, t)) = \partial U(x_0, t). \quad (2.1.6)$$

Следовательно, для любых $0 < t < s < \sigma_0$

$$g^{-1}(B(y_0; t, s)) = U(x_0; t, s); \quad g^{-1}(\partial B(y_0; t, s)) = \partial U(x_0; t, s). \quad (2.1.7)$$

Так как $g^{-1}(g(x)) = \{x\}$ для всех $x \in E'$ (см. (2.1.2)), то

$$g^{-1}(g(E_0)) = E_0. \quad (2.1.8)$$

Поэтому

$$(x \in E_0) \Leftrightarrow (g(x) \in g(E_0)); \quad (x \notin E_0) \Leftrightarrow (g(x) \notin g(E_0)). \quad (2.1.9)$$

Заметим, что

$$g(U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0) = B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0). \quad (2.1.10)$$

Действительно, если $x \in U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$, то (см. (2.1.9)) $g(x) \notin g(E_0)$ и (см. (1.1.1)) $g(x) \in B(y_0; r_1, r_2)$, т. е. $x \in B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)$. Следовательно,

$$g(U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0) \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0).$$

Обратное включение тривиально верно (см. [18, §3.III(3)]).

Теперь убедимся, что

$$g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)) = U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0. \quad (2.1.11)$$

Действительно, (2.1.10) дает включение

$$U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0 \subset g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)).$$

Если $x \in g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0))$, то $g(x) \in B(y_0; r_1, r_2)$ и $g(x) \notin g(E_0)$. Значит, $x \in g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2)) = U(x_0; r_1, r_2)$ (см. (2.1.7)) и $x \notin E_0$ (см. (2.1.9)), т. е. $x \in U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$. Получаем обратное включение

$$g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)) \subset U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$$

и требуемое равенство (2.1.11).

Отметим точки $x_{\max} \in \partial U(x_0, r_1)$ и $x_{\min} \in \partial U(x_0, r_2)$, для которых

$$a_1 := |x_{\max} - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\};$$

$$a_2 := |x_{\min} - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\}.$$

В утверждении 1.6 положим $a := y_0$, $A := f(E')$, $\varphi(y) = f^{-1}(y) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) : A \rightarrow E'$, $A_0 := f(E_0)$. Так как множество A_0 содержится в замкнутом шаровом слое $\overline{B}(y_0; r_1, r_2)$ с центром a и толщиной $\log(r_2/r_1) \leq \log(h)$, то множество $\varphi(A_0) = E_0$ содержится (по утверждению 1.6) в некотором замкнутом шаровом слое с центром x_0 и толщиной $\leq \log(H)$.

Для доказательства левой половины неравенства (2.1.5) нужно найти верхнюю оценку для величины $T := a_2/a_1$.

Пусть $T > H^3$. Тогда шаровой слой $B(x_0; a_1, a_2)$ с толщиной $\log T > 3 \cdot \log(H)$ лежит в кольцевой области $U(x_0; r_1, r_2)$ (см. определение величин a_1 и a_2). Поэтому множество E_0 либо лежит вне шара $B(x_0, a_1 \cdot T^{1/3})$ (случай 1), либо содержится в шаре $\overline{B}(x_0, a_2 \cdot T^{-1/3})$ (случай 2).

Для того чтобы последующие рассуждения были справедливы в любом из этих двух случаев, вводим нижний индекс $i = 1$ в случае 1 и $i = 2$ в случае 2.

Построим сферу $S_i = S(x_0, a_1^{1/6}(a_i^{2/3})a_2^{1/6})$ (т. е. $S_1 = S(x_0, a_1 \cdot T^{1/6})$, $S_2 = S(x_0, a_2 \cdot T^{(-1/6)})$). В каждом из этих случаев ($i \in \{1, 2\}$) сфера S_i не пересекается с E_0 и множество $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ имеет компоненту D_i , содержащую сферу S_i . Так что получаем конденсатор $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$.

Шаровой слой $\mathcal{R}_i$, ограниченный сферами $S(x_0, a_i)$ и $S(x_0, a_1^{1/3}(a_i^{1/3})a_2^{1/3})$, лежит в области D_i и разрезается сферой S_i на два шаровых слоя $\mathcal{R}_i^1$ и $\mathcal{R}_i^2$ одинаковой толщины $(1/6) \log T$.

Пусть Γ_i^j ($j \in \{1, 2\}$) — семейство всех путей в шаровом слое $\mathcal{R}_i^j$, соединяющих его граничные сферы. В силу (0.2) имеем равенство

$$\text{Mod}(\Gamma_i^1) = \text{Mod}(\Gamma_i^2) = \frac{\omega_{n-1}}{((1/6) \log T)^{n-1}}.$$

Семейства путей Γ_i^1 и Γ_i^2 лежат в непересекающихся областях, поэтому (см. [16, теорема 6.7])

$$\text{Mod}(\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2) = \text{Mod}(\Gamma_i^1) + \text{Mod}(\Gamma_i^2) = \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6) \log T)^{n-1}}.$$

Любой путь из семейства Γ_i^0 всех путей в конденсаторе $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$, соединяющих S_i с ∂D_i , содержит подпуть, принадлежащий семейству $\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$, т. е. семейство Γ_i^0 длиннее семейства $\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$. Поэтому с учетом равенства (0.1) получаем оценку

$$\text{Cap}(\mathbf{C}_i) = \text{Cap}(D_i, S_i) = \text{Mod}(\Gamma_i^0) \leq \text{Mod}(\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2),$$

из которой следует, что

$$\text{Cap}(\mathbf{C}_i) \leq \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6) \log T)^{n-1}}. \quad (2.1.12)$$

Теперь рассмотрим образ этого конденсатора, т. е. конденсатор $g(\mathbf{C}_i) = (g(D_i), g(S_i))$. Положим $S(y_0, r'_i) := \partial B(y_0; r_1, r_2) \setminus S(y_0, r_i)$ и убедимся, что континуум $g(S_i)$ отделяет сферу $S(y_0, r_i)$ от множества $S(y_0, r'_i) \cup g(E_0)$.

Допустим, что это не так. Тогда открытое множество $B(y_0; r_1, r_2) \setminus (g(E_0) \cup g(S_i))$ имеет компоненту V_i , на границе которой найдутся точки $y_1 \in S(y_0, r_i)$ и $y_2 \in S(y_0, r'_i) \cup g(E_0)$. Так как $V_i \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)$, то (см. (2.1.11)) открытое множество $g^{-1}(V_i)$ содержится в $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ и имеет компактное замыкание в U_0 . В силу [11, лемма 2.5] любая компонента U множества $g^{-1}(V_i)$ является нормальной областью, т. е.

$$g(U) = V_i; \quad g(\partial U) = \partial V_i.$$

Так как $y_1 \in \partial V_i$ и $y_2 \in \partial V_i$, найдутся точки $x_1 \in \partial U$ и $x_2 \in \partial U$, для которых

$$g(x_1) = y_1 \in S(y_0, r_i); \quad g(x_2) = y_2 \in S(y_0, r'_i) \cup g(E_0).$$

Тогда (см. (2.1.6)) $x_1 \in g^{-1}(S(y_0, r_i)) = \partial U(x_0, r_i)$ и (см. (2.1.8))

$$x_2 \in g^{-1}(S(y_0, r'_i) \cup g(E_0)) = g^{-1}(S(y_0, r'_i)) \cup g^{-1}(g(E_0)) = \partial U(x_0, r'_i) \cup E_0.$$

Это означает, что область U имеет на границе точки из множеств $\partial U(x_0, r_i)$ и $\partial U(x_0, r'_i) \cup E_0$, т. е. U соединяет эти множества. Но сфера S_i отделяет $\partial U(x_0, r_i)$ от $\partial U(x_0, r'_i) \cup E_0$, поэтому $S_i \cap U \neq \emptyset$. Так как (см. [18, § 3.III(3)])

$$g(S_i \cap U) \subset g(U) \cap g(S_i) = V_i \cap g(S_i),$$

то $V_i \cap g(S_i) \neq \emptyset$, что противоречит выбору $V_i \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus (g(E_0) \cup g(S_i))$.

Полученное противоречие доказывает, что континуум $g(S_i)$ отделяет $\partial B(y_0, r_i)$ от $\partial B(y_0, r'_i) \cup g(E_0)$.

Конденсатор $g(\mathbf{C}_i)$ содержится в конденсаторе $(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i))$, поэтому

$$\text{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \geq \text{Cap}(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i)). \quad (2.1.13)$$

В шаровом слое $B(y_0; r_1, r_2)$ рассмотрим семейство Γ_0 путей, соединяющих $g(S_i)$ с $\partial B(y_0; r_1, r_2)$, и семейство Γ' путей, соединяющих $g(S_i)$ с $\partial B(y_0, r_i)$. Так как $\Gamma' \subset \Gamma_0$, то

$$\text{Mod}(\Gamma_0) \geq \text{Mod}(\Gamma'). \quad (2.1.14)$$

Как установлено выше, континуум $g(S_i)$ отделяет $S(y_0, r_i)$ от $S(y_0, r'_i)$. Поэтому любой путь из семейства

$$\Gamma'' := \Gamma(S(y_0, r_i), S(y_0, r'_i); B(y_0; r_1, r_2)) = \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2); B(y_0; r_1, r_2))$$

имеет подпуть, принадлежащий семейству Γ' . Значит, семейство Γ'' длиннее семейства Γ' и поэтому (см. (0.2))

$$\text{Mod}(\Gamma') \geq \text{Mod}(\Gamma'') = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}}. \quad (2.1.15)$$

С учетом равенства (0.1) из неравенств (2.1.13)–(2.1.15) вытекает оценка

$$\text{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \geq \text{Cap}(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i)) = \text{Mod}(\Gamma_0) \geq \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}}. \quad (2.1.16)$$

Теорему 7.1(2) из [11] об искажении емкости конденсатора при квазирегулярных отображениях применяем к Q^* -квазирегулярному отображению g области $D_i \subset U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ и конденсатору $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$. По этой теореме с учетом оценки (1.2.2) для $K_I(g)$ выполняется неравенство

$$\text{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \leq (Q^*)^{n-1} \cdot \text{Cap}(\mathbf{C}_i).$$

Из этого неравенства и оценок (2.1.12), (2.1.16) следует, что

$$\frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}} \leq (Q^*)^{n-1} \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}} \leq (Q^*)^{n-1} \frac{2^{n-1}\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}},$$

и это дает оценку

$$T \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{12 \cdot Q^*}, \quad (2.1.17)$$

справедливую в обоих случаях $i = 1$ (случай 1) и $i = 2$ (случай 2).

Таким образом, для величины $a_1/a_2 = 1/T$ выполняется либо оценка $\geq 1/H^3$, либо оценка $\geq (r_1/r_2)^{12 \cdot Q^*}$. Положив

$$C_2^* := \min\left\{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{12 \cdot Q^*}, \frac{1}{H^3}\right\}, \quad (2.1.18)$$

получаем левую часть неравенства (2.1.5).

Для доказательства правой половины неравенства (2.1.5) нужно получить верхнюю оценку величины $T_0 := a_1/a_2$.

Пусть $T_0 > H^3$ (в этом случае $a_1 > a_2$).

Шаровой слой $B(x_0; a_2, a_1)$ имеет толщину $\log T_0 > 3 \cdot \log H$, а множество E_0 (как было отмечено выше, с помощью утверждения 1.6) содержится в замыкании некоторого шарового слоя с центром x_0 и толщиной $\log H$. Поэтому найдется такой шаровой слой B_0 с центром x_0 и толщиной $(1/3)\log T_0$, что $B_0 \subset B(x_0; a_2, a_1)$ и $B_0 \cap E_0 = \emptyset$.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $r' = r_1(1 + \varepsilon) < R' = r_2/(1 + \varepsilon)$. Тогда $\overline{U}(x_0; r', R') \subset U(x_0; r_1, r_2)$. Так как

$$\begin{aligned} \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r')\} &> \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\} = a_1 \\ &> a_2 = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\} > \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, R')\}, \end{aligned}$$

каждый из континуумов $\partial U(x_0, r')$, $\partial U(x_0, R')$ соединяет граничные сферы шарового слоя B_0 . Следовательно (см. [16, теорема 10.12]), конформный модуль семейства Γ всех замкнутых путей, соединяющих $\partial U(x_0, r')$ с $\partial U(x_0, R')$ по области B_0 , имеет оценку

$$\text{Mod}(\Gamma) > c_n \cdot \Lambda(B_0) = (c_n/3) \log T_0 \quad (2.1.19)$$

с константой c_n , зависящей только от n .

Рассмотрим подсемейство $\Gamma_0 \subset \Gamma$, состоящее из всех путей $\gamma \in \Gamma$, лежащих в $B_0 \cap \overline{U}(x_0; r', R')$. Так как $\overline{U}(x_0; r') \subset U(x_0; R')$, любой путь $\gamma \in \Gamma$ содержит некоторый подпуть из семейства Γ_0 . Значит, семейство Γ длиннее семейства Γ_0 и поэтому (см. [16, 6.4]) $\text{Mod}(\Gamma_0) \geq \text{Mod}(\Gamma)$. С учетом (2.1.19) получаем оценку

$$\text{Mod}(\Gamma_0) > (c_n/3) \log T_0. \quad (2.1.20)$$

Семейство Γ_0 замкнутых путей лежит в $B_0 \cap U(x_0; r_1, r_2)$. Так как это множество не содержит точек из E_0 , отображение g является Q^* -квазирегулярным на $B_0 \cap U(x_0; r_1, r_2)$. Значит, выполнены условия теоремы 3.2 из [11], в силу которой

$$\text{Mod}(\Gamma_0) \leq N \cdot (Q^*)^{n-1} \cdot \text{Mod}(g(\Gamma_0)). \quad (2.1.21)$$

(В упомянутой теореме требуется, чтобы отображение было квазирегулярным в области, содержащей все замкнутые пути из семейства Γ_0 . Поэтому пришлось

использовать более тонкую кольцевую область $U(x_0; r', R')$ вместо $U(x_0; r, R)$. Кроме того, вместо внешней дилатации $K_O(g)$ использована ее верхняя оценка $(Q^*)^{n-1}$, указанная в (1.2.2).

Образ $g \circ \gamma$ каждого пути $\gamma \in \Gamma_0$ лежит в шаровом слое $\overline{B}(y_0; r', R') \subset B(y_0; r_1, r_2)$ и соединяет сферы $S(y_0, r')$ и $S(y_0, R')$. Любой путь из $g(\Gamma_0)$ содержит некоторый открытый подпуть из семейства

$$\Gamma' := \Gamma(S(y_0, r'), S(y_0, R'); B(y_0; r', R')).$$

Поэтому семейство $g(\Gamma_0)$ длиннее, чем семейство Γ' , следовательно (см. (0.2)),

$$\text{Mod}(g(\Gamma_0)) \leq \text{Mod}(\Gamma') = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(R'/r'))^{n-1}}.$$

Отсюда с учетом (2.1.20) и (2.1.21) получаем неравенство

$$(c_n/3) \log T_0 \leq N \cdot (Q^*)^{n-1} \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1) - 2 \log(1 + \varepsilon))^{n-1}}.$$

Так как это неравенство выполняется при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к неравенству

$$\log T_0 \leq \frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1} \omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}},$$

из которого вытекает оценка

$$\frac{a_1}{a_2} = T_0 \leq \exp \left(\frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1} \omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}} \right).$$

Таким образом, положив

$$C_1^* = \max \left\{ H^3, \exp \left(\frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1} \omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}} \right) \right\}, \quad (2.1.22)$$

получаем правую половину неравенства (2.1.5).

Лемма 2.1 доказана.

2.2. Лемма. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$. Пусть замкнутое множество $E' \subset \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ удовлетворяет условиям (2.1.1)–(2.1.4) леммы 2.1 при любых $0 < r_1 < r_2 < \sigma_0$ таких, что $r_2/r_1 \leq h$. Тогда

$$H^*(x_0, f) \leq C_0^* \quad (2.2.1)$$

с константой $C_0^* \geq 1$, зависящей только от $\{Q^*, h, H, N, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки C_1^* и C_2^* в неравенстве (2.1.5) из леммы 2.1 рассматриваем как функции $C_1^*(t)$ и $C_2^*(t)$ от параметра $t = r_2/r_1 \leq h$.

Пусть $r_0 > 0$ настолько мало, что $0 < r_0 \sqrt{h} < \sigma_0$. Положим

$$b_0(r_0) := \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}; \quad a_0(r_0) := \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\};$$

$$a(r_0) := \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0/\sqrt{h})\};$$

$$b(r_0) := \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0\sqrt{h})\}.$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0$ и $r_2 = r_0 \sqrt{h}$, получим неравенство

$$\frac{b_0(r_0)}{b(r_0)} \leq C_1^*(\sqrt{h}). \quad (2.2.2)$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0/\sqrt{h}$ и $r_2 = r_0$, получим неравенство

$$\frac{a(r_0)}{a_0(r_0)} \leq C_1^*(\sqrt{h}). \quad (2.2.3)$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0/\sqrt{h}$ и $r_2 = r_0\sqrt{h}$, получим неравенство

$$\frac{b(r_0)}{a(r_0)} \leq \frac{1}{C_2^*(h)}. \quad (2.2.4)$$

Перемножив неравенства (2.2.2)–(2.2.4), приходим к оценке

$$\frac{b_0(r_0)}{a_0(r_0)} \leq C_0^* := \frac{(C_1^*(\sqrt{h}))^2}{C_2^*(h)},$$

зависящей только от $\{Q^*, h, H, N, n\}$ и не зависящей от r_0 .

Устремив r_0 к нулю, получаем требуемую оценку (2.2.1):

$$H^*(x_0, f) = \limsup_{r_0 \rightarrow 0} \frac{b_0(r_0) = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}}{a_0(r_0) = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}} \leq C_0^*.$$

Лемма 2.2 доказана.

Рассмотрим отдельно случай, когда x_0 — внутренняя точка в E .

2.3. Утверждение. Пусть x_0 — внутренняя точка множества E и $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$ выбрано так, что $\bar{U}_0 = \bar{U}(x_0, \sigma_0) \subset E$, отображение $g = f|_{\bar{U}_0}$ инъективно и обратное к нему отображение $\varphi = g^{-1} : \bar{B}(f(x_0), \sigma_0) \rightarrow \bar{U}_0$ является слабо (h, H) -квазисимметрическим с $h > 1$, $H \geq 1$. Тогда

$$H^*(x_0, f) \leq H. \quad (2.3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольно малого $0 < r_0 < \sigma_0$ применим утверждение 1.6 к множествам $A := S(f(x_0), r_0) \cup \{f(x_0)\}$ и $A_0 := S(f(x_0), r_0)$. Тогда множество $\varphi(A_0) = \partial U(x_0, r_0)$ лежит в шаровом слое с центром x_0 и толщиной $\log H$, т. е.

$$\frac{\max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}}{\min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}} \leq H$$

при всех $0 < r_0 < \sigma_0$. Устремив r_0 к нулю, получим требуемую оценку (2.3.1). Утверждение доказано.

В случае, когда x_0 — изолированная точка множества E или когда $x_0 \in \Omega \setminus E$, справедливо

2.4. Утверждение. Пусть $x_0 \in \Omega$ и существует такая окрестность U точки x_0 , что отображение f является Q^* -квазирегулярным в $U \setminus \{x_0\}$. Тогда f будет Q^* -квазирегулярным в U и

$$H^*(x_0, f) \leq C^* \quad (2.4.1)$$

с константой C^* , указанной в утверждении 1.3 и зависящей только от $\{Q^*, N, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f непрерывно в U , то точка x_0 является устранимой изолированной особенностью для отображения f и, следовательно (см. [12, теорема 4.3]), f является Q^* -квазирегулярным в U . Тогда требуемая оценка (2.4.1) вытекает из утверждения 1.3.

§ 3. Теорема об устранимости

3.1. Теорема. Пусть $f : \Omega \rightarrow \Omega' = f(\Omega)$ — непрерывное открытое дискретное отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ и $N = \max\{\#f^{-1}(y) : y \in \Omega'\}$. Пусть замкнутое относительно Ω множество $E \subset \Omega$ таково, что

- (i) ограничение $f|_{\Omega \setminus E}$ является K^* -квазирегулярным;
- (ii) для любого $1 \leq k \leq N$ множество

$$E_k := \{x \in E : \#f^{-1}(f(x)) = k\}$$

либо пусто, либо любая точка $x_0 \in E_k$ имеет окрестность $U \subset \Omega$, в которой ограничение $f|_{U \cap E_k}$ инъективно, и обратное к нему отображение является слабо (h, H) -квазисимметрическим с заданными $h > 1$, $H \geq 1$.

Тогда отображение f будет $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным в Ω с $\tilde{K}^*$, зависящим только от $\{K^*, h, H, N, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1, \dots, N$ положим

$$\Sigma'(k) := \{y \in \Omega' : \#f^{-1}(y) = k\}$$

(это множество может быть пустым) и

$$\Omega'(k) := \{y \in \Omega' : \#f^{-1}(y) \geq k\}.$$

Покажем, что все $\Omega'(k)$ — открытые множества.

Пусть $y_0 \in \Omega'(k)$ и $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$ с $m \geq k$. Воспользовавшись леммой 1.1, найдем $0 < r_0 < \min\{\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)\}$ и построим канонические нормальные окрестности $U(x_j, r_0)$ (где $j = 1, \dots, m$) с попарно не пересекающимися замыканиями. Так как $f(U(x_j, r_0)) = B(y_0, r_0)$ для каждого $j = 1, \dots, m$, любая точка $y \in B(y_0, r_0)$ имеет прообраз в каждой области $U(x_j, r_0)$, т. е. $\#f^{-1}(y) \geq m \geq k$. Значит, $B(y_0, r_0) \subset \Omega'(k)$. В силу произвольного выбора $y_0 \in \Omega'(k)$ это означает, что $\Omega'(k)$ — открытое множество.

Ввиду непрерывности f множества $\Omega(k) := f^{-1}(\Omega'(k))$ при $k = 1, \dots, N$ также открытые в Ω , а каждое множество (возможно, пустое)

$$\Sigma(k) = f^{-1}(\Sigma'(k)) = f^{-1}(\Omega'(k) \setminus \Omega'(k+1))$$

при $k = 1, \dots, N-1$ замкнуто относительно $\Omega(k)$.

Пустое отображение $f : \emptyset \rightarrow \emptyset$ является K^* -квазирегулярным с любым $K^* \geq 1$, так как все требования к f в определении 1.2 тривиальным образом выполняются на пустом множестве. Поэтому мы можем «продолжить» отображение f на пустое множество $\Omega(N+1) = \emptyset$. Тогда $\Omega(k) = \Omega(k+1) \cup \Sigma(k)$ для всех $k = 1, \dots, N$.

По условию (i) отображение $f|_{\Omega \setminus E}$ является K^* -квазирегулярным. Поэтому (см. 1.3.1)

$$H^*(\Omega \setminus E, f) \leq H^* < \infty,$$

где H^* зависит только от $\{K^*, N, n\}$.

Для выполнения индукции по убыванию k от N до 1 нужно доказать следующее утверждение.

(Ind). Если $H^*(\Omega(k+1), f) \leq H^*(k+1) < \infty$, где $H^*(k+1)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$, то

$$H^*(\Omega(k), f) \leq H^*(k) < \infty,$$

где $H^*(k)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Omega(k)$. Так как

$$\Omega(k) = \Omega(k+1) \cup \Sigma(k) = \Omega(k+1) \cup (\Sigma(k) \setminus E) \cup (\Sigma(k) \cap E),$$

реализуется один из случаев:

- (j) $x_0 \in \Omega(k+1)$, и тогда $H^*(x_0, f) \leq H^*(k+1)$;
- (jj) $x_0 \in \Sigma(k) \setminus E$, и тогда $H^*(x_0, f) \leq H^*$;
- (jjj) $x_0 \in \Sigma(k) \cap E = E_k$.

Чтобы получить оценку для $H^*(x_0, f)$ в случае (jjj), убедимся, что в некоторой канонической нормальной окрестности $U(x_0, \sigma_0)$ при достаточно малом $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$ для множества $E' = E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ выполняются условия леммы 2.1.

Для точки $y_0 = f(x_0) \in \Sigma'(k)$ имеем $f^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} \subset \Sigma(k)$. Возьмем $\sigma_0 \in (0, \sigma(x_0))$ настолько малым, что

(а) замыкания канонических нормальных окрестностей $U(x_j, \sigma_0)$ точек $x_j \in f^{-1}(y_0)$ лежат в $\Omega(k)$ и попарно не пересекаются;

(б) ограничение f на множестве $E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ инъективно, и обратное к нему отображение является слабо (h, H) -квазисимметрическим. (Здесь используется условие (ii) в формулировке теоремы).

Так как $x_0 \in E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = E'$, условие (2.1.1) выполнено.

Любая точка $y \in \Sigma'(k) \cap \overline{B}(y_0, \sigma_0)$ имеет в точности k прообразов, по одному в каждой области $\overline{U}(x_j, \sigma_0)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Поэтому для любой точки $x \in \Sigma(k) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ имеем равенство $f^{-1}(f(x)) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = \{x\}$. Это, в частности, верно и для точек $x \in E' \subset \Sigma(k) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$. Значит, условие (2.1.2) в лемме 2.1 также выполняется.

Так как $E' = E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$, в силу условия (б) отображение $f|_{E'}$ инъективно и обратное к нему отображение слабо (h, H) -квазисимметрическое. Следовательно, выполнено условие (2.1.3) в лемме 2.1.

На множестве $U(x_0, \sigma_0) \setminus E' \subset \Omega(k+1) \cup (\Sigma(k) \setminus E)$ выполняется оценка

$$H^*(U(x_0, \sigma_0) \setminus E', f) \leq \max\{H^*(k+1), H^*\}.$$

Положив $Q^* = \max\{H^*(k+1), H^*\}$, получаем выполнение условия (2.1.4) леммы 2.1. Тогда в силу леммы 2.2 выполняется оценка $H^*(x_0, f) \leq C_0^*$ с константой C_0^* , зависящей только от $\{H^*(k+1), H^*, h, H, N, n\}$ (но не от выбора точки $x_0 \in \Sigma(k) \cap E$).

В результате анализа случаев (j)–(jjj), положив

$$H^*(k) := \max\{H^*(k+1), H^*, C_0^*\},$$

получаем оценку

$$H^*(\Omega(k), f) \leq H^*(k) < \infty,$$

где $H^*(k)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$.

Таким образом, шаг индукции (Ind) обоснован.

Так как $\Omega(N+1) = \emptyset$ и $\Omega(N) = \Sigma(N)$, утверждение (Ind) с $H^*(N+1) = 1$ дает оценку $H^*(\Omega(N), f) \leq H^*(N)$, где $H^*(N)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$. Это дает базу индукции.

Выполнив индукцию, получаем в итоге оценку

$$H^*(\Omega(1), f) = H^*(\Omega, f) \leq H^*(1),$$

зависящую только от $\{H^*, h, H, N, n\}$. С учетом того, что H^* зависит только от $\{K^*, N, n\}$, отображение f является $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным с $\tilde{K}^* = H^*(1)$, зависящим лишь от $\{K^*, h, H, N, n\}$.

Теорема 3.1 доказана.

3.2. Следствие. Если в условиях теоремы 3.1 множество E имеет нулевую n -мерную меру Лебега, то отображение f является K^* -квазирегулярным на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.1 отображение f квазирегулярно. Следовательно, обратная линейная дилатация $H^*(x, f)$ ограничена в Ω и $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в Ω . Тогда по определению 1.2 отображение f является K^* -квазирегулярным на всем множестве Ω . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.15 в [9] о θ_1 -квазимёбиусовости гомеоморфизма $f : \overline{G} \rightarrow \overline{G}'$ областей G, G' в $\mathbb{R}^n$, K -квазиконформного в G и θ -квазимёбиусова на границе ∂G , где θ_1 зависит только от $\{K, \theta, n\}$, была получена ранее в [19, следствие 3.2], но только для областей $G \subset \mathbb{R}^n$ со связной границей ∂G .

Благодарность. Автор благодарен рецензенту, обратившему его внимание на замечание 3.6(1) в [9], что позволило существенно усилить основной результат данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83. P. 101–129.
2. Песин И. Н. Метрические свойства квазиконформных отображений // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 281–294.
3. Väisälä J. On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1962. V. 322. P. 1–22.
4. Асеев В. В., Сычёв А. В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1213–1227.
5. Шлык В. А. Нормальные области по Гретшу и топологически устранимые множества для пространственных гомеоморфизмов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 112, № 3. С. 553–555.
6. Шлык В. А. Нормальные области и устранимые особенности // Изв. АН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 4. С. 93–117.
7. Шлык В. А. Топологически устранимые компакты для пространственных квазиконформных отображений // Дальневост. мат. сб. 1995. № 1. С. 63–67.
8. Shlyk V. A. Spherical symmetrization and NED-sets on a hyperplane // J. Math. Sci. New York. 2013. V. 193, N 1. P. 145–150.
9. Väisälä J. Quasisymmetry and unions // Manuscripta Math. 1990. V. 68, N 1. P. 101–111.
10. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
11. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. V. 448, N 12. P. 1–40.
12. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. V. 465. P. 1–13.
13. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. V. 488. P. 1–31.
14. Tukia P., Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.
15. Wang Xiantao, Zhou Qingshan. Quasimöbius maps, weakly quasimöbius maps and uniform perfectness in quasi-metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2017. V. 42, N 1. P. 257–284.

- 16. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
- 17. Vuorinen M. Conformal geometry and quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lect. Notes Math.; V. 1319).
- 18. Куратовский К. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.
- 19. Асеев В. В. Нормальные семейства топологических вложений // Динамика сплошной среды. 1986. Т. 76. С. 32–42.

Поступила в редакцию 21 октября 2024 г.

После доработки 21 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru, aseevvv@yandex.ru