Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 514.7

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В. А. Александров

Аннотация. Статья посвящена теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. В ней выведено некоторое, ранее не встречавшееся в литературе, линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет всякое поле вращения Дарбу гладкой поверхности. Показано, что для некоторых поверхностей это дополнительное уравнение функционально не зависит от трех стандартных уравнений, которым удовлетворяет (и которыми определяется) поле вращения Дарбу. В качестве приложения для некоторого класса гомеоморфных диску поверхностей, содержащего не только поверхности положительной гауссовой кривизны, доказан принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.302

Ключевые слова: трехмерное евклидово пространство, поверхность в евклидовом пространстве, бесконечно малое изгибание поверхности, поле вращения Дарбу, изотермические координаты, эллиптическое дифференциальное уравнение, принцип максимума.

§ 1. Введение

Задачи о наложимости и изгибаемости поверхностей в $\mathbb{R}^3$ возникли в работах Эйлера [1] и Гаусса [2] одновременно с возникновением дифференциальной геометрии. При решении этих задач получено много глубоких результатов. Имеется огромное количество книг и статей, в которых изучаются различные аспекты этих задач. Сейчас упомянем только капитальный обзор [3], список литературы в котором содержит 291 наименование, и книгу [4], последнюю из известных нам, где изложение теории изгибаний поверхностей начато с самого начала, ведется во всех деталях и освещает все вопросы, необходимые для понимания настоящей статьи. Отправляясь от них читатель сможет ознакомиться и с историей изучения теории изгибаний поверхностей, и с основными результатами этой теории.

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1–3. В теореме 1 получено новое, ранее не встречавшееся в литературе, линейное дифференциальное

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (проект FWNF–2022–0006).

уравнение первого порядка (11), которому обязано удовлетворять поле вращения Дарбу. Примеры 1–3 показывают, что для некоторых поверхностей это уравнение превращается в тождество $0 = 0$, в то время как для других поверхностей (которые могут иметь как положительную, так и отрицательную кривизны) оно является уравнением первого порядка, линейно не зависимым от трех стандартных уравнений первого порядка (8)–(10), которым удовлетворяет поле вращения Дарбу. В теореме 2 в качестве следствия уравнения (11) доказано, что при некоторых условиях третья компонента y_3 поля вращения Дарбу y удовлетворяет двум линейным дифференциальным уравнениям второго порядка (18), (19). При этом мы рассуждаем о третьей компоненте y_3 исключительно для определенности, поскольку две другие компоненты поля вращения Дарбу y удовлетворяют аналогичным уравнениям. Наличие двух уравнений второго порядка (18), (19) для y_3 является новым эффектом, ранее не появлявшимся в теории бесконечно малых изгибаний. Классический результат состоит в том, что третья компонента z_3 бесконечно малого изгибания z удовлетворяет одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка (см., например, [5; 6, гл. IV, § 2]). Примеры 4–6 показывают, что для уравнений (18), (19) возможны самые разные ситуации: в каких-то случаях они оба вырождаются (т. е. не являются уравнениями второго порядка); в других случаях может вырождаться только одно из них; в третьих случаях оба уравнения (18), (19) могут быть уравнениями второго порядка, причем функционально независимыми. Наконец в теореме 3 для некоторого класса гомеоморфных диску поверхностей, содержащего не только поверхности положительной гауссовой кривизны, выведен принцип максимума для y_3 как следствие уравнения (18). Для поверхностей положительной гауссовой кривизны принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу y не может претендовать на новизну. Он непосредственно следует из [7, следствие из теоремы 2].

§ 2. Поле вращения Дарбу

Пусть $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ является гладким семейством гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Слово «гладкий» в этой статье имеет обычный для классической дифференциальной геометрии смысл, т. е. «дифференцируемый столько раз, сколько потребуется в наших рассуждениях». Мы всегда подразумеваем, что поверхности S_t связные, но если это не оговорено явно, не предполагаем наличия других ограничений вроде отсутствия края или компактности. По определению полагаем $S = S_0$ и говорим, что семейство $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ является *изометрической деформацией* поверхности S, если для любого $t \in (-1,1)$ существует гладкое взаимно-однозначное отображение $f_t : S \to S_t$, сохраняющее длины всех кривых. Аналитически последнее условие можно выразить так: в любой карте $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ поверхности S и в соответствующей карте $x_t \overset{\text{опр}}{=} f_t \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S_t \subset \mathbb{R}^3$ поверхности S_t первые квадратичные формы поверхностей S и S_t совпадают между собой, т. е. для всех $(u,v) \in U$ и всех $t \in (-1,1)$ справедливы равенства

$$\begin{cases} ((x_t)_u, (x_t)_u) = (x_u, x_u), \\ ((x_t)_u, (x_t)_v) = (x_u, x_v), \\ ((x_t)_v, (x_t)_v) = (x_v, x_v). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь нижние индексы u или v обозначают дифференцирование по соответствующей переменной (при этом производные вычисляются в точке $(u,v) \in U$);

нижний индекс t имеет иной смысл (он указывает на поверхность из семейства $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$); наконец, (a,b) означает скалярное произведение векторов $a,b\in\mathbb{R}^3$. Соотношения (1) являются нелинейными уравнениями относительно x_t. Один из классических подходов к их решению состоит в том, чтобы изучать их линеаризацию, которая получается так. Продифференцируем равенства (1) по t при $t=0$ и положим

$$z(u,v) \overset{\text{опр}}{=} \frac{dx_t}{dt}\bigg|_{t=0}(u,v).$$

В результате получим линейные уравнения

$$(z_u,x_u)=0,\quad (z_u,x_v)+(z_v,x_u)=0,\quad (z_v,x_v)=0 \tag{2}$$

относительно вектор-функции $z=z(u,v)$, геометрический смысл которой хорошо известен: она сопоставляет каждой точке поверхности S вектор, равный скорости, которую имеет эта точка в начальный момент изометрической деформации $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$. Полем *бесконечно малых изгибаний* поверхности S (или *бесконечно малым изгибанием* поверхности S) называют любое решение z системы (2), даже если оно не порождено никакой изометрической деформацией $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ поверхности S.

Изометрическая деформация $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ называется *тривиальной*, если существует гладкое семейство $\{P_t\}_{t\in(-1,1)}$ изометрий $P_t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ такое, что для каждого $t\in(-1,1)$ справедливо равенство $S_t=P_t(S)$. В противном случае изометрическая деформация $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ называется *нетривиальной*. Поверхность называется *изгибаемой*, если она допускает нетривиальную изометрическую деформацию. В противном случае она называется *неизгибаемой*. Бесконечно малое изгибание z поверхности S называется *тривиальным*, если оно может быть порождено некоторой тривиальной изометрической деформацией $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$. В противном случае бесконечно малое изгибание называется *нетривиальным*. Классическим результатом теории изгибаний поверхностей является утверждение о том, что если поверхность не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний, то она не допускает нетривиальных изгибаний, аналитических по параметру деформации. Вопрос о существовании компактных изгибаемых поверхностей без края хорошо известен специалистам [8], но до сих пор остается открытым. В то же время известно, что для любого натурального числа $m\geq 1$ существуют поверхности, гомеоморфные сфере и имеющие ровно m линейно независимых полей нетривиальных бесконечно малых изгибаний. Существование C^∞-поверхностей с такими свойствами доказано в [9], а существование вещественно-аналитических поверхностей доказано в [10].

Аналитически довольно трудно распознать является ли данное решение z системы уравнений (2) тривиальным бесконечно малым изгибанием. Это является одной из причин того, что в теории изгибаний поверхностей считается стандартной замена вектор-функции $z=z(u,v)$ новой неизвестной вектор-функцией $y=y(u,v)$ посредством формулы $dz=y\times dx$ или, что то же самое, посредством формул

$$z_u = y\times x_u, \tag{3}$$
$$z_v = y\times x_v. \tag{4}$$

Здесь $\times$ означает векторное произведение. Продифференцировав формулу (3) по переменной v, а формулу (4) по переменной u, и вычтя второе соотношение из первого, получим систему дифференциальных уравнений

$$y_u \times x_v = y_v \times x_u, \tag{5}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_{3v}y_{2u} - x_{2v}y_{3u} = x_{3u}y_{2v} - x_{2u}y_{3v}, \\ x_{1v}y_{3u} - x_{3v}y_{1u} = x_{1u}y_{3v} - x_{3u}y_{1v}, \\ x_{2v}y_{1u} - x_{1v}y_{2u} = x_{2u}y_{1v} - x_{1u}y_{2v}. \end{cases} \tag{6}$$

Всякое решение y системы (5) называется *полем вращения Дарбу* поверхности S или полем вращения Дарбу бесконечно малого изгибания z. Название объясняется тем, что если в формулах (3), (4) трактовать бесконечно малое изгибание z как бесконечно малое изометрическое движение касательной плоскости поверхности S, то y является мгновенной угловой скоростью этого движения, т. е. отвечает за вращение (см. [11]). Это кинематическое истолкование y позволяет доказать, что бесконечно малое изгибание z является тривиальным, если и только если соответствующее ему поле вращения Дарбу y постоянно (см. [11]). Известно также, что поле вращения Дарбу обладает целым рядом нетривиальных геометрических свойств. Заинтересованный читатель может найти их, например, в книгах [4, 12], статьях [7, 13–15], и указанной там литературе. Мы эти свойства не используем, и поэтому не формулируем.

§ 3. Уравнения первого порядка для поля вращения Дарбу в изотермических координатах

Всюду далее в этой статье S обозначает гладкую поверхность, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — параметризацию поверхности S посредством *изотермических* координат $(u, v) \in U$ (т. е. таких координат $(u, v) \in U$, что выполняются соотношения

$$(x_u, x_u) = \lambda, \quad (x_u, x_v) = 0, \quad (x_v, x_v) = \lambda, \tag{7}$$

где $\lambda : U \to (0, +\infty)$ — некоторая гладкая функция). По определению полагаем $n = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$, так что n является единичным вектором внешней нормали к S. Символы h_{ij} всегда обозначают коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, а именно, $h_{11} = (x_{uu}, n) = -(x_u, n_u)$, $h_{12} = h_{21} = (x_{uv}, n) = -(x_u, n_v) = -(x_v, n_u)$ и $h_{22} = (x_{vv}, n) = -(x_v, n_v)$.

Впервые существование изотермических координат (т. е. существование параметризации поверхности посредством изотермических координат) установил Гаусс в 1825 г. для аналитических поверхностей [16]. Затем многие исследователи работали над упрощением доказательств и понижением требований к гладкости поверхности, на которой можно гарантировать существование изотермических координат [17]. В 1950-х гг. стандартом стало использование теорем существования для комплексного уравнения Бельтрами [18], что позволило перейти к изучению обобщенных решений. Но есть и другие подходы, например, с помощью преобразования Фурье [19]. Еще один пример: в 1953–1963 гг. Ю. Г. Решетняк опубликовал серию из девяти работ, посвященных построению изотермических координат в двумерных многообразиях ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова и применению этих координат к изучению таких многообразий. Английский перевод этих работ опубликован только в 2023 г. в книге [20]. Поскольку в данной статье мы ограничили себя рамками классической дифференциальной геометрии, то для нас не важна минимальная допустимая гладкость поверхности. Поэтому мы даже не формулируем точно упомянутые результаты. Для нас важно, что изотермические координаты существуют и определены нелокально в том смысле, что они могут быть введены на любой открытой гомеоморфной диску части поверхности. Эта нелокальность в принципе отсутствует у всех иных специальных систем координат, традиционно используемых в теории поверхностей (мы имеем виду, прежде всего, риманову нормальную, полярную и полугеодезическую системы координат на поверхности, см., например, [21, § 3.6]).

Теорема 1. *Пусть S — гладкая поверхность, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$. Пусть $y : U \to \mathbb{R}^3$ является полем вращения Дарбу поверхности S, так что в U выполняется соотношение* (5). *Тогда y удовлетворяет также следующим соотношениям:*

$$(y_u, n) = 0, \tag{8}$$

$$(y_v, n) = 0, \tag{9}$$

$$(y_u, x_u) + (y_v, x_v) = 0, \tag{10}$$

$$h_{21}(y_u, x_u) + h_{22}(y_u, x_v) - h_{11}(y_v, x_u) - h_{12}(y_v, x_v) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (5) скалярно на вектор x_u. Получим $(y_u \times x_v, x_u) = (y_v \times x_u, x_u)$. Используя свойства смешанного произведения и формулы (7), получаем $-\lambda(y_u, n) = 0$. Следовательно, y удовлетворяет уравнению (8). Аналогично, умножая обе части равенства (5) скалярно на вектор x_v, убеждаемся, что y удовлетворяет уравнению (9). Наконец, умножая обе части равенства (5) скалярно на вектор $x_u \times x_v$ и пользуясь известным соотношением $(a \times b, c \times d) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$, последовательно получаем

$$(y_u \times x_v, x_u \times x_v) = (y_v \times x_u, x_u \times x_v),$$
$$(y_u, x_u)(x_v, x_v) - (y_u, x_v)(x_v, x_u) = (y_v, x_u)(x_u, x_v) - (y_v, x_v)(x_u, x_u),$$
$$\lambda(y_u, x_u) = -\lambda(y_v, x_v).$$

Значит, y удовлетворяет уравнению (10). Тем самым уравнения (8)–(10) являются следствиями уравнений (5). Верно и обратное. В самом деле, как мы только что убедились, равенства (8)–(10) означают, что векторы $y_u \times x_v$ и $y_v \times x_u$ имеют одинаковые компоненты относительно ортогонального базиса x_u, x_v, $x_u \times x_v$. Следовательно, $y_u \times x_v = y_v \times x_u$. Значит, уравнения (5) являются следствиями уравнений (8)–(10).

Продифференцируем (8) по v и (9) по u, а затем вычтем второе из первого. Получим $(y_u, n_v) - (y_v, n_u) = 0$. Подставив сюда выражения $n_u = -\lambda^{-1}[h_{11}x_u + h_{12}x_v]$ и $n_v = -\lambda^{-1}[h_{21}x_u + h_{22}x_v]$, известные из дифференциальной геометрии поверхностей, получим

$$-\lambda^{-1}[h_{21}(y_u, x_u) + h_{22}(y_u, x_v) - h_{11}(y_v, x_u) - h_{12}(y_v, x_v)] = 0.$$

Следовательно, выполняется соотношение (11). □

Из доказательства теоремы 1 следует, что система уравнений (8)–(10) эквивалентна системе уравнений (6). Этот факт хорошо известен. Читатель может найти его, например в [7, 13–15] и указанной там литературе. С уравнением

(11) дело обстоит иначе. Насколько известно автору, ранее в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей оно не встречалось. В некотором смысле обнаружение такого «дополнительного» уравнения (11) можно сравнить с нахождением первого интеграла динамической системы. Эта аналогия объясняет намерение автора исследовать, какие новые следствия вытекают из «расширенной системы уравнений (8)–(11)». В § 5 в качестве одного из таких следствий мы выводим принцип максимума для третьей компоненты y_3 поля вращения Дарбу y.

Чтобы лучше понимать уравнения (5) и (8)–(11), рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 (S есть плоскость $x_3 = 0$). Полагаем $U = \mathbb{R}^2$, $x = (u, v, 0)$.

Тогда $x_u = (1, 0, 0)$, $x_v = (0, 1, 0)$, $\lambda = 1$, $n = (0, 0, 1)$, $h_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2$. Уравнения (5) принимают вид $y_{3u} = 0$, $y_{3v} = 0$, $y_{1u} = -y_{2v}$, а уравнения (8)–(10) — вид $y_{3u} = 0$, $y_{3v} = 0$, $y_{1u} + y_{2v} = 0$. Это согласуется с заключением теоремы 1. А вот уравнение (11) становится тождеством $0 = 0$ и никакой новой информации дать не может.

Пример 2 (S есть сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ с удаленной точкой $(0, 0, 1)$). Параметризуем S с помощью стереографической проекции, т. е. полагаем $U = \mathbb{R}^2$, $x = (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1)$.

Тогда
$$x_u = 2(-u^2 + v^2 + 1, -2uv, 2u)/(u^2 + v^2 + 1)^2,$$
$$x_v = 2(-2uv, u^2 - v^2 + 1, 2v)/(u^2 + v^2 + 1)^2,$$
$$\lambda = (x_u, x_u) = (x_v, x_v) = 4/(u^2 + v^2 + 1)^2, \quad (x_u, x_v) = 0,$$
$$n = \lambda^{-1}(x_u \times x_v) = -x, \quad h_{11} = -(x_u, n_u) = \lambda,$$
$$h_{12} = h_{21} = -(x_u, n_v) = -(x_v, n_u) = 0, \quad h_{22} = -(x_v, n_v) = \lambda.$$
После сокращения на ненулевые множители уравнения (6) принимают вид
$$\begin{cases} 2vy_{2u} - (u^2 - v^2 + 1)y_{3u} = 2uy_{2v} + 2uvy_{3v}, \\ 2vy_{1u} + 2uvy_{3u} = 2uy_{1v} + (-u^2 + v^2 + 1)y_{3v}, \\ (u^2 - v^2 + 1)y_{1u} + 2uvy_{2u} = -2uvy_{1v} - (-u^2 + v^2 + 1)y_{2v}. \end{cases} \tag{12}$$
Аналогично после сокращения на ненулевые множители уравнения (8)–(10) принимают вид
$$\begin{cases} 2uy_{1u} + 2vy_{2u} + (u^2 + v^2 - 1)y_{3u} = 0, \\ 2uy_{1v} + 2vy_{2v} + (u^2 + v^2 - 1)y_{3v} = 0, \\ (-u^2 + v^2 + 1)y_{1u} - 2uvy_{2u} + 2uy_{3u} - 2uvy_{1v} + (u^2 - v^2 + 1)y_{2v} + 2vy_{3v} = 0. \end{cases} \tag{13}$$
Системы уравнений (12) и (13) выглядят по-разному. Но теорема 1 утверждает, что они эквивалентны друг другу. Наконец, выпишем уравнение (11):
$$-2uvy_{1u} + (u^2 - v^2 + 1)y_{2u} + 2vy_{3u} - (-u^2 + v^2 + 1)y_{1v} + 2uvy_{2v} - 2uy_{3v} = 0. \tag{14}$$
Запишем уравнения (13), (14) в матричном виде $AY = 0 \in \mathbb{R}^4$, где
$$A = \begin{pmatrix} 2u & 2v & u^2+v^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u & 2v & u^2+v^2-1 \\ -u^2+v^2+1 & -2uv & 2u & -2uv & u^2-v^2+1 & 2v \\ -2uv & u^2-v^2+1 & 2v & -(-u^2+v^2+1) & 2uv & -2u \end{pmatrix},$$

а вектор-столбец Y получен транспонированием вектора-строки $(y_{1u}, y_{2u}, y_{3u}, y_{1v}, y_{2v}, y_{3v})$. Обозначим через A_{ij} 4×4-матрицу, получаемую из A вычеркиванием i-го и j-го столбцов. Прямым вычислением убеждаемся, что $\det A_{36} = 4(u^2+v^2)(u^2+v^2+1)^2$ и $\det A_{25} = (u^2+v^2+1)^2(u^2+(v-1)^2)(u^2+(v+1)^2)$. Следовательно, при любых $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ найдется 4×4-минор матрицы A с ненулевым определителем. Значит, ранг матрицы A всегда равен 4, т. е. уравнение (14) ни в какой точке $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ не является линейной комбинацией уравнений (13).

Тем самым видим, что в случае сферы имеет смысл рассматривать не три уравнения (6) (или, что то же самое, три эквивалентных им уравнения (8)–(10)), а четыре уравнения (8)–(11).

Пример 3. Как известно [22, § 16.2], геликоид (точнее, некоторая область на нем) может быть непрерывно продеформирован в катеноид (точнее, в соответствующую область на нем) с помощью следующего преобразования:

$$x_t(u,v) = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v,\\ -\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, u\cos t + v\sin t).$$

Здесь $u\in(0,2\pi]$, $v\in\mathbb{R}$, $t=0$ соответствует геликоиду, $t=\pi/2$ соответствует катеноиду. При этом для всякого t поверхность S_t, заданная параметризацией x_t, является минимальной и изометричной геликоиду x_0. Прямые вычисления дают

$$\begin{gathered}
(x_t)_u = (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t),\\
(x_t)_v = (\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v, -\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v, \sin t),\\
\lambda_t = ((x_t)_u, (x_t)_u) = ((x_t)_v, (x_t)_v) = \mathrm{ch}^2\,v, \quad ((x_t)_u, (x_t)_v) = 0,\\
n_t = (\mathrm{ch}\,v)^{-1}(\cos u, \sin u, -\mathrm{sh}\,v),\\
(x_t)_{uu} = (-\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, 0),\\
(x_t)_{uv} = (\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v, \cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v, 0),\\
(x_t)_{vv} = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, -\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, 0),\\
(h_t)_{11} = ((x_t)_{uu}, n_t) = -\sin t, \quad (h_t)_{12} = (h_t)_{21} = ((x_t)_{uv}, n_t) = \cos t,\\
(h_t)_{22} = ((x_t)_{vv}, n_t) = \sin t.
\end{gathered}$$

Напомним, что в приведенных только что формулах по-прежнему действует принятое ранее соглашение, согласно которому нижний индекс t не означает дифференцирование по параметру t, а указывает на соответствующую поверхность S_t. Теперь видим, что для поверхности S_t уравнения (6) принимают вид

$$\begin{cases}
(\sin t)y_{2u} - (-\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v)y_{3u}\\
\qquad = (\cos t)y_{2v} - (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v)y_{3v},\\
(\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v)y_{3u} - (\sin t)y_{1u}\\
\qquad = (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v)y_{3v} - (\cos t)y_{1v},\\
(-\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v)y_{1u} - (\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v)y_{2u}\\
\qquad = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v)y_{1v} - (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v)y_{2v}.
\end{cases} \tag{15}$$

Аналогично после сокращения на ненулевые множители уравнения (8)–(10)

принимают вид

$$\begin{cases} (\cos u)y_{1u} + (\sin u)y_{2u} - (\operatorname{sh} v)y_{3u} = 0, \\ (\cos u)y_{1v} + (\sin u)y_{2v} - (\operatorname{sh} v)y_{3v} = 0, \\ (\cos t \cos u \operatorname{sh} v - \sin t \sin u \operatorname{ch} v)y_{1u} + (\cos t \sin u \operatorname{sh} v + \sin t \cos u \operatorname{ch} v)y_{2u} \\ \qquad +(\cos t)y_{3u} + (\cos t \sin u \operatorname{ch} v + \sin t \cos u \operatorname{sh} v)y_{1v} \\ \qquad +(-\cos t \cos u \operatorname{ch} v + \sin t \sin u \operatorname{sh} v)y_{2v} + (\sin t)y_3v = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Системы уравнений (15) и (16) выглядят по-разному. Но теорема 1 утверждает, что они эквивалентны друг другу в том смысле, что для любых t, u, v каждое уравнение системы (16) является следствием уравнений системы (15), и наоборот, каждое уравнение системы (15) является следствием уравнений системы (16).

Наконец, выпишем уравнение (11) для поверхности x_t:

$$\begin{aligned} (h_t)_{21}(y_{1u}(x_t)_{1u} + y_{2u}(x_t)_{2u} + y_{3u}(x_t)_{3u}) + (h_t)_{22}(y_{1u}(x_t)_{1v} \\ + y_{2u}(x_t)_{2v} + y_{3u}(x_t)_{3v}) - (h_t)_{11}(y_{1v}(x_t)_{1u} + y_{2v}(x_t)_{2u} \\ + y_{3v}(x_t)_{3u}) - (h_t)_{12}(y_{1v}(x_t)_{1v} + y_{2v}(x_t)_{2v} + y_{3v}(x_t)_{3v}) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда уже вычисленные компоненты векторов $(x_t)_u$ и $(x_t)_v$, а также коэффициенты $(h_t)_{ij}$, $i, j = 1, 2$, второй квадратичной формы поверхности x_t, после приведения подобных получим:

$$(\cos u \operatorname{sh} v)y_{1u} + (\sin u \operatorname{sh} v)y_{2u} + y_{3u} - (\sin u \operatorname{ch} v)y_{1v} + (\cos u \operatorname{ch} v)y_{2v} - 0 \cdot y_{3v} = 0. \tag{17}$$

Запишем уравнения (16)–(17) в матричном виде $BY = 0 \in \mathbb{R}^4$, где

$$B = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & -\operatorname{sh} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos u & \sin u & -\operatorname{sh} v \\ \omega_1 & \omega_2 & \cos t & \omega_3 & \omega_4 & \sin t \\ \cos u \operatorname{sh} v & \sin u \operatorname{sh} v & 1 & -\sin u \operatorname{ch} v & \cos u \operatorname{ch} v & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_1 = \cos t \cos u \operatorname{sh} v - \sin t \sin u \operatorname{ch} v, \quad \omega_2 = \cos t \sin u \operatorname{sh} v + \sin t \cos u \operatorname{ch} v,$$

$$\omega_3 = \cos t \sin u \operatorname{ch} v + \sin t \cos u \operatorname{sh} v, \quad \omega_4 = -\cos t \cos u \operatorname{ch} v + \sin t \sin u \operatorname{sh} v,$$

а вектор-столбец Y получен транспонированием вектора-строки $(y_{1u}, y_{2u}, y_{3u}, y_{1v}, y_{2v}, y_{3v})$. Обозначим через B_{36} 4×4-матрицу, получаемую из B вычеркиванием 3-го и 6-го столбцов. Прямым вычислением убеждаемся, что $\det B_{36} = -(\operatorname{ch} v)^2 \sin t$. Следовательно, при любых $u \in (0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \pi)$ ранг матрицы B равен 4, т. е. при указанных значениях параметров u, v, t уравнение (17) не является линейной комбинацией уравнений (16).

Тем самым в случае поверхности S_t видим то же самое, что уже видели в случае сферы: есть смысл в том, чтобы рассматривать не три уравнения (6) (или, что то же самое, три эквивалентных им уравнения (8)–(10)), а четыре уравнения (8)–(11).

§ 4. Уравнения второго порядка для компонент поля вращения Дарбу в изотермических координатах

Как известно, один из способов доказательства неизгибаемости компактной выпуклой поверхности, не имеющей края, состоит в том, чтобы предварительно доказать принцип максимума для одной из компонент поля бесконечно малых изгибаний z этой поверхности (см., например, [4–6]). Однако для этого необходимо свести систему уравнений (2) к одному уравнению второго порядка и убедиться, что оно имеет эллиптический тип. Эллиптичности самой системы (2) недостаточно, поскольку для решений эллиптических систем принцип максимума не всегда выполняется (см., например, [23; 24, гл. 2, § 4]).

В этом параграфе выведем из системы (8)–(11) два линейных уравнения второго порядка в частных производных, каждому из которых удовлетворяет y_3 — третья компонента поля вращения Дарбу y. Основное отличие от классической теории бесконечно малых изгибаний поверхностей состоит в том, что для третьей компоненты z_3 поля бесконечно малых изгибаний z удается написать только одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка (см., например, [4, 6]).

Теорема 2. *Пусть S — гладкая поверхность, $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$, $\lambda = (x_u, x_u)$, $n = (n_1, n_2, n_3) = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$ — вектор единичной нормали к S, h_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S и $y = (y_1, y_2, y_3) : U \to \mathbb{R}^3$ — поле вращения Дарбу поверхности S. Предположим также, что в U три функции n_1, n_2 и $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2$ отличны от нуля.*

Тогда y_3 удовлетворяет в U следующим двум линейным дифференциальным уравнениям порядка не выше двух:

$$h_{22}y_{3uu} + h_{11}y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0, \tag{18}$$

$$h_{12}y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0, \tag{19}$$

где ρ_i, $i = 1, \ldots, 4$, — некоторые гладкие функции, возможно, зависящие от $x = x(u, v)$ и ее производных, но не зависящие от $y = (y_1, y_2, y_3)$ и ее производных.

Доказательство. Ниже потребуются следующие соотношения, легко проверяемые прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
\lambda n = x_u \times x_v, \quad &\text{т. е.} \quad \lambda n_1 = x_{2u}x_{3v} - x_{2v}x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} \lambda n_2 = x_{1u}x_{3v} - x_{1v}x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} \lambda n_3 = x_{1u}x_{2v} - x_{1v}x_{2u};\\
x_u = x_v \times n, \quad &\text{т. е.} \quad x_{1u} = n_3x_{2v} - n_2x_{3v},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{2u} = n_1x_{3v} - n_3x_{1v},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{3u} = n_2x_{1v} - n_1x_{2v};\\
x_v = n \times x_u, \quad &\text{т. е.} \quad x_{1v} = n_2x_{3u} - n_3x_{2u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{2v} = n_3x_{1u} - n_1x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{3v} = n_1x_{2u} - n_2x_{1u}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Запишем уравнения (8)–(11) в матричном виде $DX = Z$, где

$$D = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & n_1 & n_2\\ x_{1u} & x_{2u} & x_{1v} & x_{2v}\\ h_{12}x_{1u}+h_{22}x_{1v} & h_{12}x_{2u}+h_{22}x_{2v} & -(h_{11}x_{1u}+h_{12}x_{1v}) & -(h_{11}x_{2u}+h_{12}x_{2v}) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$X = \begin{pmatrix} y_{1u}\\ y_{2u}\\ y_{1v}\\ y_{2v} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -n_3y_{3u}\\ -n_3y_{3v}\\ -(x_{3u}y_{3u} + x_{3v}y_{3v})\\ -(h_{12}x_{3u} + h_{22}x_{3v})y_{3u} + (h_{11}x_{3u} + h_{12}x_{3v})y_{3v} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Положим по определению $d = \det D$. Разлагая этот определитель по последней строке и многократно используя равенства (20), получаем

$$d = h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2.$$

Значит, в силу условий теоремы $d \neq 0$. Из уравнения $DX = Z$ находим по правилу Крамера

$$y_{1u} = d_1/d, \quad y_{2u} = d_2/d, \quad y_{1v} = d_3/d, \quad y_{2v} = d_4/d. \tag{23}$$

Здесь d_i обозначает определитель матрицы D_i, которая получается из матрицы D в формуле (21) заменой ее i-го столбца столбцом Z из формулы (22). Для каждого $i = 1, \dots, 4$ введем обозначение $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$, где p_i и q_i не зависят от y и ее производных. Раскрывая определитель матрицы D_i по последней строке и многократно используя формулы (20), получаем

$$\begin{aligned} p_1 &= h_{11}x_{1v}x_{3v} - 2h_{12}x_{1v}x_{3u} + h_{22}x_{1u}x_{3u}, \quad q_1 = h_{11}n_2\omega, \\ p_2 &= h_{11}x_{2v}x_{3v} - 2h_{12}x_{2v}x_{3u} + h_{22}x_{2u}x_{3u}, \quad q_2 = -h_{11}n_1\omega, \\ p_3 &= -h_{22}n_2\omega, \quad q_3 = h_{11}x_{1v}x_{3v} - 2h_{12}x_{1u}x_{3v} + h_{22}x_{1u}x_{3u}, \\ p_4 &= h_{22}n_1\omega, \quad q_4 = h_{11}x_{2v}x_{3v} - 2h_{12}x_{2u}x_{3v} + h_{22}x_{2u}x_{3u}, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\omega = \lambda n_3^2 + x_{3u}^2 + x_{3v}^2$. Отметим, что $\omega > 0$ всюду в U.

Первая и третья формулы в (23) могут быть записаны в виде $y_{1u}d - d_1 = 0$ и $y_{1v}d - d_3 = 0$. Продифференцируем первое из этих соотношений по v, второе — по u и вычтем второй результат из первого. Получим $y_{1u}d_v - y_{1v}d_u - d_{1v} + d_{3u} = 0$. Подставим сюда $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$ и выполним дифференцирования. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} p_3 y_{3uu} + (q_3 - p_1)y_{3uv} - q_1 y_{3vv} + [p_{3u} - p_{1v} + (p_1 d_v - p_3 d_u)/d]y_{3u} \\ + [q_{3u} - q_{1v} + (q_1 d_v - q_3 d_u)/d]y_{3v} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуем (25), подставив в коэффициенты перед вторыми производными от y_3 вместо p_1, p_3, q_1, q_3 их выражения из (24). После упрощений полученного соотношения и деления обеих его частей на $(-n_2)$ получим

$$\omega h_{22} y_{3uu} + 2\lambda h_{12} y_{3uv} + \omega h_{11} y_{3vv} + r_1 y_{3u} + r_2 y_{3v} = 0, \tag{26}$$

где $r_1 = (p_{1v} - p_{3u})/n_2 + (p_3 d_u - p_1 d_v)/(n_2 d)$, $r_2 = (q_{1v} - q_{3u})/n_2 + (q_3 d_u - q_1 d_v)/(n_2 d)$.

Действуя аналогично, запишем вторую и четвертую формулы в (23) в виде $y_{2u}d - d_2 = 0$ и $y_{2v}d - d_4 = 0$. Продифференцируем первое из этих соотношений по v, второе — по u и вычтем последний результат из первого. Получим $y_{2u}d_v - y_{2v}d_u - d_{2v} + d_{4u} = 0$. Подставим сюда $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$ и выполним дифференцирования. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} p_4 y_{3uu} + (q_4 - p_2)y_{3uv} - q_2 y_{3vv} + [p_{4u} - p_{2v} + (p_2 d_v - p_4 d_u)/d]y_{3u} \\ + [q_{4u} - q_{2v} + (q_2 d_v - q_4 d_u)/d]y_{3v} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставим в (27) в коэффициенты перед вторыми производными от y_3 вместо p_2, p_4, q_2, q_4 их выражения из (24), упростим полученное соотношение и поделим обе его части на n_1. Получим

$$\omega h_{22} y_{3uu} - 2\lambda h_{12} y_{3uv} + \omega h_{11} y_{3vv} + r_3 y_{3u} + r_4 y_{3v} = 0, \tag{28}$$

где $r_3 = (p_{4u} - p_{2v})/n_1 + (p_2 d_v - p_4 d_u)/(n_1 d)$, $r_4 = (q_{4u} - q_{2v})/n_1 + (q_2 d_v - q_4 d_u)/(n_1 d)$.

Сложив формулы (26) и (28) и поделив результат на 2ω, получим формулу (18), где $\rho_1 = (r_1 + r_3)/(2\omega)$ и $\rho_2 = (r_2 + r_4)/(2\omega)$. Вычтя из (26) формулу (28) и поделив результат на 4λ, получим формулу (19), где $\rho_3 = (r_1 - r_3)/(4\lambda)$ и $\rho_4 = (r_2 - r_4)/(4\lambda)$. $\square$

Для первой и второй компонент y_1 и y_2 поля вращения Дарбу y уравнения, аналогичные (18) и (19), могут быть получены тем же способом, каким уравнения (18) и (19) были получены в доказательстве теоремы 2. Мы не предполагаем пользоваться уравнениями для y_1 и y_2 в этой статье, поэтому не выписываем их здесь, чтобы не отклоняться от основного хода рассуждений.

Посмотрим, как выглядят уравнения (18) и (19) для поверхностей, рассмотренных в § 3 в примерах 1–3.

Пример 4 (продолжение примера 1, в котором рассматривалась плоскость $x = (u, v, 0)$). В этом случае мы даже не можем написать уравнения (18) и (19). В самом деле, в этом случае n_1 тождественно равен нулю. Следовательно, теорема 2 просто неприменима.

Пример 5 (продолжение примера 2, в котором рассматривалась сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, параметризованная с помощью стереографической проекции). В этом случае линия $n_1 = 0$ задается уравнением $v = 0$, линия $n_2 = 0$ задается уравнением $u = 0$, а уравнение $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 = 0$ принимает вид $16\lambda(u^2 + v^2)/(u^2 + v^2 + 1)^4 = 0$ и задает всего одну точку, а именно, $u = v = 0$. Следовательно, в каждом квадранте K_i, $i = 1, \dots, 4$, определяемом осями координат u, v, мы можем написать уравнения (18) и (19). При этом уравнение (18) принимает вид $y_{3uu} + y_{3vv} + (\rho_1/\lambda)y_{3u} + (\rho_2/\lambda)y_{3v} = 0$, т. е. является эллиптическим линейным уравнением второго порядка. Значит, согласно принципу максимума функция y_3 не может принимать внутри K_i значение, которое больше всех ее значений на границе квадранта K_i. Что касается уравнения (19) $h_{12}y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, то оно принимает вид $\rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, т. е. вообще не является уравнением второго порядка.

Пример 6 (продолжение примера 3, в котором рассматривалось непрерывное семейство изометричных поверхностей S_t, содержащее геликоид и катеноид). Линия $(n_t)_1 = 0$ задается уравнением $\cos u = 0$ (а значит, $u = \pi/2 + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$), линия $(n_t)_2 = 0$ задается уравнением $\sin u = 0$ (а значит, $u = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), уравнение $(h_t)_{11}(x_t)_{3v}^2 - 2(h_t)_{12}(x_t)_{3u}(x_t)_{3v} + (h_t)_{22}(x_t)_{3u}^2 = 0$ принимает вид $-2\cos^2 t \sin t = 0$ (а значит, не имеет решений при $t \in (0, \pi/2)$). Следовательно, для каждого $t \in (0, \pi/2)$ в каждой подобласти области U, не пересекающейся ни с одной прямой $u = k\pi/2$, мы можем написать уравнения (18) и (19). При этом уравнение (18) принимает вид $(\sin t)y_{3uu} - (\sin t)y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0$, а уравнение (19) принимает вид $(\cos t)y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, т. е. для $t \in (0, \pi/2)$ оба уравнения являются гиперболическими линейными уравнениями второго порядка, причем у этих уравнений нет общих характеристик.

Примеры 4–6 показывают, что для некоторых поверхностей уравнения (18), (19) вырождаются, но для некоторых являются не совпадающими друг с другом уравнениями второго порядка. Наличие двух уравнений для y_3 (т. е. для третьей компоненты поля вращения Дарбу) является новым фактом в теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Вопрос об использовании этого факт является интересным, но он выходит за рамки настоящей статьи.

§ 5. Принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу поверхностей не обязательно положительной кривизны

Теорема 3. *Пусть S — гладкая поверхность, $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$, $\lambda = (x_u, x_u)$, $n = (n_1, n_2, n_3) = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$ — вектор единичной нормали к S, h_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S и $y = (y_1, y_2, y_3) : U \to \mathbb{R}^3$ — поле вращения Дарбу поверхности S. Предположим также, что в U выполняются неравенства*

$$n_1 \neq 0, \quad n_2 \neq 0, \quad h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 \neq 0, \tag{29}$$

$$h_{22}h_{11} > 0. \tag{30}$$

Тогда внутри области U функция y_3 не может принимать значение, которое больше всех ее значений на границе области U.

Доказательство. В силу неравенств (29) функция y_3 удовлетворяет уравнению (18) $h_{22}y_{3uu} + h_{11}y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0$, а в силу неравенства (30) это уравнение эллиптическое. Поэтому утверждение теоремы 3 следует из стандартной формулировки принципа максимума для эллиптических уравнений (см., например, [24; 25, Ч. 2, § 2.2]). □

Ясно, что в теореме 3 третья компонента y_3 поля вращения Дарбу y была взята исключительно для определенности; утверждения, аналогичные теореме 3, конечно, справедливы и для других компонент поля вращения Дарбу y.

Из теоремы 3 заключаем, что если на параметризованной поверхности $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ выполняется неравенство (30), то максимальные и минимальные значения функции y_3 не могут достигаться нигде, кроме как на границе поверхности либо на линиях, задаваемых одним из условий $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 = 0$. Тем самым на некоторых поверхностях не обязательно положительной кривизны (а именно тех, на которых выполняется неравенство (30)), удалось построить линии, на которых только и могут достигаться максимальные и минимальные значения функции y_3. Ранее в теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$ такие линии не встречались. С точки зрения автора они аналогичны узловым линиям стоячих волн (см., например, [26, гл. V, § 3]) и заслуживают отдельного исследования.

Вместе с тем отметим, что если поверхность S не просто удовлетворяет неравенству (30) (т. е. неравенству $h_{11}h_{22} > 0$), но всюду имеет положительную гауссову кривизну (т. е. на ней выполняется неравенство $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$), то принцип максимума для функции y_3 выполняется без дополнительных ограничений (29). Это непосредственно вытекает из следствия из теоремы 2 статьи [7], которое утверждает, что диаграмма вращения Y любого нетривиального бесконечно малого изгибания z поверхности положительной кривизны ни в одной внутренней точке (т. е. точке, не лежащей на границе поверхности) не имеет локальной опорной плоскости. Напомним, что *диаграммой вращения* Y бесконечно малого изгибания z называется множество концевых точек векторов соответствующего поля вращения Дарбу y, отложенных от некоторой фиксированной точки, например, от начала координат. Утверждение о том, что если гауссова кривизна поверхности S положительна, то в каждой регулярной точке (т. е. такой, что $y_u \times y_v \neq 0$) диаграмма вращения Y имеет строго отрицательную кривизну (а значит, не имеет локальной опорной плоскости в этой точке) было известно классикам (см., например, [11, § 5]). Таким образом, суть следствия из теоремы 2 статьи [7] состоит в том, что если гауссова кривизна поверхности S положительна, то локальной опорной плоскости нет и в нерегулярных точках диаграммы вращения Y. Для этого в [7] используются топологические свойства внутренних (по Стоилову [27]) отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euleri L.* Fragmentum 97 // A. Speiser (ed.). Leonhardus Eulerus. Opera omnia, Ser. 1. Opera mathematica. V. 13. Commentationes geometricae. V. 4. Lausannae: Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, 1956. P. 437–440.

2. *Гаусс К. Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях // А. П. Норден (ред.). Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 123–161.

3. *Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х.* Изгибание поверхностей. I // Н. М. Остиану (ред.). Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии». Т. 23. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 131–184.

4. *Климентов С. Б.* Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2014. [В электронном виде книга доступна на https://elibrary.ru/item.asp?id=24164017].

5. *Боярский Б. В., Ефимов Н. В.* Принцип максимума для бесконечно малых изгибаний кусочно-регулярных выпуклых поверхностей // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 6. С. 147–153.

6. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.

7. *Сабитов И. Х.* Локальная структура поверхностей Дарбу // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 1001–1004.

8. *Yau S.-T.* Problem section // S.-T. Yau (ed.). Seminar on differential geometry. Ann. Math. Stud. V. 102. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. P. 669–706.

9. *Решетняк Ю. Г.* О нежестких поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 591–604.

10. *Троценко Д. А.* О нежестких аналитических поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 5. С. 100–108.

11. *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибаемость поверхностей в целом // Успехи мат. наук. 1936. № 1. С. 33–76.

12. *Дарбу Ж. Г.* Лекции по общей теории поверхностей. Т. IV. Бесконечно малое изгибание и сферическое представление. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.

13. *Rembs E.* Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen // Math. Z. 1933. Bd 36. S. 110–121.

14. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 2. С. 47–158.

15. *Alexandrov V.* New manifestations of the Darboux's rotation and translation fields of a surface // N. Z. J. Math. 2010. V. 40. P. 59–65.

16. *Gauss C. F.* On conformal representation // D. E. Smith (ed.). A source book in mathematics. V. 2. New York: Dover Publications, 1959. P. 463–475.

17. *Chern S.-S.* An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface // Proc. Am. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 771–782.

18. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

19. *Douady A.* Le théorème d'intégrabilité des structures presque complexes (d′après des notes de X. Buff) // T. Lei (ed.). The Mandelbrot set, theme and variations. London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 274. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000. P. 307–324.

20. *Fillastre F., Slutskiy D.* (*eds.*). Reshetnyak′s theory of subharmonic metrics. Cham: Springer, 2023.

21. *Топоногов В. А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.: Физматкнига, 2012.

22. *Gray A., Abbena E., Salamon S.* Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. 3rd ed. Boca Raton: CRC, 2006.

23. *Мазья В. Г., Кресин Г. И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 458–480.

24. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
25. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
26. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
27. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 18 октября 2024 г.
После доработки 11 марта 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Александров Виктор Алексеевич (ORCID 0000-0002-6622-8214)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru