Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.938

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. В. Агапов, Д. В. Соловьев

Аннотация. Исследуются натуральные механические системы на двумерной плоскости в магнитном поле, обладающие дополнительным рациональным по импульсам первым интегралом. В данной работе построены новые интегрируемые примеры таких систем, а также исследован вопрос о существовании рациональных интегралов в отсутствии магнитного поля.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.301

Ключевые слова: натуральная система, потенциал, магнитное поле, интегрируемость, рациональный по импульсам первый интеграл, уравнение Хопфа.

1. Введение и основные результаты

Рассмотрим натуральную механическую систему

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{mg}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

с гамильтонианом H в магнитном поле ω:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x^1, x^2), \quad \omega = \Omega(x^1, x^2)\, dx^1 \wedge dx^2,$$

здесь $V(x^1, x^2)$ — потенциал, магнитная скобка Пуассона имеет вид

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Система (1) задает движение заряженной частицы на плоскости в потенциальном силовом и магнитном полях.

Функция F называется *первым интегралом* системы (1), если

$$\dot{F} = \{F, H\}_{mg} \equiv 0.$$

Отметим, что гамильтониан H сам по себе является первым интегралом (1). Если при этом найдется дополнительный интеграл F, функционально независимый с H почти всюду, то система (1) называется *вполне интегрируемой.* В этом случае согласно теореме Арнольда — Лиувилля [1] уравнения движения (1) можно проинтегрировать в квадратурах.

Во многих системах вида (1) первые интегралы являются полиномами по импульсам. Полиномиальные интегралы малых степеней таких систем хорошо

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00281, https://rscf.ru/project/24-11-00281/.

© 2025 Агапов С. В., Соловьев Д. В.

изучены в целом. Так, например, система (1) допускает линейный интеграл тогда и только тогда, когда потенциал и магнитное поле имеют один из следующих видов [2]:

• $V(x,y) = f(\alpha x+\beta y)$, $\Omega(x,y) = -2g'(\alpha x+\beta y)$, $F_1 = \alpha p_2 - \beta p_1 + g(\alpha x+\beta y)$;

• $V(x,y) = f(x^2+y^2)$, $\Omega(x,y) = -2g'(x^2+y^2)$, $F_1 = -yp_1 + xp_2 + g(x^2+y^2)$;

здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а f и g — произвольные функции одного аргумента.

Классификация квадратичных интегралов системы (1) является намного более сложной задачей (см., например, [2–4]). Приведем лишь один из известных примеров, найденный в [2].

• Пусть $S(x), R(y)$ — эллиптические функции, удовлетворяющие уравнениям

$$S'' = \alpha S^2 + \beta_1 S + \gamma_1, \quad R'' = -\alpha R^2 + \beta_2 R + \gamma_2.$$

Тогда система (1) с потенциалом

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\,(S')^2 + \frac{1}{2}\,(R')^2 + SR'' + RS'' + \mu_2 - \mu_1$$

в магнитном поле $\omega = (S'' + R'')\,dx \wedge dy$ обладает квадратичным по импульсам интегралом

$$F_2 = \frac{p_2^2}{2} + R'p_1 + S'p_2 + f,$$

где

$$\mu_1 = (S')^2 + \frac{\beta_2}{2}S^2 - \beta_3 S, \quad \mu_2 = -(R')^2 - \frac{\beta_1}{2}R^2 + \beta_3 R, \quad f = \frac{1}{2}(S')^2 + SR'' + \mu_2.$$

Полиномиальные интегралы более высоких степеней системы (1) исследовались в различных работах (см., например, [5–7] и ссылки в них).

Отметим, что поиск полиномиальных интегралов гамильтоновой системы (1) в отсутствии магнитного поля является отдельной содержательной задачей. Многочисленные примеры интегрируемых потенциалов и соответствующие ссылки можно найти в [8, 9]. Особый интерес при этом представляет случай компактных конфигурационных пространств. В [10] доказано, что система (1) на аналитической ориентируемой замкнутой двумерной поверхности рода $g > 1$ в нулевом магнитном поле не может быть аналитически интегрируема. С другой стороны, примеры интегрируемых потенциалов на двумерном торе хорошо известны, дополнительный интеграл при этом является полиномом по импульсам степени 1 или 2. Вопрос о существовании неприводимых интегралов степени $n > 2$ до сих пор является открытым: в данный момент доказано лишь отсутствие интегралов степеней $n = 3, 4, 5$ [11–13]. Интересно, что на двумерной сфере при этом существуют интегрируемые примеры с интегралами степени $n > 2$.

Упомянем также магнитные геодезические потоки, которые задаются гамильтоновой системой (1) с гамильтонианом $H = g^{ij}p_ip_j/2$, здесь $ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$ — риманова метрика на конфигурационном пространстве. В отличие от натуральных систем (1) для магнитных геодезических потоков интегрируемость одновременно на всех уровнях энергии оказывается весьма ограничительным требованием (см., например, [14] в случае замкнутой гиперболической поверхности и [15–18] в случае двумерного тора). Поэтому более естественным здесь оказывается вопрос об интегрируемости лишь на фиксированном уровне энергии (см., например, [19]), в этом случае пространство интегрируемых примеров намного богаче. В частности, на двумерном торе существуют различные интегрируемые примеры таких потоков с квадратичным первым интегралом [2, 3, 16, 20].

Вернемся к натуральной системе (1) в магнитном поле, у которой, вообще говоря, могут быть интегралы более общего вида. Систематическое изучение неполиномиальных интегралов систем вида (1), по всей видимости, впервые было начато в работах [8, 21], там же можно найти различные примеры таких интегралов.

В данной работе исследован случай, когда дополнительный интеграл F системы (1) имеет вид рациональной функции по импульсам с линейными числителем и знаменателем, т. е.

$$F = \frac{a(x,y)p_1 + b(x,y)p_2 + d(x,y)}{f(x,y)p_1 + g(x,y)p_2 + h(x,y)}. \tag{2}$$

Предположим сначала, что $f = 0$. Тогда имеет место

Лемма 1. *Если $f(x,y) \equiv 0$, то без ограничения общности можно считать, что рациональный интеграл F имеет один из следующих двух видов.*

Случай 1:

$$F = \frac{p_1 + l(x,y)}{p_2 + k(x,y)}, \tag{3}$$

Случай 2:

$$F = \frac{yp_1 - xp_2 + l(x,y)}{p_2 + k(x,y)}, \tag{4}$$

где $k(x,y)$, $l(x,y)$ — некоторые функции.

Основные результаты данной работы заключаются в следующем.

Теорема 1. *Функция F вида (3) является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции $l(x,y)$, $k(x,y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$kl = s_3xy + s_1y + s_2x - s_0, \tag{5}$$

$$l^2 - k^2 = s_3(x^2 - y^2) + 2s_1x - 2s_2y + s_4, \tag{6}$$

где $s_0, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}(k^2 + s_3x^2 + 2s_1x), \quad \omega = k_x\, dx \wedge dy.$$

Теорема 2. *Функция F вида (4) является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции $u(x,y) = yk(x,y)$, $v(x,y) = l(x,y) + xk(x,y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{aligned} 2(u^2 - v^2) = 2s_5 - 4s_4x + x^2(-4s_2 + 4s_3 + 4s_1x + s_0x^2) \\ + 2(2s_2 - 2s_3 - 3x(2s_1 + s_0x))y^2 + s_0y^4, \end{aligned} \tag{7}$$

$$uv = y(s_4 - x(-2s_2 + 2s_3 + 3s_1x + s_0x^2) + (s_1 + s_0x)y^2), \tag{8}$$

где $s_0, \dots, s_5 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{y^2} + 2s_0x^2 + 4s_1x\right), \quad \omega = \frac{u_x}{y}\, dx \wedge dy.$$

Отметим, что рациональные интегралы вида (2) системы (1) с несколько более общей точки зрения исследовались в вышеупомянутой работе [8]; там же построены некоторые частные примеры таких интегралов. В нашей работе теоремы 1, 2 дают полное описание интегрируемых потенциалов и магнитных полей системы (1), для которых имеется дополнительный рациональный интеграл (2) в случае $f(x,y) \equiv 0$. Случай $f(x,y) \neq 0$ является намного более трудным для исследования (см. ниже).

Задача о рациональных интегралах системы (1) в отсутствии магнитного поля также содержательна, на что было указано, например, в [22]. Удивительно, но, насколько нам известно, вопрос о существовании таких интегралов, не сводящихся к полиномиальным, до сих пор открыт. Некоторые результаты в этом направлении были получены в недавних работах [23, 24], где, в частности, была обнаружена любопытная связь этой задачи с мероморфными решениями уравнения Хопфа. Несколько неожиданным при этом является тот факт, что аналогичная задача для двумерных геодезических потоков исследована гораздо лучше [22]; многочисленные примеры рациональных интегралов, в том числе на фиксированном уровне энергии при наличии магнитного поля, можно найти в [25–28].

Данная работа устроена следующим образом. В разд. 2 приведены доказательства леммы 1 и теорем 1, 2. Разд. 3 посвящен исследованию общего случая $f(x,y) \neq 0$. Мы опишем трудности, возникающие при исследовании этого случая, укажем на вышеупомянутую связь с уравнением Хопфа, а также обсудим вопрос о том, как наличие или отсутствие магнитного поля влияет на существование рациональных интегралов системы (1).

2. Доказательства основных утверждений

Докажем лемму 1. Пусть первый интеграл F системы (1) имеет вид

$$F = \frac{a(x,y)p_1 + b(x,y)p_2 + d(x,y)}{g(x,y)p_2 + h(x,y)}.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при мономах старшей степени по импульсам в равенстве $\{F,H\}_{mg} \equiv 0$, получим

$$gb_y - bg_y = 0, \quad ga_x - ag_x = 0, \quad g(a_y + b_x) - ag_y - bg_x = 0. \tag{9}$$

Без ограничения общности можно считать, что $g(x,y) \neq 0$, иначе существует линейный интеграл. Интегрируя уравнения системы (9), имеем

$$a(x,y) = (c_1 y + c_2)g(x,y), \quad b(x,y) = -(c_1 x - c_3)g(x,y),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Тогда первый интеграл $\widetilde{F} = F - c_3$ примет вид

$$\widetilde{F} = \frac{(c_1 y + c_2)p_1 - c_1 x p_2 + (d/g - c_3 h/g)}{p_2 + h/g},$$

здесь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, иначе существует линейный по импульсам интеграл $\widehat{F} = 1/\widetilde{F}$. Если $c_1 = 0$, то первый интеграл $\widetilde{F}/c_2$ принимает вид (3). Если $c_1 \neq 0$, то подходящим координатным сдвигом первому интегралу можно придать вид (4). Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству теорем 1, 2.

2.1. Случай 1. Докажем теорему 1. Пусть первый интеграл F имеет вид (3), тогда соотношения (9) выполнены автоматически. Приравнивая к нулю коэффициенты при мономах оставшихся степеней в равенстве $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, получим следующие соотношения:

$$\Omega = k_x, \quad l_x = k_y, \quad l_y = -k_x, \tag{10}$$

$$V_y + kk_y = 0, \quad V_x + ll_x = 0, \tag{11}$$

$$lV_y - kV_x = 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что уравнение (12) является следствием (10), (11). Условие совместности системы (11) имеет вид $(ll_x)_y - (kk_y)_x = 0$. С учетом (10) это выражение можно переписать двумя различными способами:

$$(kl)_{yy} = 0, \quad (kl)_{xx} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$kl = \phi(x)y + \psi(x) = \xi(y)x + \eta(y), \tag{13}$$

где $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(y)$, $\eta(y)$ — неизвестные пока функции. Беря смешанную производную от этого выражения, получим $\phi'(x) = \xi'(y)$, откуда следует, что

$$\phi(x) = s_3 x + s_1, \quad \xi(y) = s_3 y + s_2,$$

где s_1, s_2, s_3 — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения в (13), имеем

$$\psi(y) = s_1 y - s_0, \quad \eta(x) = s_2 x - s_0,$$

здесь s_0 — произвольная постоянная. В итоге приходим к алгебраическому соотношению на неизвестные функции $k(x, y)$, $l(x, y)$:

$$kl = s_3 xy + s_1 y + s_2 x - s_0. \tag{14}$$

Вернемся к соотношениям (11). Проинтегрировав их, получим

$$2V(x, y) = \alpha(x) - k^2(x, y) = \beta(y) - l^2(x, y)$$

для произвольных функций $\alpha(x)$, $\beta(y)$. Следовательно,

$$l(x, y)^2 - k(x, y)^2 = \beta(y) - \alpha(x).$$

Возьмем оператор Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) от обеих частей. Левая часть ввиду (10) обратится в нуль и, следовательно,

$$\alpha''(x) = \beta''(y) = 2c_0,$$

где c_0 — произвольная постоянная. Стало быть,

$$\alpha(x) = c_0 x^2 + c_1 x + c_2, \quad \beta(y) = c_0 y^2 + c_3 y + c_4,$$

и получили второе алгебраическое соотношение на функции $k(x, y)$, $l(x, y)$:

$$l^2 - k^2 = c_0(y^2 - x^2) + c_3 y - c_1 x + c_4 - c_2. \tag{15}$$

Постоянные s_i, c_j в (14), (15) не могут быть произвольными, они связаны несколькими дополнительными соотношениями. Чтобы найти их, возьмем частные производные по x и по y от выражения $l^2 - k^2$. С учетом (10) имеем

$$(l^2 - k^2)_x = 2(lk_y + kl_y) = 2(lk)_y, \quad (l^2 - k^2)_y = -2(lk_x + kl_x) = -2(lk)_x.$$

Из этих равенств с учетом (14), (15) следует, что $c_0 = -s_3$, $c_1 = -2s_1$, $c_3 = -2s_2$. Обозначая $s_4 = c_4 - c_2$, приходим к искомой системе (5), (6) на неизвестные функции $k(x,y)$ и $l(x,y)$. Выпишем ее решения в явном виде:

$$l(x,y) = \pm \frac{\sqrt{2}(s_2x + s_1y + s_3xy - s_4)}{\sqrt{-s_4 - 2s_1x - s_3x^2 + 2s_2y + s_3y^2 \pm \sqrt{h(x,y)}}},$$

$$k(x,y) = \pm \frac{\sqrt{-s_4 - 2s_1x - s_3x^2 + 2s_2y + s_3y^2 \pm \sqrt{h(x,y)}}}{\sqrt{2}},$$

здесь $h(x,y) = (s_4 + 2s_1x - 2s_2y + s_3(x-y)(x+y))^2 + 4(s_2x + s_1y + s_3xy - s_0)^2$.

Теорема 1 доказана.

Как видно, в общем случае выражения для первого интеграла, а также для потенциала и магнитного поля оказываются достаточно громоздкими. Покажем, как при помощи теоремы 1 можно построить более простые примеры. Пусть, например, $s_1 = 1$, $s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Тогда система (5), (6) примет вид

$$2x = l^2 - k^2, \quad y = kl. \tag{16}$$

Сделаем дополнительную замену координат $(x,y) \to (k,l)$, рассматривая соотношения (16) как формулы перехода. Расширяя это преобразование координат до канонического, получим, что старые и новые импульсы связаны следующими соотношениями:

$$p_1 = \frac{-XP_X + YP_Y}{X^2 + Y^2}, \quad p_2 = \frac{YP_X + XP_Y}{X^2 + Y^2},$$

здесь введены более привычные обозначения $k = X$, $l = Y$. В новых переменных получим следующий интегрируемый пример.

Пример 1. Натуральная система с гамильтонианом

$$H = \frac{P_X^2 + P_Y^2}{2(X^2 + Y^2)} - \frac{Y^2}{2}$$

в магнитном поле $\omega = XdX \wedge dY$ вполне интегрируема, дополнительный интеграл имеет вид

$$F = \frac{-XP_X + YP_Y + Y(X^2 + Y^2)}{YP_X + XP_Y + X(X^2 + Y^2)}, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что эта система не обладает линейными по импульсам интегралами и интеграл F неприводим.

Отметим, что гамильтониан H в примере 1 имеет вид $H = g^{ij}P_iP_j/2 + V$, однако соответствующая метрика $ds^2 = g_{ij}\,du^i du^j$, разумеется, плоская.

2.2. Случай 2. Докажем теорему 2. Пусть первый интеграл F имеет вид (4), тогда соотношения (9) выполнены автоматически. Оставшиеся уравнения имеют вид

$$\Omega = k_x, \quad -yk_y + xk_x + l_x = 0, \quad yk_x + xk_y + l_y = 0,$$

$$yV_y + k(xk_x + l_x) = 0, \quad -lk_y + k(yk_x + l_y) - yV_x = 0,$$

$$(xk + l)V_y - ykV_x = 0.$$

Введя обозначения

$$u(x,y) = yk(x,y), \quad v(x,y) = l(x,y) + xk(x,y),$$

перепишем эту систему в виде

$$v_y + u_x = 0, \quad v_x - u_y = 0, \tag{17}$$

$$u(yu_y - u) + y^3 V_y = 0, \quad -v(u - yu_y) + y^3 V_x = 0. \tag{18}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что общее решение системы (17), (18) имеет вид (7), (8). Детали для краткости опустим.

Теорема 2 доказана.

Общее решение системы (7), (8) имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому, как и в случае 1, приведем несколько простых примеров, которые получаются из теоремы 2.

Пример 2. Пусть $s_0 = s^2/2$, остальные константы положим равными нулю. Получим однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем (1):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{s^2(x^2+y^2)^2}{8y^2}, \quad F = \frac{2y(-xp_2 + yp_1) + sx(x^2+y^2)}{2yp_2 + s(y^2 - x^2)},$$

$$\omega = -\frac{sx}{y} dx \wedge dy, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Пример 3. Пусть $s_3 = 1/(2s^2)$, остальные константы положим равными нулю. Получим однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем (1):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{x^2}{2s^2y^2}, \quad F = \frac{x^2 - sxyp_2 + (1 + sp_1)y^2}{-x + syp_2},$$

$$\omega = -\frac{1}{sy} dx \wedge dy, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Полагая $s = 1$ и $s = -1$ в примерах 2, 3 соответственно, получим интегрируемые примеры, найденные в [8, 21].

3. Общий случай $f(x, y) \neq 0$ и связь с уравнением Хопфа

Рациональные интегралы (2) натуральной системы (1) в отсутствии магнитного поля, т. е. при $\Omega(x, y) \equiv 0$, исследовались в работах [23, 24]. В [24] доказано, что если $f(x, y) \equiv 0$, т. е. если первый интеграл F имеет вид (3) или (4), то у системы (1) обязательно существует линейный по импульсам первый интеграл. Сравнивая этот результат с утверждениями теорем 1, 2, убеждаемся в том, что добавление ненулевого магнитного поля существенным образом расширяет пространство интегрируемых примеров, порождая нетривиальные рациональные интегралы вида (3), (4).

Рассмотрим теперь более общий случай. Предположим, что система (1) (в магнитном поле или без него) обладает рациональным интегралом F вида (2) и $f(x, y) \neq 0$. Воспользуемся простым техническим фактом: наличие магнитного поля не дает вклада в уравнения, эквивалентные обращению в нуль коэффициентов скобки Пуассона при мономах старшей степени. Поэтому из условия $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, равно как и из условия $\{F, H\} \equiv 0$, следуют соотношения

$$fa_x - af_x = 0, \tag{19}$$

$$ga_x + f(a_y + b_x) - bf_x - a(f_y + g_x) = 0, \tag{20}$$

$$fb_y + g(a_y + b_x) - ag_y - b(f_y + g_x) = 0, \tag{21}$$

$$gb_y - bg_y = 0. \tag{22}$$

Из (19), (22) вытекает, что $a(x, y) = A(y)f(x, y)$, $b(x, y) = B(x)g(x, y)$. Отметим, что если $A(y) \equiv B(x) \equiv C$, где C — произвольная постоянная, то в этом случае существует линейный по импульсам первый интеграл $F_1 = 1/(F - C)$.

Обозначим $f(x, y) = w(x, y)g(x, y)$. Уравнения (20), (21) принимают вид

$$(A - B)w_x + w(wA' + B') = 0, \quad (A - B)w_y + wA' + B' = 0. \tag{23}$$

Из (23), в частности, следует, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению Хопфа:

$$w_x - ww_y = 0. \tag{24}$$

Замечание 1. Хорошо известно, что единственное гладкое на всей плоскости решение уравнения Хопфа (24) — это решение $w(x, y) \equiv \mathrm{const}$. Единственное мероморфное решение (см. [29]) имеет вид $w(x, y) = -(y+c_1)/(x+c_2)$. Оба этих случая были полностью исследованы в [23, 24].

Любопытно, что метод разделения переменных, примененный к уравнению Хопфа (24), дает в точности эти и только эти решения.

Замечание 2. Любое непостоянное решение (24) можно записать в неявном виде следующим образом:

$$y + wx = s(w),$$

где $s(w)$ — произвольная функция. Так, например, если взять $s(w) = P/Q$, где P, Q — полиномы по w невысоких степеней с постоянными коэффициентами, то функция $w(x, y)$ находится в радикалах. Нам неизвестно, существуют ли другие функции $s(w)$, для которых функцию $w(x, y)$ можно найти в явном виде.

Интегрируя соотношения (23), получим

$$w(x, y) = \frac{A(y) - B(x)}{u(y) + xA'(y)} = \frac{v(x) - yB'(x)}{A(y) - B(x)},$$

где $u(y)$, $v(x)$ — произвольные функции, удовлетворяющие нетривиальному условию совместности

$$(u(y) + xA'(y))\,(v(x) - yB'(x)) = (A(y) - B(x))^2\,. \tag{25}$$

Одна из основных сложностей, возникающих при исследовании общего случая, заключается в том, чтобы найти *все* такие функции $A(y)$, $B(x)$, $u(y)$, $v(x)$, удовлетворяющие уравнению (25). Некоторые частные решения уравнения (25) при этом найти не так сложно; приведем здесь те, которые отвечают постоянной либо мероморфной функции $w(x, y)$.

Если $w(x, y) \equiv c_0$, то

$$A(y) = c_1 y + c_2, \quad B(x) = -c_0 c_1 x + c_3,$$

$$u(y) = (c_1 y + c_2 - c_3)/c_0, \quad v(x) = c_0(c_0 c_1 x + c_2 - c_3).$$

Если $w(x, y) = -(y + c_1)/(x + c_2)$, то

$$A(y) = \frac{c_3}{c_1 + y} + c_5, \quad B(x) = \frac{c_4}{c_2 + x} + c_5,$$

$$u(y) = \frac{c_4(c_1 + y) - c_2 c_3}{(c_1 + y)^2}, \quad v(x) = \frac{-c_3(c_2 + x) + c_1 c_4}{(c_2 + x)^2}.$$

Здесь $c_0, \ldots, c_5$ — произвольные постоянные. Построенные функции $A(y)$, $B(x)$, $u(y)$, $v(x)$ удовлетворяют уравнению (25) и, следовательно, задают частные решения системы (19)–(22). Однако анализ остальных уравнений, вытекающих из условия $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, даже в этих частных случаях оказывается очень сложным.

Очень интересным также является вопрос о том, существуют ли другие нетривиальные решения уравнения (25) и, в случае положительного ответа, каким функциям $w(x, y)$ они отвечают. Ответ на этот вопрос нам неизвестен.

4. Заключение

В данной работе продолжены исследования рациональных интегралов (2) гамильтоновой системы (1), начатые ранее в [8, 21]. Случай $f(x, y) \equiv 0$ полностью исследован, получено полное описание соответствующих потенциалов и магнитных полей (см. теоремы 1, 2). Интересно, что наличие ненулевого магнитного поля во всех построенных интегрируемых примерах оказывается существенным — в противном случае, как следует из результатов [23, 24], система (1) обязательно обладает линейным первым интегралом.

Исследование общего случая $f(x, y) \neq 0$ является непростой задачей, один из возможных подходов к ней и связанные с ним трудности были описаны выше в разд. 3. Альтернативный подход, основанный на несколько иных идеях, был предложен в [8], но, насколько нам известно, он не получил в дальнейшем особого развития. Вполне вероятно, что эта задача станет предметом наших дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. *Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P.* Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. 1985. V. 26, N 12. P. 3070–3079.
3. *Ferapontov E. V., Fordy A. P.* Non-homogeneous systems of hydrodynamic type, related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term // Physica D. 1997. V. 108. P. 350–364.
4. *Марихин В. Г., Соколов В. В.* Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам // Теорет. и мат. физика. 2006. Т. 149, № 2. С. 147–160.
5. *Yehia H. M.* On certain two-dimensional conservative mechanical systems with a cubic second integral // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. V. 5. P. 9469–9487.
6. *Yehia H. M., Elmandouh A. A.* Integrable 2D time-irreversible systems with a cubic second integral // Adv. Math. Phys. 2016.V. 2016. 8958747.
7. *Elmandouh A. A.* New integrable problems in rigid body dynamics with quartic integrals // Acta Mech. 2015. V. 226. P. 2461–2472.
8. *Hietarinta J.* Direct methods for the search of the second invariant // Physics Rep. 1987. V. 147, N 2. P. 87–154.
9. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
10. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299–1302.

11. *Денисова Н. В., Козлов В. В.* Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 43–63.
12. *Миронов А. Е.* О полиномиальных интегралах механической системы на двумерном торе // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 4. С. 145–156.
13. *Денисова Н. В., Козлов В. В., Трещев Д. В.* Замечания о полиномиальных интегралах высших степеней обратимых систем с торическим пространством конфигураций // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 5. С. 57–72.
14. *Тайманов И. А.* О примере перехода от хаоса к интегрируемости в магнитных геодезических потоках // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 4. С. 632–634.
15. *Taimanov I. A.* On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 6. P. 667–678.
16. *Тайманов И. А.* О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 241–260.
17. *Agapov S., Valyuzhenich A.* Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels // Disc. Cont. Dynam. Systems. A. 2019. V. 39, N 11. P. 6565–6583.
18. *Агапов С. В., Валюженич А. А., Шубин В. В.* Некоторые замечания о полиномиальных интегралах высокой степени магнитного геодезического потока на двумерном торе // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 715–720.
19. *Bialy M. L., Mironov A. E.* New semi-Hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces // Cent. Europ. J. Math. 2012. V. 10, N 5. P. 1596–1604.
20. *Agapov S. V., Bialy M., Mironov A. E.* Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs // Comm. Math. Phys. 2017. V. 351, N 3. P. 993–1007.
21. *Hietarinta J.* New integrable Hamiltonians with transcendental invariants // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52, N 13. P. 1057–1060.
22. *Козлов В. В.* О рациональных интегралах геодезических потоков // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 439–445.
23. *Агапов С. В.* Рациональные интегралы натуральной механической системы на двумерном торе // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 255–265.
24. *Агапов С. В., Турсунов М. М.* О рациональных интегралах двумерных натуральных систем // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 665–674.
25. *Agapov S., Shubin V.* Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: New examples // J. Geom. Physics. 2021. V. 170. 104389.
26. *Agapov S., Potashnikov A., Shubin V.* Integrable magnetic geodesic flows on 2-surfaces // Nonlinearity. 2023. V. 36, N 4. P. 2129–2147.
27. *Agapov S., Shubin V.* New examples of non-polynomial integrals of two-dimensional geodesic flows // J. Phys. A: Math. Theor. 2024. V. 57, N 1. Paper no. 015204, 17 pp.
28. *Agapov S. V., Demina M. V.* Integrable geodesic flows and metrisable second-order ordinary differential equations // J. Geom. Physics. 2024. V. 199. 105168.
29. *Saleeby E. G.* Meromorphic solutions of generalized inviscid Burgers' equations and a family of quadratic PDEs // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 425, N 1. P. 508–519.

Поступила в редакцию 8 октября 2024 г.
После доработки 8 октября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Агапов Сергей Вадимович (ORCID 0009-0009-4135-5792)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agapov.sergey.v@gmail.com

Соловьев Дмитрий Вячеславович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
d.solovev@g.nsu.ru