Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 510.5

ОДИН ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЙ СЕМЕЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Изучается обобщение понятия эффективно минимальной нумерации, полученное его релятивизацией относительно тьюринговых скачков подмножеств натурального ряда. На основе такого обобщения проводится классификация минимальных нумераций, вычислимых в арифметической и гиперарифметической иерархиях.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.214

Ключевые слова: нумерация, минимальная нумерация, эффективно минимальная нумерация, вычислимость с оракулом, арифметическая нумерация.

1. Введение

В теории вычислимых нумераций одними из наиболее интенсивно исследуемых объектов являются минимальные нумерации. Это вызвано тем, что образованный ими класс содержит как однозначные, так и позитивные нумерации, а сами они определяют минимальные элементы полурешеток Роджерса вычислимых семейств, ассоциированных с отношением сводимости нумераций.

Общие понятия, используемые в статье, содержатся в монографиях Ю. Л. Ершова [1] и Соара [2]. В частности, для любого частичного отображения φ области его определения и значений обозначаются через $\operatorname{dom}\varphi$ и $\operatorname{ran}\varphi$ соответственно; пишем $\varphi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\varphi$, и $\varphi(x)\uparrow$ в противном случае. Через $c(x, y)$ обозначается возрастающая по каждому аргументу вычислимая биекция из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Основными объектами исследований статьи являются нумерации, вычислимые в уровнях арифметической иерархии, введенные и впервые изученные С. С. Гончаровым и А. Сорби в работе [3]. Для произвольного натурального $n > 0$ нумерация μ семейства Σ^0_n-множеств называется Σ^0_n-*вычислимой*, если

$$G_\mu \leftrightharpoons \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : y \in \mu(x)\} \in \Sigma^0_n.$$

Напомним, что нумерация μ называется *сводимой к нумерации* ν *посредством вычислимой функции* f, если $\mu = \nu \circ f$. Будем говорить, что μ *сводима* к ν и в этом случае использовать обозначение $\mu \le \nu$, если μ сводится к ν посредством некоторой вычислимой функции. Напомним также, что нумерация μ называется *минимальной*, если для любой нумерации $\nu \le \mu$ множества $\operatorname{ran}\mu$ имеет место

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-11-00227) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

сводимость $\mu \leq \nu$. Отметим, что согласно [4] любое семейство Σ^0_n-множеств, $n > 1$, обладающее Σ^0_n-вычислимой нумерацией, обладает и минимальной Σ^0_n-вычислимой нумерацией.

Цель статьи заключается в алгоритмической классификации минимальных Σ^0_n-вычислимых нумераций для любого наперед заданного $n > 0$. Она, в свою очередь, основывается на классификации минимальных нумераций, предложенной С. А. Бадаевым в работе [5]. В ней кроме однозначных, разрешимых и позитивных нумераций были исследованы обобщающие их строго минимальные и эффективно минимальные нумерации. Определение последних допускает следующую релятивизацию: для произвольного оракула A нумерация μ называется *A-эффективно минимальной посредством частично A-вычислимой функции* ψ, если для каждого e, для которого отображение $\mu \circ \varphi_e$ является нумерацией множества $\operatorname{ran}\mu$, $\psi(e)\downarrow$ и μ сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\psi(e)}$. Будем говорить, что нумерация μ *A-эффективно минимальна*, если она A-эффективно минимальна посредством некоторой частично A-вычислимой функции.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть $n > 0$. Тогда для любого m если $0 < m \leq n+1$, то существует $\varnothing^{(m)}$-эффективно минимальная Σ^0_n-вычислимая нумерация, которая не является $\varnothing^{(m-1)}$-эффективно минимальной.*

Эта теорема представляет собой следствие теорем 2 и 3 более общего характера, которые формулируются и доказываются в последующих разделах статьи. В заключительном разделе статьи теорема 1 распространяется на нумерации, вычислимые в уровнях гиперарифметической иерархии.

2. A'-эффективно минимальная, но не A-эффективно минимальная нумерация

Следуя [3, 6], для произвольного множества A нумерацию μ семейства подмножеств $\mathbb{N}$ назовем *A-вычислимой*, если множество G_μ вычислимо перечислимо относительно A. Таким образом, для любого $n > 0$ классы Σ^0_n-вычислимых и $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимых нумераций совпадают.

В доказательстве следующей теоремы через $\{0,1\}^*$ обозначается множество всех конечных строк в алфавите $\{0,1\}$. Для произвольной строки $\sigma \in \{0,1\}^*$ через $|\sigma|$ будем обозначать ее длину. Если $m < |\sigma|$, то через $\sigma(m)$ обозначаем m-й символ строки σ. Если $m \leq |\sigma|$, то через $\sigma \upharpoonright m$ обозначаем начальный сегмент строки σ длины m. Для строк $\sigma, \rho \in \{0,1\}^*$ используем запись $\sigma <_L \rho$, если существует такое m, что $m < |\sigma|$, $m < |\rho|$, $\sigma(m) = 0$, $\rho(m) = 1$ и $\sigma(l) = \rho(l)$ для всех $l < m$. Будем также использовать запись $\sigma \leq_L \rho$, если $\sigma <_L \rho$ или $\sigma = \rho$.

Зафиксируем какую-нибудь вычислимую биекцию d из множества всех непустых строк в алфавите $\{0,1\}$ на $\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Для любого множества A существует A'-эффективно минимальная A-вычислимая нумерация, которая не является A-эффективно минимальной.*

Доказательство. Чтобы для произвольного множества A определить нумерацию μ, удовлетворяющую заключению теоремы, построим двойную сильно A-вычислимую последовательность конечных множеств $\{\mu_s(x)\}_{s,x\in\mathbb{N}}$ такую, что для всех x и s справедливо включение $\mu_s(x) \subseteq \mu_{s+1}(x)$. После этого для всех x определим $\mu(x) = \bigcup\limits_s \mu_s(x)$.

Построение

Шаг 0. Положим $\mu_0(x) = \{x\}$ для каждого x. На всех последующих шагах $s+1$ построения для каждого x будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$, если не указано обратное.

В построении обеспечим, чтобы для каждого n такого, что частичная функция Φ_n^A всюду определена, нашлось число e, для которого φ_e всюду определена и $\operatorname{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \operatorname{ran}\mu$, но μ не сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi_n^A(e)}$. Тем самым мы добьемся, что нумерация μ не будет A-эффективно минимальной. Чтобы для произвольного n обеспечить выполнение этого условия, а также условия A'-эффективной минимальности μ, будем использовать конечное число стратегий, каждая из которых зависит от одной из строк σ длины $n+1$. Чтобы одна из этих стратегий была успешной, на последующих шагах построения будем использовать двойную последовательность строк $\{\sigma_n^s\}_{n,s\in\mathbb{N}}$, определенную следующим образом. Для всех n и s строка σ_n^s является такой строкой σ длины $n+1$, что для всех $m \leq n$ и всех строк τ длины, не превышающей $n-m$, тогда и только тогда выполняется равенство $\sigma(m) = 0$, когда существует тройка не превышающих s чисел x_0, x_1, x_2, в которой каждое x_i, $i = \overline{0,2}$, удовлетворяет условию

$$\varphi_{m,s}(x_i)\downarrow = 3d((\sigma \upharpoonright m)0\tau) + i.$$

Нетрудно видеть, что для каждого n существует конечный предел

$$\sigma_n \leftrightharpoons \lim_s \sigma_n^s$$

и $\sigma_n^{s+1} \leq_L \sigma_n^s$ для всех s. Далее в построении обеспечим, что строкам σ_n, $n \in \mathbb{N}$, будут соответствовать успешные стратегии.

Зафиксируем число b такое, что φ_b нигде не определена. В построении будем также определять последовательность вычислимых функций $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, отображающих $\{0,1\}^*$ в $\mathbb{N}$. Для каждой строки σ положим $f_0(\sigma) = b$. Для всех s и σ, если не оговорено противное, будем считать, что $f_{s+1}(\sigma) = f_s(\sigma)$. На последующих шагах построения обеспечим, чтобы для каждого n существовал конечный предел $\lim_s f_s(\sigma_n) = e$ такой, что φ_e всюду определена, $\operatorname{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \operatorname{ran}\mu$ и μ не сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi_n^A(e)}$, если Φ_n^A всюду определена.

Шаг $s+1$. Действия этого шага построения разбиваются на три этапа.

1. Если существует $n \leq s$, для которого $f_s(\sigma_n^s) = b$, то выберем наименьшее n с этим свойством и для всех $i = \overline{0,2}$ определим

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s) + i) = \bigcup_{k=0}^{2} \mu_s(3d(\sigma_n^s) + k). \tag{1}$$

После этого положим значение $f_{s+1}(\sigma_n^s)$ равным гёделевскому номеру вычислимой функции g, определенной следующим образом:

$$g(3d(\sigma_n^s) + 2) = 3d(\sigma_n^s) + 1,$$

$$g(x) = x$$

для всех x, отличных от $3d(\sigma_n^s) + 2$.

2. Если существует $n \leq s$, для которого

$$f_s(\sigma_n^s) \neq b \,\&\, \varphi_{\Phi_{n,s}^A(f_s(\sigma_n^s))}(3d(\sigma_n^s) + 2)\downarrow = 3d(\sigma_n^s) + i \tag{2}$$

при некотором $i = \overline{0,2}$ и

$$\mu_s(3d(\sigma_n^s)) = \mu_s(3d(\sigma_n^s) + 1) = \mu_s(3d(\sigma_n^s) + 2), \tag{3}$$

то выберем наименьшее n, удовлетворяющее этим условиям, и наименьшее

$$y > \max \mu_s(3d(\sigma_n^s)),$$

а затем определим

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s)) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y\}, \tag{4}$$

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s) + k) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y + 1\}, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

если $i = 0$. Если же $i > 0$, то полагаем

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s) + j) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y\}, \quad j = 0, 2, \tag{6}$$

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s) + 1) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y + 1\}. \tag{7}$$

3. Чтобы обеспечить минимальность нумерации μ, для всех строк ρ таких, что $|\rho| \leq s$,

$$\mu_s(3d(\rho) + i) = \mu_s(3d(\rho) + k)$$

для некоторых различных $i, k = \overline{0,2}$ и $\sigma_n^s <_L \rho$, где $n = |\rho|$, выберем наименьшее

$$y > \max \mu_s(3d(\rho) + i), \quad i = \overline{0,2},$$

и для каждого $i = \overline{0,2}$ определим

$$\mu_{s+1}(3d(\rho) + i) = \mu_s(3d(\rho)) \cup \{y + i\}.$$

Этим завершается описание построения. Непосредственно из построения следует, что нумерация μ является A-вычислимой. Также нетрудно видеть, что для произвольных строк ρ, σ и чисел $i, k = \overline{0,2}$ если $\rho \neq \sigma$, то $\mu(3d(\rho) + i) \neq \mu(3d(\sigma) + k)$. Покажем, что нумерация μ удовлетворяет остальным заключениям теоремы.

Лемма 1. *Нумерация μ не является A-эффективно минимальной.*

Доказательство. Предположим, напротив, что μ является A-эффективно минимальной посредством некоторой частично A-вычислимой функции Φ_n^A. Выберем $s \geq n$ такое, что $\sigma_n^s = \sigma_n$ и n — наименьшее число, не превышающее s, для которого $f_s(\sigma_n) = b$. Тогда на первом этапе шага $s + 1$ построения значение $f_{s+1}(\sigma_n)$ полагается равным гёделевскому номеру определенной на нем вычислимой функции g. Отметим, что $\operatorname{ran} g = \mathbb{N} \setminus \{3d(\sigma_n) + 2\}$. Отсюда и из присваиваний (1) следует, что на втором этапе одного из последующих шагов построения выполняются условия (2) для некоторого $i = \overline{0,2}$ и (3). Стало быть, присваивания (4)–(7) обеспечивают, что

$$\mu(3d(\sigma_n) + 2) \neq \mu(\varphi_{f_{s+1}(\sigma_n)}(\varphi_{\Phi_n^A(f_{s+1}(\sigma_n))}(3d(\sigma_n) + 2))).$$

Таким образом, получаем противоречие с A-эффективной минимальностью μ посредством Φ_n^A.

Лемма 2. *Нумерация μ является A'-эффективно минимальной.*

Доказательство. Выберем произвольное n и предположим, что отображение $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией семейства $\operatorname{ran}\mu$. Покажем, что тогда для любой строки ρ длины больше n и любого числа $i = \overline{0,2}$ существует x, для которого $\varphi_n(x) = 3d(\rho) + i$. Пусть $|\rho| = l > n$. Если $\sigma_{l-1} <_L \rho$, то действиями третьих этапов шагов построения обеспечивается, что для каждого $i = \overline{0,2}$ множество $\mu(3d(\rho)+i)$ имеет единственный номер в нумерации μ. Непосредственно из построения следует, что это же верно и в случае $\rho <_L \sigma_{l-1}$. Пусть $\rho = \sigma_{l-1}$. Тогда из определения последовательности $\{\sigma^s_m\}_{m,s\in\mathbb{N}}$ следует, что $\rho(n) = 0$ и для каждого $i = \overline{0,2}$ существует такое x_i, что $\varphi_i(x_i) = 3d(\rho) + i$. В самом деле, в противном случае нашлись бы строка τ и число $i = \overline{0,2}$ такие, что множество $\mu(3d((\rho \restriction n)0\tau) + i)$ имеет единственный номер, но $\varphi_n(x) \neq 3d((\rho \restriction n)0\tau) + i$ для любого x. Это противоречит тому, что $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией $\operatorname{ran}\mu$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число строк δ таких, что для некоторых различных $i, k = \overline{0,2}$ справедливо равенство

$$\mu(3d(\delta) + i) = \mu(3d(\delta) + k).$$

Длина каждой из них не превышает n. Согласно построению все эти строки определяются эффективно по n относительно оракула A'.

Таким образом, эффективно по произвольному n относительно оракула A' определяется число e такое, что если отображение $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией $\operatorname{ran}\mu$, то μ сводится к $\mu \circ \varphi_n$ посредством φ_e. Этим завершается доказательство леммы и теоремы в целом.

3. A''-эффективно минимальная, но не A'-эффективно минимальная нумерация

Заметим, что любая минимальная A-вычислимая нумерация μ является A''-эффективно минимальной. Действительно, частично A''-вычислимая функция ψ, посредством которой μ является A''-эффективно минимальной, может быть определена следующим образом. Для каждого e если φ_e всюду определена, то последовательно для каждого числа n проверяем выполнение условия

$$\forall x\,[\varphi_n(x)\downarrow \;\&\; \mu(x) = \mu(\varphi_e(\varphi_n(x)))].$$

Полагаем значение $\psi(e)$ равным наименьшему n, удовлетворяющему этому условию, если такое n существует. В противном случае полагаем $\psi(e)\uparrow$.

В доказательстве следующей теоремы используется метод построения минимальных нумераций из работы [4].

Теорема 3. *Для любого множества A существует минимальная A-вычислимая нумерация, которая не является A'-эффективно минимальной.*

Доказательство. Пусть M — максимальное множество. Выберем произвольное множество A и построим A-вычислимую нумерацию μ бесконечного семейства таким образом, чтобы для всех $x, y \in M$ выполнялось равенство

$$\mu(x) = \mu(y).$$

Тогда нумерация μ будет минимальной, поскольку если для вычислимой функции f отображение $\mu\circ f$ есть нумерация семейства $\operatorname{ran}\mu$, то ввиду бесконечности $\operatorname{ran}\mu$ и минимальности M разность $\overline{M} \setminus \operatorname{ran} f$ конечна. Пусть для каждого s

$$\overline{M_s} = \{b^s_0 < b^s_1 < b^s_2 < \dots\}.$$

Для каждого m через b_m будем обозначать предел $\lim\limits_s b^s_m$. Тройки вида $b^s_{c(n,i)}$, $i = \overline{0,2}$, будем использовать, чтобы обеспечить отсутствие свойства A'-эффективной минимальности нумерации μ подобно тому, как тройки вида $3d(\sigma^s_n) + i$ использовались в доказательстве теоремы 2 для отсутствия свойства A-эффективной минимальности строящейся там нумерации. Используя лемму о пределе, выберем тьюринговый функционал Ψ такой, что для всех n и x справедливы условия

$$\forall s\,[\Psi^A(n,x,s)\downarrow],$$

$$\Phi^{A'}_n(x)\downarrow \Rightarrow \Phi^{A'}_n(x) = \lim_s \Psi^A(n,x,s).$$

Построение.

Шаг 0. Положим $\mu_0(x) = \{x\}$ для каждого x. В построении будем также определять последовательность вычислимых функций $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, отображающих $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Для каждого n положим $f_0(n) = b$, где b — гёделевский номер нигде не определенной частично вычислимой функции. На последующих шагах построения мы обеспечим, чтобы для каждого n существовал конечный предел $\lim\limits_s f_s(n) = e$ такой, что φ_e всюду определена, $\mathrm{ran}(\mu\circ\varphi_e) = \mathrm{ran}\,\mu$ и μ не сводится к $\mu\circ\varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi^{A'}_n(e)}$, если $\Phi^{A'}_n$ всюду определена.

Для всех s и x будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$ и $f_{s+1}(x) = f_s(x)$, если не указано обратное.

Шаг $s+1$. Для всех $x \in M_s$ полагаем $\mu_{s+1}(x) = \mathbb{N}$. Для каждого $n \le s$ рассмотрим три случая.

1. Либо $f_s(n) = b$, либо для некоторого $i = \overline{0,2}$ выполняется неравенство

$$b^s_{c(n,i)} \ne b^{s+1}_{c(n,i)}.$$

В этом случае для каждого $i = \overline{0,2}$ положим

$$\mu_{s+1}\big(b^{s+1}_{c(n,i)}\big) = \bigcup_{k=0}^{2} \mu_s\big(b^{s+1}_{c(n,k)}\big)$$

и определим значение $f_{s+1}(n)$ равным гёделевскому номеру вычислимой функции g, определенной следующим образом:

$$g\big(b^{s+1}_{c(n,2)}\big) = b^{s+1}_{c(n,1)},$$

$$g(x) = x$$

для всех x, отличных от $b^{s+1}_{c(n,2)}$.

2. Условие предыдущего случая не выполняется и выполняется условие

$$\Psi^A(n, f_s(n), s) \ne \Psi^A(n, f_s(n), s+1).$$

В этом случае для каждого $i = \overline{0,2}$ положим $\mu_{s+1}\big(b^{s+1}_{c(n,i)}\big) = \bigcup\limits_{k=0}^{2} \mu_s\big(b^{s+1}_{c(n,k)}\big)$.

3. Условия первых двух случаев не выполняются. Если

$$\varphi_{\Psi^A(n,f_s(n),s)}\big(b^s_{c(n,2)}\big)\downarrow = b^s_{c(n,i)}$$

при некотором $i = \overline{0,2}$ и

$$\mu_s\big(b^s_{c(n,0)}\big) = \mu_s\big(b^s_{c(n,1)}\big) = \mu_s\big(b^s_{c(n,2)}\big),$$

то выберем наименьшее

$$y > \max \mu_s(b^s_{c(n,0)}),$$

а затем определим

$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,0)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,0)\},$$

$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,k)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,1)\}, \quad k = 1, 2,$$

если $i = 0$. Если же $i > 0$, то полагаем

$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,j)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,0)\}, \quad j = 0, 2,$$

$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,1)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,1)\}.$$

Этим завершается описание построения. Для каждого x полагаем $\mu(x) = \bigcup\limits_s \mu_s(x)$. Непосредственно из построения следует, что нумерация μ является A-вычислимой. Также нетрудно видеть, для произвольных $l, n \in \mathbb{N}$ и $i, k = \overline{0,2}$ если $l \neq n$, то $\mu(b_{c(l,i)}) \neq \mu(b_{c(n,k)})$. Отсюда следует, что семейство $\operatorname{ran}\mu$ бесконечно. Поскольку $\mu(x) = \mathbb{N}$ для всех $x \in M$, нумерация μ минимальна. Рассуждениями, почти аналогичными доказательству леммы 1, нетрудно получить, что μ не является A'-эффективно минимальной. Этим завершается доказательство теоремы.

Теперь доказательство теоремы 1 получается как следствие теорем 2 и 3. Если $m \leq n$, то по теореме 2 при $A = \varnothing^{(m-1)}$ получаем существование $\varnothing^{(m)}$-эффективно минимальной, но не $\varnothing^{(m-1)}$-эффективно минимальной Σ^0_m-вычислимой (и, значит, Σ^0_n-вычислимой) нумерации.

Если $m = n + 1$, то существование искомой нумерации получается применением теоремы 3 при $A = \varnothing^{(n-1)}$.

4. Классификации минимальных нумераций семейств гиперарифметических множеств

Определение Σ^0_n-вычислимых нумераций естественным образом распространяется на уровни гиперарифметической иерархии. Согласно [7] для конструктивного ординала $\alpha > 0$ нумерация μ семейства Σ^0_α-множеств называется Σ^0_α-*вычислимой*, если $G_\mu \in \Sigma^0_\alpha$. Таким образом, для любого бесконечного конструктивного ординала α классы Σ^0_α-вычислимых и $\varnothing^{(\alpha)}$-вычислимых нумераций совпадают. Покажем, что теорема 1 также может быть распространена на уровни гиперарифметической иерархии.

Теорема 4. *Пусть α — произвольный бесконечный конструктивный ординал. Тогда для любого ординала β если $\beta \leq \alpha + 2$, то существует $\varnothing^{(\beta)}$-эффективно минимальная Σ^0_α-вычислимая нумерация, которая ни для какого ординала $\gamma < \beta$ не является $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальной.*

Доказательство. В доказательстве теоремы используется тот факт, что для любого конструктивного ординала $\alpha > 0$ существует такое множество B, что $B' \equiv_T \varnothing^{(\alpha)}$ и $\varnothing^{(\beta)} \leq_T B$ для всех ординалов $\beta < \alpha$, который может быть установлен, например, следующим образом.

Пусть a — клиниевское обозначение ординала α и f — вычислимая функция такая, что $\operatorname{ran} f = \{b \in \mathscr{O} : b <_O a\}$. Положим $B_0 = \varnothing$. Предположим, что для некоторого s множество B_s определено. Определим конечное множество F_s, положив его равным непустому конечному множеству с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющему условиям:

(a) для всех k и l если существуют x, y, для которых $c(k,x) \in B_s$ и $c(l,y) \in F_s$, то $k < l$,

(b) $\max F_s$ строго больше, чем значение use-функции вычисления $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)$, если $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)\downarrow$, и для всех k и x если $c(k,x) > \max F_s$, то $c(k,x) \notin B_s$,

(c) $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)\downarrow$, если существует конечное F, удовлетворяющее условиям (a) и (b) с F вместо F_s, для которого $\Phi_s^{B_s \cup F}(s)\downarrow$.

Зафиксируем наименьшее k, для которого $c(k,0) > \max F_s$, и определим

$$B_{s+1} = \begin{cases} B_s \cup F_s \cup \{c(k,x) : x \in \varnothing^{(f(s))}\} \cup \{c(k+1,2s)\}, & \text{если } s \notin \varnothing^{(\alpha)}, \\ B_s \cup F_s \cup \{c(k,x) : x \in \varnothing^{(f(s))}\} \cup \{c(k+1,2s+1)\}, & \text{если } s \in \varnothing^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Полагаем $B = \bigcup_s B_s$. Нетрудно видеть, что условия (a)–(c) проверяются эффективно по s относительно оракула $\varnothing^{(\alpha)}$. Из определений множеств B_{s+1}, $s \in \mathbb{N}$, следует, что $\varnothing^{(f(s))} \leq_T B$ и что число k, для которого среди чисел вида $c(k+1,t)$ элементом B является только одно из чисел $c(k+1,2s)$, $c(k+1,2s+1)$, определяется эффективно по s относительно оракула B'. Отсюда следует, что $B' \equiv_T \varnothing^{(\alpha)}$.

Теперь предположим по индукции, что для всех бесконечных ординалов $\alpha_0 < \alpha$ заключение теоремы верно. Тогда для любого ординала $\beta < \alpha$ существует Σ^0_β-вычислимая (и, значит, Σ^0_α-вычислимая) нумерация, которая ни для какого ординала $\gamma < \beta$ не является $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальной. Если $\beta = \alpha$, то возьмем построенное множество B и, применив теорему 2, получим B-вычислимую нумерацию μ, которая является $\varnothing^{(\beta)}$-эффективно минимальной, но не является B-эффективно минимальной. Таким образом, μ Σ^0_α-вычислима и не $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальна ни для какого $\gamma < \beta$. Если $\alpha+1 \leq \beta \leq \alpha+2$, то искомая нумерация сразу получается применением теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

2. *Soare R I.* Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; New York, etc.: Springer-Verl., 1987.

3. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.

4. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.

5. *Бадаев С. А.* Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 3–34.

6. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 555–569.

7. *Badaev S. A., Goncharov S. S.* Computability and numberings / Cooper S. B., Löwe B.,

Sorbi A. (eds). New Computational Paradigms. New York, NY: Springer, 2008.

Поступила в редакцию 17 июня 2024 г.
После доработки 17 июня 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович (ORCID 0000-0002-4519-9696)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faizrahmanov@gmail.com