Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.911.5+517.977.57

РЕЛАКСАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМОЙ С МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А. А. Толстоногов

Аннотация. Изучается задача минимизации интегрального функционала на решениях связанной системы. Система состоит из эволюционного включения в сепарабельном гильбертовом пространстве с максимально монотонными операторами и обыкновенного дифференциального уравнения в сепарабельном банаховом пространстве, содержащего управление. Ограничением на управление является многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями, а интегрант является невыпуклой по управлению функцией. Наряду с исходной задачей рассматривается задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях системы с овыпукленным ограничением на управление (релаксационная задача).

Доказаны теоремы существования решения систем. Рассмотрены вопросы аппроксимации как решений овыпукленной системы, так и значений овыпукленного функционала на решениях овыпукленной системы решениями исходной системы и значениями исходного функционала на решениях исходной системы (теорема релаксации). Доказана теорема существования оптимального управления в релаксационной системе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.212

Ключевые слова: максимально монотонные операторы, невыпуклый интегрант, релаксация.

§ 1. Введение

Пусть $T = [0, a]$, $a > 0$, — отрезок числовой прямой R, $\overline{R} = (-\infty, +\infty]$, $R^+ = [0, +\infty)$, H — сепарабельное гильбертово пространство, Y — сепарабельное банахово пространство.

Через $W^{1,1}(T, H)$ обозначается пространство абсолютно непрерывных функций из T в H, имеющих производные из пространства $L^1(T, H)$.

Пусть $A : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов [1] с областью определения $D(A(t))$.

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t) \quad \text{п.в.,} \tag{1.1}$$

$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\dot{y}(t) = f(t, z(t), y(t)) + Eu(t) \quad \text{п.в.,} \tag{1.2}$$

$$y(0) = y_0$$

с ограничением на управление

$$u(t) \in U(t, z(t), y(t)) \quad \text{п.в.} \tag{1.3}$$

Здесь $f : T \times H \times H \to H$ — однозначное отображение переменных t, z, y, $E : Y \to H$ — непрерывный линейный оператор, $U : T \times H \times H \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутыми, не обязательно выпуклыми, значениями.

Включение (1.1) и уравнение (1.2) взаимосвязаны между собой. Совокупность соотношений (1.1), (1.2) будем называть *связанной управляемой системой с ограничением* (1.3) *на управление.*

Под *решением управляемой системы* (1.1)–(1.3) понимается тройка функций $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, $z(0) = z_0$, $z(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $y(0) = y_0$, $z(\cdot) \in W^{1,1}(T, H)$, $y(\cdot) \in W^{1,1}(T, H)$, $u(\cdot) \in L^1(T, Y)$, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.3).

Для числовой функции $g : T \times H \times H \times Y \to R$ рассмотрим задачу

$$J(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int_T g(t, z(t), y(t), u(t))\, dt \to \inf \tag{P}$$

на решениях управляемой системы (1.1)–(1.3).

Пусть $g_U : T \times H \times H \times Y \to \overline{R}$ — функция, определенная по правилу

$$g_U^{**}(t, z, y, u) = \begin{cases} g(t, z, y, u), & u \in U(t, z, y), \\ +\infty, & u \notin U(t, z, y), \end{cases} \tag{1.4}$$

где $g_U^{**}(t, z, y, u)$ — биполяра (вторая сопряженная) функции $u \to g_U(t, z, y, u)$ [2, 3].

Наряду с задачей (P) рассмотрим релаксационную задачу

$$J^{**}(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int_T g_U^{**}(t, z(t), y(t), u(t))\, dt \to \inf \tag{RP}$$

на решениях управляемой системы (1.1), (1.2) с овыпукленным ограничением на управление

$$u(t) \in \overline{\text{co}}\, U(t, z(t), y(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{1.5}$$

где символ $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

Решение управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением на управление (1.5) определяется аналогично решению управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением (1.3).

Множества решений управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3) и (1.5) на управление будем обозначать через $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ соответственно. Под $C(T, H)$ понимается пространство непрерывных функций из T в H с топологией равномерной сходимости на T.

Целью работы является установление взаимосвязей между задачами (P) и (RP) и множествами $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$. При достаточно общих предположениях доказывается, что

1) множества $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ непустые;

2) для любых $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ существует последовательность $(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0, y_0)$, $m \geq 1$,

$$(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \to (z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)), \tag{1.6}$$

в пространстве $C(T, H) \times C(T, H) \times |\omega|\text{-}L^1(T, Y)$,

$$J(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \to J^{**}(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)), \tag{1.7}$$

где $|\omega|$-$L^1(T,Y)$ — пространство $L^1(T,Y)$ с так называемой «слабой» нормой [4];

3) имеет место равенство

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) = \inf_{\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)). \tag{1.8}$$

Связь между задачами (P) и (RP) вытекает из равенства (1.8), а связь между решениями $\mathscr{R}_U(z_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$ устанавливается соотношением (1.6).

Если значениями ограничения $U(t,z,y)$ являются компактные множества, а пересечение $D(A(t))$, $t\in T$, с любым ограниченным множеством — относительно компактное множество, доказано существование оптимального решения задачи (RP).

В работе продолжаются исследования автора, относящиеся к релаксации в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых различными классами уравнений (см. [5–9] и др.).

Для управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, связанным с процессом выметания, существование оптимального управления и относящиеся к нему вопросы изучались в работах [9–11].

В работе [10] рассматривалась задача минимизации интегрального функционала

$$J(z,y,u) = \int_0^T \left(L(t,z(t),y(t)) + \frac{1}{2}u(t)^T E u(t) \right) dt \tag{1.9}$$

на решениях управляемой системы в конечномерном пространстве R^m

$$-z(t) \in \mathscr{N}_C z(t) - \dot{y}(t), \tag{1.10}$$

$$z(0) = z_0 \in C,$$

$$\dot{y}(t) = f(t,z(t),y(t)) + Eu(t), \tag{1.11}$$

$$y(0) = y_0,$$

$$u(t) \in \Omega. \tag{1.12}$$

Здесь $C\subset R^m$ — замкнутое выпуклое множество, $\mathscr{N}_C z$ — нормальный конус в смысле выпуклого анализа множества C в точке $z\in C$, $f: T\times R^m\times R^m \to R^m$ — нелинейное отображение, $\Omega\subset R^d$ — выпуклый компакт, E — матрица.

Была доказана теорема существования оптимального решения и получены необходимые условия оптимальности.

В работе [11] изучалась задача минимизации функционала

$$J(z,y,u) = \int_0^T [L_1(t,z(t),y(t)) + L_2(u(t))]\,dt + L_3(z(T),y(T)) \tag{1.13}$$

на решениях управляемой системы в пространстве R^m

$$-\dot{z}(t) \in \mathscr{N}_{C(t)} z(t) - R\dot{y}(t) \tag{1.14}$$

и (1.11), (1.12), где $C: T \rightrightarrows R^m$ — многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями, $L_2: R^d \to R$ — выпуклая функция, E и R — матрицы соответствующих размеров, $\Omega\subset R^d$ — выпуклый компакт. Была предложена схема численного решения этой задачи, включая доказательство существования оптимального решения.

Подобная задача с такими же результатами была рассмотрена в работе [12], в которой в конечномерном пространстве изучался вопрос минимизации функционала (1.13) на решениях системы

$$-\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t), \tag{1.15}$$

$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\dot{y}(t) = f(t, z(t), y(t)) + u(t), \tag{1.16}$$

$$y(0) = y_0$$

с ограничением (1.12). В (1.15) $A(t) \subset D(A(t)) \subset R^m$ — семейство максимально монотонных операторов.

Впервые вопросы релаксации в задаче оптимального управления, описываемой связанной системой в бесконечномерном пространстве, изучались в работе [9]. В ней были рассмотрены проблемы (P) и (RP) на решениях процесса выметания (1.14) в сепарабельном гильбертовом пространстве H и обыкновенного дифференциального уравнения (1.16) в сепарабельном банаховом пространстве Y с ограничениями (1.3) и (1.5). Если в [9] существование оптимального управления в задаче (RP) было доказано в предположении конечномерности пространств H и Y, в настоящей работе эта задача решена в бесконечномерных пространствах. Наличие оператора E в уравнении (1.2) естественно для задачи оптимального управления и значительно усложняет задачу по сравнению с работой [9]. Полученные в работе результаты носят не только теоретический характер, но имеют и прикладное значение.

Дело в том, что необходимые условия оптимальности, как правило, получены только для выпуклых задач, т. е. задач, в которых интегрант является выпуклой по управлению функцией, а ограничение на управление своими значениями имеет замкнутые выпуклые множества. В свою очередь вычислительные алгоритмы для решения задач оптимального управления базируются на необходимых условиях оптимальности. Результаты настоящей работы позволяют обосновать с точки зрения вычислительных погрешностей переход от невыпуклых задач оптимального управления к овыпукленным и использовать известные необходимые условия оптимальности и вычислительные алгоритмы для выпуклых задач при численном анализе невыпуклых задач управления.

Работа состоит из шести параграфов.

В § 1 дается постановка задачи и приводится обзор известных результатов в этом направлении. В § 2 вводятся основные обозначения, определения и формулируется ряд необходимых результатов. Основное содержание § 3 составляет доказательство теоремы существования решения системы (1.1)–(1.3). В § 4 доказывается теорема релаксации. § 5 посвящен доказательству теоремы существования решения в задаче (RP). В § 6 дается конкретизация предположений, относящихся к семейству операторов $A(t)$, $t \in T$.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой полупрямой $R^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега, $\overline{R} = (-\infty, +\infty]$, H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$, Y — сепарабельное банахово пространство с нормой $\| \cdot \|_Y$. Через Θ, Θ_Y обозначаем нулевые элементы пространств H

и Y, B, $\overline{B}$ и B_Y, $\overline{B}_Y$ — открытые и замкнутые единичные шары в пространствах H и Y соответственно.

Символы ω-H и ω-Y означают, что пространства H и Y наделены слабыми топологиями. Расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами из пространства Y обозначается через $\mathrm{haus}(\cdot,\cdot)$. Поскольку функция $\mathrm{haus}(\cdot,\cdot)$ может принимать значения $+\infty$, она называется *обобщенной метрикой Хаусдорфа.*

Пространства $L^1(T,H)$ и $L^1(T,Y)$ со слабыми топологиями обозначаются через ω-$L^1(T,H)$ и ω-$L^1(T,Y)$. На пространстве $L^1(T,Y)$ наряду со стандартной нормой $\|\cdot\|_{L^1(T,Y)}$ рассматривается так называемая «слабая» норма [4]

$$\|f\|_{\|w\|} = \max_{0\le t_1\le t_2\le 1}\left\|\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds\right\|_Y .$$

Она эквивалентна норме

$$|\,\|f\|\,| = \max_{t\in T}\left\|\int_{0}^{t} f(s)\,ds\right\|_Y .$$

Пространство $L^1(T,Y)$ с этой нормой обозначается через $|w|$-$L^1(T,Y)$.

Для множества $C\subset Y$ пусть

$$\|C\|_Y = \sup\{\|y\|_Y;\ y\in C\},$$

а $d_Y(x,C)$ означает расстояние от точки $x\in Y$ до множества $C\subset Y$.

Функция $\omega: T\times R^+\times R^+\to R^+$ называется *интегрально ограниченной* на ограниченных множествах из $R^+\times R^+$ функцией Каратеодори, если

1) функция $t\to\omega(t,\alpha,\beta)$ измерима, $\alpha,\beta\in R^+$;

2) функция $(\alpha,\beta)\to\omega(t,\alpha,\beta)$ непрерывна п.в., $(\alpha,\beta)\in R^+\times R^+$;

3) для любого $m>0$ существует функция $L_m(\cdot)\in L^1(T,R^+)$ такая, что

$$\omega(t,\alpha,\beta)\le L_m(t)\ \text{п.в.},\quad 0\le\alpha\le m,\ 0\le\beta\le m.$$

Типичным примером функции $\omega(t,\alpha,\beta)$ может служить функция $\omega(t,\alpha,\beta) = k(t)(\alpha+\beta)$, $k(\cdot)\in L^1(T,R^+)$.

В определениях измеримости как однозначных, так и многозначных отображений следуем работе [13].

Пусть $A(t): D(A(t))\subset H\rightrightarrows H$, $t\in T$, — семейство максимально монотонных операторов. Рассмотрим включение

$$\dot z(t)\in A(t)z(t)+f(t), \tag{2.1}$$

$$z(0)=z_0\in D(A(0)),\quad f(\cdot)\in L^1(T,H).$$

Под *решением включения* (2.1) понимается абсолютно непрерывная функция $z(f): T\to H$, $z(f)(0)=z_0$, $z(f)(t)\in D(A(t))$, $t\in T$, производная $\dot x(f)(t)$ которой удовлетворяет включению

$$\dot z(f)(t)\in A(t)z(f)(t)+f(t)\quad \text{п.в.}$$

Гипотезы $H(A)$**.** (1) *Для любого* $f(\cdot) \in L^1(T, H)$ *включение* (2.1) *имеет решение;*

(2) *для любого* $\beta(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *множество*

$$\{z(f)(\cdot);\ f(\cdot) \in S_\beta\},\ S_\beta = \{f(\cdot) \in L^1(T, H);\ \|f(t)\| \le \beta(t) \text{ п.в.}\}$$

равностепенно непрерывно;

(3) *для любого* $r \ge d(\Theta, D(A(t)))$ *множество* $D(A(t)) \cap r\overline{B}$ *относительно компактно.*

Условия, при которых справедливы гипотезы $H(A)$, будут даны в разд. 6.

Гипотезы $H(f)$**.** *Функция* $f : T \times H \times H \to H$ *обладает следующими свойствами:*

(1) *функция* $t \to f(t, z, y)$ *измерима;*

(2) *существует функция* $k_f(\cdot) \in L^1(T, R)$, $k_f(t) > 0$, $t \in T$, *такая, что*

$$\|f(t, z_1, y_1) - f(t, z_2, y_2)\| < k_f(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|) \quad \text{п.в.}; \tag{2.2}$$

(3) *справедливо неравенство*

$$\|f(t, \Theta, y_0\| < c_f(t), \quad c_f(t) > 0, \quad c_f(\cdot) \in L^1(T, R^+). \tag{2.3}$$

Гипотеза $H(E)$**.** *Оператор* $E : Y \to H$ *является линейным и непрерывным.*

Гипотезы $H(U)$**.** *Многозначное отображение* $U : T \times H \times H \to Y$ *с замкнутыми значениями обладает следующими свойствами:*

(1) *отображение* $t \to U(t, z, y)$ *измеримо,* $z, y \in H$*;*

(2) *существует функция* $k_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$, $k_U(t) > 0$, $t \in T$, *такая, что*

$$\operatorname{haus}(U(t, z_1, y_1), U(t, z_2, y_2)) < k_U(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|); \tag{2.4}$$

(3) *справедливо неравенство*

$$d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta, y_0)) < c_U(t), \tag{2.5}$$

$c_U(t) > 0$, $t \in T$, $c_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$;

(3^*) *имеет место неравенство*

$$\|U(t, \Theta, y_0)\|_Y < c_U(t), \tag{2.6}$$

$c_U(t) > 0$, $t \in T$, $c_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$.

Гипотезы $H(g)$**.** *функция* $g : T \times H \times H \times Y \to R$ *обладает свойствами*

(1) *функция* $t \to g(t, z, y, u)$ *измерима,* $z, y \in H$, $u \in Y$;

(2) *для любого* $M > 0$ *существует интегрально ограниченная на ограниченных множествах функция Каратеодори* $\omega_M : T \times R^+ \times R^+ \to R^+$, $\omega_M(t, 0, 0) = 0$ *п.в., и число* $k_M > 0$ *такие, что*

$$|g(t, z_1, y_1, u_1) - g(t, z_2, y_2, u_2)| \le \omega_M(t, \|z_1 - z_2\|, \|y_1 - y_2\|) + k_M\|u_1 - u_2\|_Y \text{ п.в.}, \\ \|z_i\| \le M, \quad \|y_i\| \le M, \quad u_i \in Y,\ i = 1, 2; \tag{2.7}$$

(3) *справедливы неравенства*

$$|g(t, z, y, u)| \le \alpha_M(t), \quad \|y\| \le M, \quad \|z\| \le M,$$

$$u \in \overline{\text{co}}U(t,z,y) \quad \alpha_M(\cdot) \in L^1(T,R^+).$$

Типичным примером функции $g : T \times Z \times H \times Y \to R$ со свойствами $H(g)(2),(3)$ может служить функция, удовлетворяющая неравенствам

$$|g(t,z_1,y_1,u_1) - g(t,z_2,y_2,u_2)| \le k_g(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|) + \alpha_U \|u_1 - u_2\|_Y,$$
$$k_g(\cdot) \in L^1(T,R^+), \quad \alpha_U > 0,\ z_i, y_i \in H,\ u_i \in Y,\ i = 1,2,$$
$$|g(t,\Theta,\Theta,u)| \le \alpha(t), \quad z,y \in H,\ u \in \overline{\text{co}}U(t,z,y),$$

при выполнении гипотезы $H(U)(3^*)$, $\alpha(\cdot) \in L^1(T,R^+)$.

Всюду в дальнейшем считаем, что выполняются гипотезы $H(f)$, $H(U)(1)$–(3), $H(g)$.

Приведем результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть выполняется гипотеза $H(A)(1)$. Тогда для любого $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$ решение $z(\dot{v})$ включения (2.1) единственно и имеет место неравенство*

$$\|z(\widehat{v}_1)(t) - z(\widehat{v}_2)(t)\| \le \int_0^t \|\widehat{v}_1(s) - \widehat{v}_2(s)\|\,ds \tag{2.8}$$

для любых $\widehat{v}_i(\cdot) \in L^1(T,H)$, $i = 1,2$.

Если выполняется гипотеза $H(A)(2)$, последовательность $\widehat{v}_n(\cdot) \in L^1(T,H)$, $n \ge 1$, сходится к $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$ и имеет место неравенство

$$\|\widehat{v}_n(t)\| \le \beta(t) \text{ п.в.}, \quad n \ge 1,\ \beta(\cdot) \in L^1(T,R^+), \tag{2.9}$$

а множество $\left\{\bigcup \widehat{v}_n(t);\ n \ge 1\right\} \subset H$ относительно компактно при почти всех $t \in T$, то последовательность $z(v_n)(\cdot)$, $n \ge 1$, сходится в пространстве $C(T,H)$ к $z(\widehat{v})(\cdot)$.

Доказательство. Единственность решения $z(\widehat{v})(\cdot)$ включения и неравенство (2.8) хорошо известны.

Пусть $z(\Theta)(\cdot)$ — решение включения (2.1) при $f(t) \equiv \Theta$, $t \in T$. Воспользовавшись неравенствами (2.8), (2.9), получим

$$\|z(\widehat{v}_n)(t)\| \le \|z(\Theta)(t)\| + \int_0^t \beta(\tau)\,d\tau.$$

Из этого неравенства следует, что

$$z(v_n)(t) \subset r\overline{B}, \quad n \ge 1,\ t \in T,$$

при некотором $r > 0$.

Множество $r\overline{B}$ является метризуемым компактом в пространстве ω-H. Рассматривая $r\overline{B}$ как самостоятельное метрическое пространство и воспользовавшись гипотезой $H(C)(2)$ и теоремой Арцела — Асколи, получаем, что существует подпоследовательность $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $m \ge 1$, сходящаяся в $C(T,\omega\text{-}r\overline{B})$ к некоторой функции $y(\cdot)$. Так как $y(\cdot) \in L^1(T,H)$, получим хорошо известное неравенство

$$\frac{1}{2}\|z(\widehat{v}_{n_m})(t) - z(\widehat{v}_0)(t)\|^2 \le \int_0^t \langle z(\widehat{v}_{n_m})(\tau) - y(\tau), \widehat{v}_0)(\tau) - \widehat{v}_{n_m}(\tau)\rangle\,d\tau$$
$$+ \int_0^t \langle y(\tau) - z(\widehat{v}_0)(\tau), \widehat{v}_0(\tau) - v_{n_m}(\tau)\rangle\,d\tau, \quad t \in T.$$

Воспользовавшись этим неравенством и хорошо известными аргументами (см., например, доказательство теоремы 3.2 в [14]), получим, что последовательность $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $m \geq 1$, сходится к $z(\widehat{v})(\cdot)$ в пространстве $C(T, H)$.

Доказательство сходимости самой последовательности $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $n \geq 1$, в $C(T, H)$ к $z(\widehat{v})$ проводится с помощью использования аргументов от противного (см. теорему 3.2. в [14]). Лемма доказана.

Пусть $\widehat{v}_* \in L^1(T, H)$ и $z(\widehat{v}_*)(\cdot)$, $z(\widehat{v}_*)(0) = z_0 \in D(A(0))$ — решение включения

$$-\dot{z}(\widehat{v}_*)(t) \in A(t)z(\widehat{v}_*(t)) + \widehat{v}_*(t). \tag{2.10}$$

Положим

$$v_*(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_*(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{2.11}$$

Пусть

$$D(A(\widehat{v}_*)(t) = D(A(t)) + v_*(t), \quad t \in T, \tag{2.12}$$

и $A(\widehat{v}_*)(t) : D(A(\widehat{v}_*)(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов

$$A(\widehat{v}_*)(t)(w) = A(t)(w - v_*(t)), \quad w \in D(A(\widehat{v}_*)(t)),\ t \in T. \tag{2.13}$$

Рассмотрим включение

$$-x(\widehat{w})(t) \subset A(\widehat{v}_*)(t)x(\widehat{w}(t)) + \widehat{w}(t), \tag{2.14}$$

$x(\widehat{w})(0) = z_0 \in D(A(0))$, $\widehat{w}(\cdot) \in L^1(T, H)$.

Лемма 2.2. *Пусть выполняется гипотеза* $H(A)(1)$. *Тогда для любого* $w(\cdot) \in L^1(T, H)$ *включение* (2.14) *имеет единственное решение и функция* $x(\widehat{w})(t)$ *является решением включения* (2.14) *тогда и только тогда, когда функция* $z(\cdot)$, $z(0) = z_0$,

$$z(t) = x(\widehat{w})(t) - v_*(t), \tag{2.15}$$

является решением включения

$$-\dot{z}(t) \in A(t)(z(t)) + \widehat{v}(t) \tag{2.16}$$

с функцией

$$\widehat{v}(t) \in \widehat{w}(t) + \widehat{v}_*(t), \tag{2.17}$$

т. е. $z(t) = z(\widehat{v})(t)$.

Доказательство достаточно очевидно и вытекает из равенств (2.12), (2.13) и гипотезы $H(A)(1)$.

Пусть $x(\Theta)(\cdot)$ — решение включения (2.14) с $\widehat{w}(t) = \Theta$, $t \in T$. Тогда из (2.15), (2.17) вытекает

$$z(\widehat{v})(t) = x(\Theta)(t) - v_*(t). \tag{2.18}$$

Рассмотрим пространство $\widetilde{Y} = Y \times R$. Элементы пространства $\widehat{Y}$ будем обозначать через $\widetilde{y} = (y, \lambda)$, $y \in Y$, $\lambda \in R$. Наделим пространство $\widetilde{Y}$ нормой

$$\|\widetilde{y}\|_{\widetilde{Y}} = \max(\|y\|_Y, |\lambda|), \quad y \in Y,\ \lambda \in R. \tag{2.19}$$

Пространство $\widetilde{Y} = Y \times R$ будет сепарабельным банаховым пространством.

Согласно (2.19) слабая норма $|||\widetilde{y}|||$ на ω-$L^1(T,\widetilde{Y})$ имеет вид

$$|||\widetilde{y}||| = \sup_{0\le t\le 1}\left\{\max\left(\left\|\int\limits_0^t y(s)\,ds\right\|_Y, \quad \left|\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds\right|\right)\right\}. \tag{2.20}$$

Пусть $G : T\times Y\times H \to \widetilde{Y}$ — многозначное отображение, определенное по правилу

$$G(t,z,y) = \{(u,\lambda);\ u\in U(t,z,y),\ \lambda = g(t,z,y,u)\}. \tag{2.21}$$

Лемма 2.3. *Пусть выполняются гипотезы $H(U)(1),(2)$ и $H(g)$. Тогда $G : T\times H\times H \to \widetilde{Y}$ является многозначным отображением с замкнутыми значениями и*

(1) *отображение $t\mapsto G(t,z,y)$ измеримо, $z,y\in H$;*

(2) *при почти всех $t\in T$ отображение $(z,y)\mapsto G(t,z,y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа $\mathrm{haus}_{\widetilde{Y}}(\cdot,\cdot)$ на пространстве замкнутых множеств из $\widetilde{Y}$.*

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство подобной леммы из [9].

Лемма 2.4. *Пусть выполняются гипотезы $H(U)(1)$–(3) и $H(g)$. Тогда*

(1) *для почти всех $t\in T$*

$$\operatorname{dom} g_U^{**}(t,z,y) = \overline{\mathrm{co}}U(t,z,y), \tag{2.22}$$

где $\operatorname{dom} g_U^{**}(t,z,y) = \{u\in Y;\ g_U^{**}(t,z,y,u) < \infty\}$;

(2) *для любого $u\in\overline{\mathrm{co}}U(t,z,y)$*

$$g_U^{**}(t,z,y,u) = \min\{\lambda\in R;\ (u,\lambda)\in\overline{\mathrm{co}}G(t,z,y)\} \tag{2.23}$$

и

$$(u, g_U^{**}(t,z,y,u)) \in \overline{\mathrm{co}}G(t,z,y); \tag{2.24}$$

(3) *для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon\subset T$ с мерой Лебега $\mu(T\backslash T_\varepsilon)\le\varepsilon$ такое, что функция $(t,z,y,u)\to g_U^{**}(t,z,y,u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon\times H\times H\times Y$.*

Лемма является полным аналогом подобной леммы 2.5 в [9].

Следующая лемма является частным случаем леммы 3.8 в [8].

Лемма 2.5. *Пусть $V\subset\omega$-$L^1(T,Y)$ — компактное множество. Если последовательность $\widehat{v}_n(\cdot)\in V$, $n\ge 1$, сходится в пространстве $|\omega|$-$L^1(T,Y)$ к $\widehat{v}(\cdot)$, то она сходится к $\widehat{v}(\cdot)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$.*

§ 3. Существование решений

В этом параграфе, не оговаривая особо, считаем, что выполняются гипотезы $H(C)(1)$, $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) и $E : Y\to H$ — непрерывный линейный оператор.

Обозначим через $z(\Theta)(\cdot)$ решение включения (2.1) при $f(t)\equiv\Theta$.

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|f(t,z(\Theta)(t),v_0)\| < a_f(t), \quad a_f(t)>0,\ t\in T, \tag{3.1}$$

$$d(\Theta_Y, U(t,z(\Theta)(t)),v_0) < a_U(t), \quad a_U(t)>0,\ t\in T, \tag{3.2}$$

$a_f(\cdot), a_U(\cdot)\in L^1(T,R^+)$.

Пусть

$$a(t) = a_f(t) + \|E\| a_U(t), \tag{3.3}$$

$$k(t) = k_f(t) + \|E\| k_U(t), \tag{3.4}$$

где $k_f(t)$ и $k_U(t)$ — функции из неравенств (2.2), (2.4).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot r(t) = a(t) + 2k(t)r(t), \quad r(0) = 0, \tag{3.5}$$

которое имеет единственное решение

$$r(t) = \int\limits_0^t e^{m(t)-m(s)} a(s)\, ds, \quad t \in T, \tag{3.6}$$

где

$$m(t) = 2\int\limits_0^t k(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{3.7}$$

Если $\widehat v(\cdot) \in L^1(T,H)$, то всюду в дальнейшем через $v(\cdot)$ будем обозначать функцию $v(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, определенную равенством

$$v(t) = \int\limits_0^t \widehat v(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Пусть

$$f_*(t,z,v) = f(t,z,v+y_0), \tag{3.9}$$

$$U_*(t,z,v) = U(t,z,v+y_0), \tag{3.10}$$

$z, v \in H$.

Из гипотез $H(f)(1)$,(2) вытекает, что отображения $f_* : T \times H \times H \to H$ и $U_* : T \times H \times H \to Y$ обладают свойствами (1), (2) в гипотезах $H(f)$ и $H(U)$ и удовлетворяют тем же неравенствам (2.2), (2.4) с константами $k_f(t)$ и $k_U(t)$.

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot z(t) \in A(t)z(t) + \widehat v(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.11}$$

$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\widehat v(t) = f_*(t, z(t), v(t)) + Eu(t), \tag{3.12}$$

$$u(t) \in U_*(t, z(t), v(t)), \tag{3.13}$$

где функция $v(t)$ определена равенством (3.8).

Под *решением системы* (3.11)–(3.13) понимается тройка $(z(\widehat v),\ \widehat v(\cdot), u(\cdot))$, $z(\widehat v)(0) = z_0$, $z(\widehat v)(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $z(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $\widehat v(\cdot) \in L^1(T,H)$, $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$, удовлетворяющая

$$-\dot z(\widehat v)(t) \in A(t)z(\widehat v)(t) + \widehat v(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.14}$$

$$\widehat v(t) = f_*(t, z(\widehat v)(t), v(t)) + Eu(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.15}$$

$$u(t) \in U_*(t, z(\widehat v)(t), v(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{3.16}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняются неравенства* (3.1), (3.2). *Тогда для любого* $z_0 \in D(A(0))$ *управляемая система* (3.11), (3.12) *имеет решение* $(z(\widehat{v})(\cdot), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$ *такое, что*

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)\| \leq r(t), \quad t \in T, \tag{3.17}$$

$$\|\widehat{v}(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.18}$$

$$\|v(t)\| \leq r(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.19}$$

$$\|u(t)\| \leq a_U(t) + 2k_U(t)r(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.20}$$

где $r(t)$ *— решение уравнения* (3.4).

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$\widetilde{f}(t, z, v) = f_*(t, z + z(\Theta)(t), v), \tag{3.21}$$

$$\widetilde{U}(t, z, v) = U_*(t, z + z(\Theta)(t), v). \tag{3.22}$$

Из гипотез $H(f)$, $H(U)(1),(2)$, (3.1), (3.2), (3.8)–(3.10), (3.21), (3.22) вытекает, что

1) отображения $t \to \widetilde{f}(t, z, v)$, $t \to \widetilde{U}(t, z, v)$ измеримы;

2) имеют место неравенства

$$\|\widetilde{f}(t, z_1, v_1) - \widetilde{f}(t, z_2, v_2)\| < k_f(t)(\|z_1 - z_2\| + \|v_1 - v_2\|); \tag{3.23}$$

$$\mathrm{haus}_Y(\widetilde{U}(t, z_1, v_1), \widetilde{U}(t, z_2, v_2)) < k_U(t)(\|z_1 - z_2\| + \|v_1 - v_2\|); \tag{3.24}$$

3) выполнено неравенство

$$\|\widetilde{f}(t, z, v)\| < a_f(t) + k_f(t)(\|z\| + \|v\|), \tag{3.25}$$

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t, z, v)) < a_U(t) + k_U(t)(\|z\| + \|v\|). \tag{3.26}$$

Из этого неравенства и (3.24) вытекает

$$\widetilde{U}(t, z, v) \cap (a_U(t) + k_U(\|z\| + \|v\|))B \neq \varnothing \tag{3.27}$$

и

$$\widetilde{U}(t, z, v) \cap (a_U(t) + k_U(\|z\| + \|v\|))\overline{B} \subset \widetilde{U}(t, x, w) + k_U(t)(\|z - x\| + \|v - w\|)B. \tag{3.28}$$

Построим по индукции последовательность

$$y_0(t) = \Theta, \quad v_0(t) = \Theta, \quad t \in T, \tag{3.29}$$

$$\widehat{v}_i(t) = \widehat{f}(t, y_i(t), v_i(t)) + Eu_i(t), \quad i \geq 0, \tag{3.30}$$

$$u_i(t) \in \widetilde{U}(t, y_i(t), v_i(t)), \quad i \geq 0, \tag{3.31}$$

$$y_{i+1}(t) = z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t), \quad v_{i+1}(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_i(s)\, ds, \tag{3.32}$$

где $z(\widehat{v}_i)(t)$ — решение включения (3.14) при $\widehat{v}(t) = \widehat{v}_i(t)$, со свойствами

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad \widehat{v}_i(\cdot) \in L^1(T, H), \tag{3.33}$$

$$\|u_i(t)\|_Y \leq a_U(t) + 2k_U(t)r(t), \quad u_i(\cdot) \in L^1(T, Y), \tag{3.34}$$

$$\|y_{i+1}(t)\| \le r(t), \quad \|v_{i+1}(t)\| \le r(t), \tag{3.35}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\|_Y \le k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|), \quad i \ge 1, \tag{3.36}$$

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le k(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|), \quad i \ge 1, \tag{3.37}$$

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le 2k(t)\int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)\,ds, \quad i \ge 1, \tag{3.38}$$

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \le \int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i}}{i!}a(s)\,ds, \quad i \ge 1, \tag{3.39}$$

$$\|v_{i+1}(t) - v_i(t)\| \le \int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i}}{i!}a(s)\,ds. \tag{3.40}$$

Из (3.26), (3.29) вытекает, что

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t, y_0(t), v_0(t))) < a_U(t) \quad \text{п.в.}$$

Используя это неравенство и рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.1 в [9] (см. неравенства (3.27), (3.28)), получим, что существует измеримая функция $u_0(t)$ такая, что

$$\|u_0(t)\|_Y \le a_U(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.41}$$

$$u_0(t) \in \widetilde{U}(t, y_0(t), v_0(t)). \tag{3.42}$$

Из (3.41) следует, что $u_0(\cdot) \in L^1(T, Y)$. Воспользовавшись (3.30), (3.25), (3.29), (3.3)–(3.5), получим

$$\|\widehat{v}_0(t)\| \le a(t) \le \dot{r}(t), \tag{3.43}$$

$$\|y_0(t)\| \le r(t), \quad \|v_0(t)\| \le r(t). \tag{3.44}$$

Из (3.32) и (3.43), (2.8) вытекает, что

$$\|y_1(t)\| = \|z(\widehat{v}_0(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t a(s)\,ds \le r(t), \tag{3.45}$$

$$\|v_1(t)\| \le \int\limits_0^t a(s)\,ds. \tag{3.46}$$

Из (3.42), (3.24) получаем

$$d_Y(u_0(t), \widetilde{U}(t, y_1(t), v_1(t))) < k_U(t)(\|y_1(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|).$$

Из этого неравенства, воспользовавшись (3.27), (3.28) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1 в [9] (см. неравенства (3.34), (3.35)), получим, что существует измеримая функция $u_1(t)$ такая, что

$$u_1(t) \in \widetilde{U}(t, y_1(t), v_1(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{3.47}$$

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_Y \le k_U(t)(\|y_1(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|). \tag{3.48}$$

Из этого неравенства, (3.29), (3.41), (3.45), (3.46) вытекает, что

$$\|u_1(t)\| \le a_U(t) + 2k(t)r(t). \tag{3.49}$$

Воспользовавшись (3.48), (3.23), (3.30), (3.4), получим

$$\|\widetilde{v}_1(t) - \widetilde{v}_0(t)\| \le k(t)(\|y_i(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|). \tag{3.50}$$

Из этого неравенства и (3.43), (3.45), (3.46), (3.29) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_1(t)\|_Y \le a(t) + 2k(t)r(t) = \dot{r}(t). \tag{3.51}$$

Поэтому согласно (2.8), (3.32), (3.51)

$$\|y_2(t)\| = \|z(\widehat{v}_1)(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_1(s)\|\, ds \le r(t). \tag{3.52}$$

$$\|v_2(t)\| \le r(t). \tag{3.53}$$

Из (2.8), (3.50), (3.45), (3.46) и (3.32) имеем

$$\|\widehat{v}_1(t) - \widehat{v}_0(t)\|_Y \le 2k(t)\int\limits_0^t a(s)\, ds, \tag{3.54}$$

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| = \int\limits_0^t 2k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\, ds\right) d\tau. \tag{3.55}$$

Учитывая (3.7), получаем

$$\int\limits_0^t 2k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\, ds\right) d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^t 2k(\tau)a(s)\, ds d\tau - \int\limits_0^t 2k(t)\left(\int\limits_\tau^t a(s)\, ds\right) d\tau$$
$$= \int\limits_0^t m(t)a(s)\, ds - \int\limits_0^t a(s)\left(\int\limits_0^s 2k(t)\, d\tau\right) ds = \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]a(s)\, ds.$$

Из этого равенства и (3.55) вытекает, что

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \le \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]\, ds. \tag{3.56}$$

Согласно (3.32)

$$\|v_2(t) - v_1(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_1(s) - \widehat{v}_0(s)\|\, ds.$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.54), по аналогии с (3.56) имеем

$$\|v_2(t) - v_1(t)(t)\| \le \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]a(s)\, ds. \tag{3.57}$$

Из (3.47)–(3.54), (3.56), (3.57) вытекает, что соотношения (3.31), (3.33)–(3.40) справедливы при $i = 1$.

Предположим, что построены $y_i(t) = z(\widehat{v}_{i-1})(t) - z(\Theta)(t)$, $\widehat{v}_{i-1}(t)$, $v_i(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_{i-1}(s)\,ds$, $u_{i-1}(t)$, удовлетворяющие (3.31), (3.33)–(3.40). Тогда

$$u_{i-1}(t) \in \widetilde{U}(t, v_{i-1}(t), y_{i-1}(t)), \tag{3.58}$$

$$\|y_{i-1}(t)\| \le r(t), \quad \|v_{i-1}(t)\| \le r(t), \quad \|\widehat{v}_{i-1}\|_Y \le \dot{r}(t). \tag{3.59}$$

Из (3.58), (3.24) получим

$$d_Y(u_{i-1}(t), \widetilde{U}(t, v_i(t), y_i(t))) < k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|).$$

Рассуждая, как при доказательстве включения (3.43) и неравенства (3.44) в работе [9], получим, что существует $u_i \in L^1(T, Y)$ такая, что

$$u_i(t) \in \widetilde{U}(t, v_i(t), y_i(t)), \tag{3.60}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \le k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\|_Y + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|). \tag{3.61}$$

Тогда из (3.23), (3.30), (3.4) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le k(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|). \tag{3.62}$$

Воспользовавшись (3.62), получим

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le k(t)\left(\sum_{j=1}^{i}(\|v_j(t) - v_{j-1}(t)\| + \|y_j(t) - y_{j-1}(t)\|)\right) + \|\widehat{v}_0(t)\|.$$

Используя это неравенство и (3.39), (3.40), (3.43), придем к неравенству

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le 2k(t)\int\limits_0^t \left[\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t) - m(s)]^j}{j!}a(s)\,ds\right] + a(t). \tag{3.63}$$

Так как

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \ldots + \frac{\alpha^j}{j!} \le e^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

из (3.63), (3.5), (3.6) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le a(t) + 2k(t)r(t) = \dot{r}(t). \tag{3.64}$$

Используя (3.61), (3.39)–(3.41), по аналогии с (3.63) получим

$$\|u_i(t)\|_Y \le 2k_U(t)\int\limits_0^t \left[\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t) - m(s)]^j}{j!}a(s)\,ds\right] + a_U(t).$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|u_i(t)\| \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t). \tag{3.65}$$

Из (3.64), (3.32) вытекает, что

$$\|y_{i+1}(t)\| = \|z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_i(s)\|\,ds \le r(t), \tag{3.66}$$

$$\|v_{i+1}(t)\| \leq \int\limits_0^t \|\widehat{v}_i(s)\|_Y \, ds \leq r(t). \tag{3.67}$$

Воспользовавшись (3.61), (3.39), (3.40), имеем

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \leq 2k(t) \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s) \, ds. \tag{3.68}$$

Из (3.68), (3.32), (2.8) вытекает неравенство

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \leq \int\limits_0^t \|v_i(s) - v_{i-1}(s)\| \, ds \leq \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds. \tag{3.69}$$

При доказательстве неравенства (3.69) использовано равенство

$$\int\limits_0^t 2k(\tau) \left(\int\limits_0^\tau \frac{[m(\tau) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s) \, ds \right) d\tau = \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds.$$

Справедливость этого равенства проверяется дифференцированием левой и правой частей с использованием (3.7).

Аналогично, воспользовавшись (3.68), имеем

$$\|v_{i+1}(t) - v_i(t)\| \leq \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds. \tag{3.70}$$

Из (3.60)–(3.62), (3.64)–(3.70) получим, что соотношения (3.33)–(3.40) справедливы при i.

Тем самым последовательности $y_{i+1}(t)$, $v_{i+1}(t)$, $\widehat{v}_i(t)$, $u_i(t)$, $i \geq 0$, с требуемыми свойствами построены.

Из (3.68) вытекает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|\widehat{v}_{i+1}(t) - \widehat{v}_i(t)\|$ сходится для почти каждого $t \in T$. Поэтому последовательность $\widehat{v}_i(t)$, $i \geq 1$, для почти всех $t \in T$ является последовательностью Коши и для почти всех $t \in T$ последовательность $\widehat{v}_i(t)$, $i \geq 1$, сходится к измеримой функции $\widehat{v}(t)$. Из (3.33) вытекает, что последовательность $\widehat{v}_i(\cdot)$, $i \geq 1$, сходится к $\widehat{v}(\cdot)$ в пространстве $L^1(T, Y)$ и

$$\|\widehat{v}(t)\|_Y \leq \dot{r}(t). \tag{3.71}$$

Из (3.36), (3.39), (3.40) следует, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|_Y$ сходится при почти всех $t \in T$.

Рассуждая, как и для последовательности $\widehat{v}_i$, $i \geq 1$, получим, что последовательность $u_i(t)$, $i \geq 1$, для почти всех $t \in T$ сходится к измеримой функции $u(t)$. Из (3.34) вытекает, что последовательность $u_i(\cdot)$, $i \geq 1$, сходится к $u(\cdot)$ в пространстве $L^1(T, Y)$ и справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leq a_U(t) + 2k_U(t) r(t). \tag{3.72}$$

Пусть $z(\widehat{v})$ — решение включения (3.11) и $v(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}(s)\,ds$. Тогда из (2.8), (3.32)

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\widehat{v}_i)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}(s) - \widehat{v}_i(s)\|\,ds, \quad \|v(t) - v_i(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}(s) - \widehat{v}_i(s)\|\,ds.$$

Из этих неравенств вытекает, что последовательности $z(\widehat{v}_i), v_i(\cdot)$, $i \ge 1$, сходятся в пространстве $C(T,H)$ к $z(\widehat{v})$ и $v(\cdot)$ соответственно.

Стало быть, последовательность $y_{i+1}(t) = z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t)$ сходится в пространстве $C(T,H)$ к $y(t) = z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)$. Из (3.35) вытекает, что

$$\|y(t)\| = \|z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)\| \le r(t), \tag{3.73}$$

$$\|v(t)\| \le r(t). \tag{3.74}$$

Из (3.31), (3.24) получаем

$$d(u_i(t), \widetilde{U}(t, v(t), y(t))) < k(t)(\|v_i(t) - v(t)\|_Y + \|y_i(t) - y(t)\|).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, учитывая (3.22) и равенство $y(t) = z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)$, получим

$$u(t) \in U_*(t, z(t), y(t)). \tag{3.75}$$

Аналогично, используя (3.30) и (3.23), (3.21), имеем

$$\widehat{v}(t) = f_*(t, z(\widehat{v})(t), v(t)) + Eu(t). \tag{3.76}$$

Из (3.11), (3.75), (3.76) вытекает, что $(z(\widehat{v}), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$ является решением системы (3.11)–(3.13). Что касается неравенств (3.17)–(3.19), то они вытекают из неравенств (3.73), (3.74), (3.71), (3.72). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если выполняются гипотезы $H(f)(2),(3)$, то в неравенствах (3.1), (3.2) в качестве $a_f(t), a_U(t)$ можно брать функции

$$a_f(t) = c_f(t) + k_f(t)\|z(\Theta)(t)\|, \tag{3.77}$$

$$a_U(t) = c_U(t) + k_U(t)\|z(\Theta)(t)\|. \tag{3.78}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(f)(1),(2)$, $H(U)(1),(2)$ и неравенства (3.1), (3.2). Тогда для любых $z_0 \in D(A(0))$, $y_0 \in H$ управляемая система (1.1), (1.2) с ограничением (1.3) имеет решение $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(t) - z(\Theta)(t)\| \le r(t), \quad t \in T, \tag{3.79}$$

$$\|y(t) - y_0\| \le r(t), \quad t \in T, \tag{3.80}$$

$$\|u(t)\|_Y \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t).$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1 существуют функции $z(\widehat{v})(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $z(\widehat{v})(0) = z_0$, $z(\widehat{v})(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $v(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$, $v(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}(s)\,ds$, $t \in T$, $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$, удовлетворяющие включениям (3.14), (3.16) и уравнению (3.15).

Положим

$$z(t) = z(\widehat{v})(t), \quad y(t) = y_0 + v(t). \tag{3.81}$$

Воспользовавшись (3.9), (3.10), (3.14)–(3.16), (3.17)–(3.20), (3.81), получим, что функции $z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)$ являются решением управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением (3.5), удовлетворяющим неравенствам (3.79)–(3.81). Теорема доказана.

§ 4. Релаксация

В этом параграфе докажем теорему релаксации для задачи минимизации интегрального функционала.

Пусть $z(\widehat{v}_*)(t)$, $z(\widehat{v}_*)(0) = z_0 \in D(A(0))$ — решение включения

$$-\dot{z}(\widehat{v}_*) \in A(t)z(\widehat{v}_*)(t) + \widehat{v}_*(t), \quad \widehat{v}_*(\cdot) \in L^1(T, H), \tag{4.1}$$

$$v_*(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_*(s)\, ds, \tag{4.2}$$

$f_* : T \times H \times H \to H$ и $U_* : T \times Y \times H \to Y$ — отображения, определенные равенствами (3.9), (3.10).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(f)(1), (2)$, $H(U)(1), (2)$ *и*

$$\widehat{v}_*(\cdot) = \widetilde{f}(t) + E\widetilde{u}(t), \quad \widetilde{f}(\cdot) \in L^1(T, H), \quad \widetilde{u}(\cdot) \in L^1(T, Y). \tag{4.3}$$

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|\widetilde{f}(t) - f_*(t, z(\widehat{v}_*)(t), v_*(t))\| < a_f(t), \tag{4.4}$$

$$d_Y(\widetilde{u}(t), U_*(t, z(\widehat{v}_*)(t), v_*(t)) < a_U(t). \tag{4.5}$$

Тогда существует решение $(z(\widehat{v}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot)))$ *системы* (3.11)–(3.13), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\widehat{v}_*)(t)\| \le r(t), \tag{4.6}$$

$$\|\widehat{v}(t) - \widehat{v}_*(t)\| \le \dot{r}(t), \tag{4.7}$$

$$\|u(t) - \widetilde{u}(t)\| \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t). \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{f}(t, x, w) = -\widetilde{f}(t) + f_*(t, x - v_*(t), w + v_*(t)),$$

$$\widetilde{U}(t, x, w) = -\widetilde{u}(t) + U_*(t, x - v_*(t), w + v_*(t)).$$

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{x}(t) \in A(\widehat{v}_*)(t)x(t) + \widehat{w}(t), \tag{4.9}$$

$$x(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\widehat{w}(t) = \widetilde{f}(t, x(t), w(t)) + Eu(t), \tag{4.10}$$

$$u(t) \in \widetilde{U}(t, x(t), w(t)), \tag{4.11}$$

где операторы $A(\widehat{v}_*)(t)$, $t \in T$, определены равенствами (2.13) с областями определения (2.12). Из леммы 2.2 следует, что для любого $\widehat{w}(\cdot) \in L^1(T, H)$ включение (4.9) имеет решение $x(\widehat{w})(\cdot)$. Пусть $x(\Theta)(t)$ — решение включения (4.9) при $\widehat{w}(t) = \Theta$, $t \in T$. Согласно лемме 2.2 справедливо равенство

$$z(\widehat{v}_*)(t) = x(\Theta)(t) - v_*(t). \tag{4.12}$$

Из этого равенства, (4.4), (4.5) и определения $\widetilde{f}(t, x, w), \widetilde{U}(t, x, w)$ вытекает

$$\|\widetilde{f}(t, x(\Theta)(t), \Theta)\| = \|\widetilde{f}(t) - f_*(t, x(\Theta)(t) - v_*(t), v_*(t))\| < a_f(t),$$

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t, x(\Theta)(t)\Theta)) = d(\widetilde{u}(t), U_*(t, x(\Theta)(t) - v_*(t), v_*(t)) < a_U(t).$$

Из этих неравенств следует, что $\widetilde{f}(t,x,w)$ и $\widetilde{U}(t,x,w)$ обладают теми же свойствами, что и отображения $f_*(t,z,v)$, $\widetilde{U}_*(t,z,v)$ в теореме 3.1. Используя эту теорему, получаем, что система (4.9)–(4.11) имеет решение

$$(x(\widehat{w})(\cdot),\widehat{w}(\cdot),u(\cdot)),\quad x(\widehat{w})(0)=z_0,$$

$$x(\widehat{w})(t)\in D(A(v_*)(t)),\ t\in T,\quad w(t)=\int\limits_0^t\widehat{w}(s)\,ds,$$

$$\widehat{w}(t)=-\widetilde{f}(t)+f_*(t,x(\widetilde{w})(t)-v_*(t),w(t)+v_*(t))+Eu(t), \tag{4.13}$$

$$u(t)\in-\widetilde{u}(t)+U_*(t,x(\widetilde{w})(t)-v_*(t),w(t)+v_*(t)), \tag{4.14}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\|x(\widehat{w})(t)-x(\Theta)(t)\|\le r(t), \tag{4.15}$$

$$\|\widehat{w}(t)\|\le\dot{r}(t), \tag{4.16}$$

$$\|u(t)\|_Y\le a_U(t)+2k_U(t)r(t). \tag{4.17}$$

Из леммы 2.2 вытекает, что функция

$$z(\widehat{v})(t)=x(\widehat{w})(t)-v_*(t) \tag{4.18}$$

является решением включения (3.11) при

$$\widehat{v}(t)=\widehat{w}(t)+\widehat{v}_*(t). \tag{4.19}$$

Воспользовавшись (4.3), (4.12)–(4.19), получаем, что $(z(\widehat{v})(t),\widehat{v}(t),u(\cdot))$ является решением системы (3.11)–(3.13), удовлетворяющим неравенствам (4.6)–(4.8). Теорема доказана.

Теорема 4.2 (теорема существования). *Пусть выполняются гипотезы* $H(f)(1),(2)$, $H(U)(1),(2)$, $y_*(\cdot)\in W^{1,1}(T,H)$, $y_*(0)=y_0$ *и*

$$\dot{y}_*(t)=\widetilde{y}(t)+E\widetilde{u}(t),$$

$\widetilde{y}(\cdot)\in L^1(T,H)$, $\widetilde{u}(t)\in L^1(T,Y)$, $z_*(\cdot)\in W^{1,1}(T,H)$, $z_*(0)=z_0$, *— решения включения* (1.1) *при* $\dot{y}(\cdot)=\dot{y}_*(\cdot)$.

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|\widetilde{y}_*(t)-f(t,z_*(t),y_*(t))\|<a_f(t), \tag{4.20}$$

$$d_Y(\widetilde{u}(t),U(t,z_*(t),y_*(t)))<a_U(t). \tag{4.21}$$

Тогда существует решение $(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot))$ *системы* (1.1)–(1.3), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(t)-z_*(t)\|\le r(t), \tag{4.22}$$

$$\|\dot{y}(t)-\dot{y}_*(t)\|\le\dot{r}(t), \tag{4.23}$$

$$\|y(t)-y_*(t)\|\le r(t), \tag{4.24}$$

$$\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|\le a_U(t)+2k_U(t)r(t). \tag{4.25}$$

Доказательство. Обозначим $\dot{y}_*(t)=\widehat{v}_*(t)$. Тогда $z_*(\cdot)=z(\widehat{v}_*)(\cdot)$, где $z(\widehat{v}_*)$ — решение включения (4.1). Из (3.9), (3.10) и (3.21), (3.22) вытекают неравенства (4.4), (4.5). Воспользовавшись теоремой 4.1, получим, что существуют функции $(z(\widehat{v}), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$, которые являются решением системы (3.11)–(3.13), удовлетворяющим неравенствам (4.6)–(4.8).

Положим $z(t) = z(\widehat{v})(t)$, $\dot{y}(t) = \widehat{v}(t)$, $y(t) = y_0 + v(t)$. Тогда из (3.8)–(3.10) вытекает, что функции $(z(t), y(t), u(t))$ являются решением системы (1.1)–(1.3). Неравенства (4.22)–(4.25) вытекают из неравенств (4.6)–(4.8). Теорема доказана.

Если выполняются гипотезы $H(f)(2),(3)$ и $H(U)(2),(3)$, то будут иметь место неравенства

$$\|f(t,z,y)\| < c_f(t) + k_f(t)(\|y - y_0\| + \|z\|), \tag{4.26}$$

$$d_Y(\Theta_Y, U(t,z,y)) < c_U(t) + k_U(t)(\|y - y_0\| + \|z\|). \tag{4.27}$$

Пусть $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ — множество решений управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3) и (1.6) на управление. Если выполняются гипотезы $H(f)(1)$–(3) и $H(U)(1)$–(3), то из замечания 3.1 и теоремы 3.2 вытекает, что множества $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ непустые.

Основное содержание данного раздела составляет

Теорема 4.3 (теорема релаксации). *Предположим, что выполняются гипотезы $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) и $H(g)$. Тогда для любого решения $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ существует последовательность решений $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0, y_0)$, $k \geq 1$, такая, что*

$$z_k(\cdot) \to z_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.28}$$

$$y_k(\cdot) \to y_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.29}$$

$$u_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,Y), \tag{4.30}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s, y_*(s), z_*(s), u_*(s)) - g(s, y_k(s), z_k(s), u_k(s)))\, ds \right| = 0. \tag{4.31}$$

Доказательство. Пусть $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$. Из (2.4) и гипотезы $H(U)(1)$ вытекает, что многозначное отображение $t \to U(t, y_*(t), z_*(t))$ измеримо с замкнутыми значениями. Обозначим через S_U множество измеримых селекторов отображения $U(t, y_*(t), z_*(t))$, являющихся элементами пространства $L^1(T,Y)$. Из (4.27) вытекает, что множество S_U непусто. Воспользовавшись гипотезами $H(g)(1),(2)$, получаем, что функция $t \to g(t, y_*(t), z_*(t), u_*(t))$ измерима. Согласно утверждению (3) леммы 2.4 измеримой является и функция $t \to g^{**}(t,\, y_*(t), z_*(t), u_*(t))$. Из леммы 2.3 вытекает, что отображение $t \to G(t, u_*(t), z_*(t))$ является измеримым с замкнутыми значениями в пространстве $\widetilde{Y}$. Воспользовавшись гипотезой $H(g)(3)$, получаем, что существует функция $\beta(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ такая, что

$$|g(t, y_*(t), z_*(t), u)| \leq \beta(t), \quad u \in U(t, y_*(t), z_*(t)). \tag{4.32}$$

Обозначим через S_G совокупность всех измеримых селекторов отображения $t \to G(t, y_*(t), z_*(t))$, которые являются элементами пространства $L^1(T, \widetilde{Y})$. Из определения (2.21) отображения $G(t,y,z)$, непустоты множества S_U и (4.32) следует, что множество S_G непусто.

Пусть $S_{\overline{\text{co}}U}$ и $S_{\overline{\text{co}}G}$ — совокупности элементов $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$ и $\widetilde{u}(\cdot) \in L^1(T,\widetilde{Y})$, являющихся селекторами отображений $t \to \overline{\text{co}}U(t,y_*(t),z_*(t))$ и $t \to \overline{\text{co}}G(t,y_*(t),z_*(t))$. Из (2.21), (2.23) и (4.32) вытекает, что

$$|g_U^{**}(t,y_*(t),z_*(t),u_*(t))| \leq \beta(t) \quad \text{п.в.}$$

Поэтому согласно (2.24)

$$(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) \in S_{\overline{\text{co}}G}, \tag{4.33}$$

где

$$\lambda_*(t) = g_U^{**}(t,y_*(t),z_*(t),u_*(t)). \tag{4.34}$$

Как следует из теоремы 1.5 в [15],

$$S_{\overline{\text{co}}G} = \overline{\text{co}}S_G,$$

где замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\text{co}}$ в правой части этого равенства берется в пространстве $L^1(T,\widetilde{Y})$. Из этого равенства и (4.33) вытекает, что $(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) \in \overline{\text{co}}S_G$. Следовательно, для любого $n \geq 1$ существует элемент $(u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot)) \in L^1(T,\widetilde{Y})$ такой, что

$$(u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot)) \in \text{co}\, S_G, \tag{4.35}$$

$$\|(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) - (u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot))\|_{L^1(T,\widetilde{Y})} \leq 1/n. \tag{4.36}$$

Из этого неравенства, (2.19) и (4.34) получим

$$\|u_*(\cdot) - u_n(\cdot)\|_{L^1(T,Y)} \leq 1/n, \tag{4.37}$$

$$\int\limits_T |g_U^{**}(s,y_*(s),z_*(s),u_*(s)) - \lambda_n(s)|\,ds \leq 1/n. \tag{4.38}$$

Пусть

$$\widehat{v}_n(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + Eu_n(t). \tag{4.39}$$

Из (4.26) и гипотез $H(f)(1)$, $H(U)(1)$ вытекает, что функция $\widehat{v}_n(\cdot)$ является элементом пространства $L^1(T,H)$.

Положим

$$y(\widehat{v}_n)(t) = y_0 + \int\limits_0^t \widehat{v}_n(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{4.40}$$

Пусть $z(\widehat{v}_n)(\cdot)$ — решение включения (3.14) при $\widehat{v}(t) = \widehat{v}_n(t)$. Так как

$$\dot{y}_*(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + Eu_*(t), \quad t \in T, \tag{4.41}$$

из (2.8), (4.37), (4.41), (4.33) имеем

$$\|z(\widehat{v}_n)(t) - z_*(t)\| \leq \int\limits_0^t \|\dot{y}_*(s) - \widehat{v}_n(s)\|\,ds \leq \|E\| \int\limits_0^t \|u_n(s) - u_*(s)\|\,ds \leq \frac{\|E\|}{n}. \tag{4.42}$$

Аналогично из (3.39)–(4.41), (4.37) получаем

$$\|y_*(t) - y(\widehat{v}_n)(t)\| \leq \frac{\|E\|}{n}, \quad t \in T. \tag{4.43}$$

Согласно (4.35) существует конечный набор функций

$$(\widetilde{u}_i(\cdot),\widetilde{\lambda}_i(\cdot)) \in S_G, \quad i = 1,\ldots,k, \tag{4.44}$$

и чисел $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, такой, что

$$u_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \widetilde{u}_i(\cdot), \quad \lambda_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \widetilde{\lambda}_i(\cdot).$$

Пусть $F : T \to \widetilde{Y}$ — многозначное отображение

$$F(t) = \{(\widetilde{u}_i(t), \widetilde{\lambda}_i(t)),\ i = 1, \dots, k\}, \quad t \in T.$$

Тогда

$$(u_n(t), \lambda_n(t)) \in \operatorname{co} F(t) \quad \text{п.в.}, \tag{4.45}$$

где символ со означает замкнутую выпуклую оболочку множества и $\operatorname{co} F(t)$ является выпуклым компактом в $\widetilde{Y}$. Из (4.44) вытекает, что функция

$$t \to \|F(t)\|_{\widetilde{Y}} = \max\{\|\widetilde{y}\|_{\widetilde{Y}};\ \widetilde{y} \in F(t)\}$$

является элементом пространства $L^1(T, R^+)$.

Пусть $n \geq 1$ фиксировано. Тогда из (4.45) и [16, следствия 4.5, 5.4] вытекает, что существует последовательность $(u_{m(n)}(\cdot),\ \lambda_{m(n)}(\cdot)) \in L^1(T, \widetilde{Y})$, $m(n) \geq 1$, такая, что

$$(u_{m(n)}(t), \lambda_{m(n)}(t)) \in F(t) \in G(t, y_*(t), z_*(t)), \quad m(n) \geq 1, \tag{4.46}$$

и

$$(u_{m(n)}(\cdot), \lambda_{m(n)}(\cdot)) \to (u_n(\cdot), \lambda_n(\cdot)) \tag{4.47}$$

в пространстве $|\omega|$-$L^1(T, \widetilde{Y})$.

Согласно (4.46), (4.47), (2.20), (2.21) получаем, что

$$u_{m(n)}(t) \in U(t, y_*(t), z_*(t)) \quad \text{п.в.}, \quad m(n) \geq 1,$$

$$\lambda_{m(n)}(t) = g(t, y_*(t), z_*(t), u_{m(n)}(t))$$

и

$$\sup_{t \in T} \left\| \int_0^t (u_{m(n)}(s) - u_n(s))\, ds \right\|_Y \to 0, \quad m(n) \geq 1, \tag{4.48}$$

$$\sup_{u \in T} \left| \int_0^t (\lambda_n(s) - g(s, y_*(s), z_*(s), u_{m(n)}(s))\, ds \right| \to 0, \quad m(n) \geq 1. \tag{4.49}$$

Из (4.48) вытекает, что последовательность $Eu_{m(n)}(\cdot)$ сходится к $Eu_n(\cdot)$ в пространстве $|\omega|$-$L^1(T, H)$.

Пусть

$$\widehat{v}_{m(n)}(t) = f(t, y_*(t), z_*(t)) + Eu_{m(n)}(t), \tag{4.50}$$

$$y(\widehat{v}_{m(n)})(t) = y_0 + \int_0^t \widehat{v}_{m(n)}(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{4.51}$$

Из (4.39), (4.50) вытекает, что

$$\widehat{v}_{m(n)} \to \widehat{v}_n(\cdot) \text{ в } |\omega|\text{-}L^1(T, H), \quad m(n) \to \infty. \tag{4.52}$$

Аналогично из (4.51) и (4.52) получаем, что

$$y(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot) \to y(\widehat{v}_n)) \text{ в } C(T,H),\ m(n) \to \infty \tag{4.53}$$

Обозначим через $z(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot)$ решение включения (3.14) при $\widehat{v}(\cdot) = \widehat{v}_{m(n)})(\cdot)$.

Пусть $\operatorname{pr}_Y F(t)$ — проекция множества $F(t) \subset \widetilde{Y}$ на пространство Y. Тогда из (4.46) вытекает, что

$$u_{m(n)}(t) \subset \operatorname{pr}_Y F(t). \tag{4.54}$$

Так как значениями отображения $t \to \operatorname{pr} F(t)$ являются компактные множества в пространстве Y и $\|\operatorname{pr} F(t)\|$ — элемент пространства $L^1(T,R^+)$, согласно лемме 2.5 $u_{n(m)}(\cdot) \to u_n(\cdot)$ в ω-$L^1(T,Y)$. Поэтому последовательность $\widehat{v}_{n(m)}(\cdot)$ сходится к $\widehat{v}_n(\cdot)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$.

Так как функция $t \to \|F(t)\|$ является элементом пространства $L^1(T,R^+)$, существует $\gamma(\cdot) \in L^1(T,R^+)$, при котором справедливо неравенство

$$\|u_{n(m)}(t)\| \le \gamma(t), \quad n(m) > 1.$$

Поэтому согласно (4.50) существует $\beta(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ такое, что

$$\|v_{n(m)}(t)\| \le \beta(\cdot), \quad n(m) \ge 1.$$

Воспользовавшись этим неравенством, относительной компактностью множества $\bigcup\limits_{n(m)\ge 1}^{\infty} \widehat{v}_{n(m)}(t)$ и леммой 2.1, получим, что

$$z(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot) \to z(\widehat{v}_n)(\cdot) \quad \text{в } C(T,H). \tag{4.55}$$

Из (4.38)–(4.40), (4.42), (4.43), (4.48)–(4.55) вытекает, что существуют последовательности

$$\widetilde{u}_k(t) \in U(t,y_*(t),z_*(t)), \quad \widetilde{u}_k(\cdot) \in L^1(T,Y), \tag{4.56}$$

$$\widehat{v}_k(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + E\widetilde{u}_k(t), \quad k \ge 1, \tag{4.57}$$

такие, что

$$\widehat{u}_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,Y), \tag{4.58}$$

$$\widehat{v}_k(\cdot) \to \widehat{v}_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,H), \tag{4.59}$$

$$z(\widehat{v}_k)(\cdot) \to z_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.60}$$

$$y(\widehat{v}_k)(\cdot) \to y_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.61}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s,y_*(s),z_*(s),u_*(s)) - g(s,y_*(s),z_*(s),\widetilde{u}_k(s)))\,ds \right| = 0. \tag{4.62}$$

Из гипотез $H(f)(2)$, $H(U)(2)$ и (4.55) получаем

$$\begin{aligned}\|f(t,y_*(t),z_*(t)) &- f(t,y(\widehat{v}_k)(t),z(\widehat{v}_k)(t)\| \\ &< k_f(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|),\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}d_Y(\widetilde{u}_k(t), &U(t,y(\widehat{v}_k)(t),z(\widehat{v}_k)(t)) \\ &< k_U(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|).\end{aligned} \tag{4.64}$$

Положим

$$a_f^k(t) = k_f(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|). \tag{4.65}$$

$$a_U^k(t) = k_U(t)(\|\widehat{y}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|). \tag{4.66}$$

Из (4.57), (4.63)–(4.66) и теоремы 4.2 вытекает существование решения $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot))$ управляемой системы (1.1)–(1.3) такого, что

$$\|z_k(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\| \le r_k(t), \tag{4.67}$$

$$\|\dot{y}_k(t) - \widehat{v}_k(t)\| \le \dot{r}_k(t), \tag{4.68}$$

$$\|y_k(t) - y(\widehat{v}_k)(t)\| \le r_k(t), \tag{4.69}$$

$$\|u_k(t) - \widetilde{u}_k(t)\| \le a_f^k(t) + 2k_U(t)r_k(t), \tag{4.70}$$

где $r_k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{r}_k(t) = a_k(t) + 2k(t)r_k(t), \quad r_k(0) = 0, \tag{4.71}$$

с

$$a_k(t) = a_f^k(t) + \|E\|a_U^k(t), \quad k(t) = k_f(t) + \|E\|k_U(t). \tag{4.72}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r_k(t) = \int_0^t e^{m(t)-m(s)} a_k(s)\, ds, \tag{4.73}$$

где $m(t)$ определяется равенством (3.7).

Из (4.72), (4.73), (4.64), (4.65), (4.60), (4.61) вытекает, что $a_k(\cdot) \to 0$ в $L^1(T, R^+), a_f^k(\cdot) \to 0$ в $L^1(T, R^+)$. Поэтому согласно (4.71), (4.73)

$$r_k(\cdot) \to 0 \text{ в } C(T, R^+), \quad \dot{r}_k(\cdot) \to 0 \text{ в } L^1(T, R^+). \tag{4.74}$$

Воспользовавшись (4.58)–(4.60), (4.67)–(4.70), (4.74), получим, что

$$z_k(\cdot) \to z_*(\cdot),\ y_k(\cdot) \to y_*(\cdot) \text{ в } C(T, H), \tag{4.75}$$

$$u_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^1(T, Y). \tag{4.76}$$

Из (4.70), (4.65), (4.74), (4.75) следует, что

$$u_k(\cdot) - \widetilde{u}_k(\cdot) \to \Theta_{L^1(T,Y)} \text{ в } L^1(T, Y), \tag{4.77}$$

где $\Theta_{L^1(T,Y)}$ — нулевой элемент пространства $L^1(T, Y)$.

Пусть $M > 0$ таково, что

$$\|z_*(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad \|z_k(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad k \ge 1,$$
$$\|y_*(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad \|y_k(\cdot)\|_{C(T,Y)} \le M, \quad k \ge 1.$$

Воспользовавшись (2.7), получим

$$\begin{aligned} &|g(t, y_*(t), z_*(t), \widetilde{u}_k(t)) - g(t, y_k(t), z_k(t), u_k(t))| \\ &\qquad \le \omega_M(t, \|y_*(t) - y_k(t)\|, \|z_*(t) - z_k(t)\|) + k_M\|\widetilde{u}_k(t) - u_k(t)\|_Y. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, (4.75), (4.77) вытекает, что

$$\int_T |g(t, y_*(t), z_*(t), \widetilde{u}_k(t)) - g(t, y_k(t), z_k(t), u_k(t))|\, dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому согласно (4.62)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s, y_*(s), z_*(s), u_*(s)) - g(s, y_k(s), z_k(s), u_k(s)))\, ds \right| = 0. \tag{4.78}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из (4.75), (4.76), (4.78). Теорема доказана.

§ 5. Существование решения задачи оптимального управления

Лемма 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) и $H(g)$. Тогда*

$$\inf_{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) = \inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)). \tag{5.1}$$

Доказательство. Из (4.31) вытекает, что для любого $(z_*(\cdot),\ y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ имеет место неравенство

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \le J^{**}(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot)).$$

В силу произвольности $(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot))$

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \le \inf_{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)).$$

Неравенство, противоположное последнему, вытекает из включения $\mathscr{R}_U(z_0,y_0) \subset \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ и неравенства

$$g_U^{**}(t,z(t),y(t),u(t)) \le g(t,z(t),y(t),u(t)) \quad \text{п.в.},$$

справедливого для $(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0,y_0)$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(A)(1)$–(3), $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1),(2),(3^*)$ и значениями многозначного отображения $U : T\times H\times H \rightrightarrows Y$ являются компактные множества. Тогда множество $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ является компактом в пространстве $C(T,H)\times C(T,H)\times \omega\text{-}L^1(T,Y)$.*

Доказательство. Непустота множеств $\mathscr{R}_U(z_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ вытекает из теоремы 3.2 и замечания 3.1.

Пусть

$$Z = \{z(\cdot)\in C(T,H)\}, \quad X = \{y(\cdot)\in C(T,H)\}, \tag{5.2}$$

$$W = \{u(\cdot)\in L^1(T,Y)\}, \quad (z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0). \tag{5.3}$$

Положим

$$x(t) = \int_0^t \dot y(s)\,ds, \quad y(\cdot)\in X. \tag{5.4}$$

Из (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), (1.2), (1.3) и (5.4)

$$\|\dot x(t)\| \le c(t) + k(t)(\|z(t)\| + \|x(t)\|), \tag{5.5}$$

где

$$c(t) = c_f(t) + \|E\|c_U(t), \quad k(t) = k_U(t) + \|E\|k_U(t).$$

Из (5.5) и неравенства Беллмана — Гроноулла вытекает неравенство

$$\|x(t)\| \le \int_0^t (c(s)+k(s)z(s))\,ds \exp\int_0^t k(s)\,ds.$$

Из этого неравенства и (5.5) получим

$$\|\dot x(t)\| \le c(t) + k(t)\|z(t)\| + M_1 k(t)\int_0^t [c(s)+k(s)z(s)]\,ds, \tag{5.6}$$

где $M_1 = \exp \int\limits_T k(s)\,ds$.

Воспользовавшись этим неравенством, (1.1), (5.4), (2.8), получим

$$\|z(t)\| \le M_2 + \int \left[k(s)\|z(s)\| + M_1 k(s) \int\limits_0^s k(\tau)\|z(\tau)\|\,d\tau \right] ds,$$

где

$$M_2 = \sup_{t\in T} \|z(\Theta)(t)\| + \int\limits_T c(s)\,ds + M_1 \int\limits_T k(s) \int\limits_T c(\tau)\,d\tau ds. \tag{5.7}$$

Из (5.7) и теоремы 2.1 в [17] вытекает неравенство

$$\|z(t)\| \le M_2 \exp \int\limits_0^t \left[k(s) + M_1 k(s) \int\limits_0^s k(\tau)\,d\tau \right] ds.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|z(t)\| \le M, \quad t \in T,\ z(\cdot) \in Z, \tag{5.8}$$

при некотором $M > 0$.

Воспользовавшись этим неравенством, (5.4) и (5.6), получим

$$\|\dot y(t)\| \le c(t) + k(t)M + M_1 k(t) \int\limits_0^t (c(s) + k(s)M)\,ds, \quad t \in T,\ y(\cdot) \in X. \tag{5.9}$$

Из этого неравенства, (5.8), гипотез $H(A)(2),(3)$ и теоремы Арцела — Асколи получим, что множество $Z \subset C(T,H)$ относительно компактно.

Пусть

$$\widetilde Z(t) = \overline{\mathrm{co}} \Big\{ \bigcup z(t);\ z(\cdot) \in Z \Big\}, \quad t \in T. \tag{5.10}$$

Тогда $\widetilde Z : T \rightrightarrows H$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа многозначным отображением с компактными выпуклыми значениями.

Пусть

$$F(t,w) = f(t, \widetilde Z(t), w), \quad t \in T,\ w \in H, \tag{5.11}$$

$$\widetilde U(t,w) = U(t, \widetilde Z(t), w), \quad t \in T,\ w \in H. \tag{5.12}$$

Тогда $F : T \times H \rightrightarrows H$, $\widetilde U : T \times H \rightrightarrows Y$ являются отображениями с компактными значениями.

Из гипотез $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1),(2),(3^*)$, непрерывности многозначного отображения $\widetilde Z : T \rightrightarrows H$ с выпуклыми компактными значениями вытекает, что отображения F и $\widetilde U$ обладают свойствами

$H(F)$:

1) отображение $t \to F(t,w)$ измеримо;

2) $\mathrm{haus}(F(t,w_1), F(t,w_2)) \le k_f(t)\|w_1 - w_2\|$;

3) $\|F(t,w)\| \le c_F(t) + k_f(t)\|w\|$,

где $c_F(t) = c_f(t) + k_f(t)\|y_0\| + k_f(t)M$;

$H(\widetilde U)$:

1) отображение $t \to \widetilde U(t,w)$ измеримо;

2) $\mathrm{haus}_Y(\widetilde U(t,y_1,w_1), \widetilde U(t,w_2)) \le k_U(t)\|w_1 - w_2\|$;

3) $\|\widetilde{U}(t,w)\| \le c_{\widetilde{U}}(t) + k_U(t)\|w\|$,
где $c_{\widetilde{U}}(t) = c_U(t) + k_U(t)\|y_0\| + k_U(t)M$.

Отметим, что свойствами $H(F), H(\widetilde{U})$ обладают и многозначные отображения $\overline{\mathrm{co}}F(t,w)$ и $\overline{\mathrm{co}}\widetilde{U}(t,w)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{v}(t) \in \overline{\mathrm{co}}F(t,v(t)) + E\overline{\mathrm{co}}\widetilde{U}(t,v(t)), \quad v(0) = y_0. \tag{5.13}$$

Пусть $\mathscr{R}(y_0)$ — множество решений включения (5.13). Из свойств $H(F)$ и $H(\widetilde{U})$ и следствия 3.1 в [18, с. 161] вытекает, что множество $\mathscr{R}(y_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)$. Так как $X \subset \mathscr{R}(y_0)$, то X является относительно компактным подмножеством пространства $C(T,H)$. Поскольку для любого $u(\cdot) \in W$ имеет место включение

$$u(t) \in \left\{\bigcup \overline{\mathrm{co}}\widetilde{U}(t,v(t);\ v(\cdot) \in \mathscr{R}(y_0)\right\} = Q(t) \tag{5.14}$$

и значениями многозначного отображения $Q : T \rightrightarrows Y$ являются компакты, из свойства $H(\widetilde{U})$ 3) следует, что W — относительно компактное подмножество пространства ω-$L^1(T,Y)$. Так как

$$\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0) \subset Z \times X \times W,$$

множество $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ является относительно компактным подмножеством пространства $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$.

Докажем компактность множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ в $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Для этого достаточно доказать замкнутость множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ в пространстве $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Так как любой компакт в ω-$L^1(T,Y)$ метризуем, достаточно доказать секвенциальную замкнутость множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$.

Пусть последовательность $(z_n(\cdot), y_n(\cdot), u_n(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}F}(z_0,y_0)$, $n \ge 1$, сходится к $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ в $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Тогда из (1.1) и гипотез $H(f)$ вытекает, что имеет место равенство

$$\dot{y}(t) = f(t,z(t),y(t)) + Eu(t). \tag{5.15}$$

Так как значения многозначного отображения

$$\phi(t) = \left\{\bigcup (\overline{\mathrm{co}}F(t,v(t)) + E\overline{\mathrm{co}}\widetilde{U}(t,v(t)); v(\cdot) \in \mathscr{R}(y_0)\right\}$$

суть компакты, из включения $\dot{y}_n(t) \in \phi(t)$ и гипотез $H(f)(2),(3)$, $H(U)(2),(3)$ и леммы 2.1 вытекает, что

$$\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t) \quad \text{п.в.} \tag{5.16}$$

Из включения

$$u_n(t) \in U(t, z_n(t), y_n(t)) \quad \text{п.в.},$$

гипотезы $H(U)(2)$ и теоремы Мазура для слабо сходящихся последовательностей вытекает включение

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \left(\bigcup_{k \ge n}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}U(t, z_k(t), y_k(t) \right) \subset \overline{\mathrm{co}}U(t,z(t),y(t)). \tag{5.17}$$

Из (5.15)–(5.17) следует, что $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathscr{R}(z_0,y_0)$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 5.1 *и гипотезы* $H(g)$. *Тогда проблема* (RP) *имеет решение и*

$$\min_{\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z,y,u) = \inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z,y,u).$$

Для любого решения $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *проблемы* $(\mathscr{R}P)$ *существует минимизирующая последовательность* $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0,y_0)$, $k \geq 1$, *проблемы* (P) *такая, что справедливы соотношения* (4.28), (4.29), (4.31) *и* $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *в* ω-$L^1(T,Y)$. *Обратно, если* $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot))$, $k \geq 1$, — *минимизирующая последовательность проблемы* (P), *то существуют подпоследовательность* $(z_{k_n}(\cdot)$, $y_{k_n}(\cdot), u_{k_n}(\cdot))$, $n \geq 1$, *последовательности* $(z_k(\cdot),\ y_k(\cdot), u_k(\cdot))$, $k \geq 1$, *и решение* $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *проблемы* (RP) *такие, что справедливы соотношения* (4.28), (4.29), (4.31), *в которых последовательность* $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot))$ *заменена последовательностью* $(z_{k_n}(\cdot), y_{k_n}(\cdot),\ u_{k_n}\ (\cdot))$ *и* $u_n(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *в* ω-$L^1(T,Y)$.

Теорема 5.2 является аналогом теоремы 5.3 в [9], доказанной для конечномерных пространств H и Y. Поскольку гипотезы $H(g)$ в [9] и в данной работе совпадают, доказательство теоремы 5.2 дословно повторяет доказательство теоремы 5.3 в [9]. При доказательстве следует использовать теорему 5.1 и лемму 2.5 вместо теоремы 5.2 и леммы 2.1 из [9]. Поэтому доказательство теоремы 5.2 опускаем.

§ 6. Конкретизация предположений $\boldsymbol{H(A)}$

Наиболее общие результаты, при которых справедливы гипотезы $H(A)(1),(2)$, сформулированы в [19]. Приведем некоторые из них.

Пусть $A(t) : D(A(t)) \subset H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов и $\text{gr}(t)$, $t \in T$, — график оператора $A(t)$:

$$\text{gr}(A(t)) = \{(x,y) \in H \times H;\ x \in D(A(t)),\ y \in A(t)x\}.$$

График $\text{gr}(A(t))$ является замкнутым подмножеством пространства $H \times H$ [1]. Так как значениями максимально монотонного оператора являются замкнутые выпуклые множества [1], для любого $x \in D(A(t))$ существует элемент $A^0(t)x \in A(t)x$ минимальной нормы, т. е. $\|A^0(t)x\| = \min\{\|y\|,\ y \in A(t)x\}$. Если существуют функция $m(\cdot) \in L^2(T,R^+)$ и неубывающая функция $l : R^+ \to R^+$ такие, что

$$\|A^0(t)x\| \leq m(t)(1 + l(\|x\|)), \quad t \in T,\ x \in D(A(t)), \tag{6.1}$$

то $D(A(t))$, $t \in T$, является замкнутым выпуклым множеством [19]. Поэтому мы можем рассматривать процесс выметания [20]

$$-\dot{x}(t) \in \mathscr{N}(D(A(t))x(t)) + \varphi(t), \tag{6.2}$$
$$x(0) = x_0 \in D(A(t)),\ \varphi(\cdot) \in L^1(T,H),$$

где $\mathscr{N}(D(A(t))x(t))$ — нормальный конус в смысле выпуклого анализа множества $D(A(t))$ в точке $x(t) \in D(A(t))$.

Пусть $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ и

$$S^1(r_{\mathscr{N}}) = \{\varphi(\cdot) \in L^1(T,H);\ \|\varphi(t)\| \leq r_{\mathscr{N}}(t) \text{ п.в.}\} \tag{6.3}$$

Под решением процесса выметания (6.2) понимается абсолютно непрерывная функция $x(\varphi) : T \to H$, $x(\varphi)(0) = x_0$, $x(\varphi)(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, производная $\dot{x}(\varphi)(t)$ которой удовлетворяет включению

$$-\dot{x}(\varphi)(t) \in \mathscr{N}(D(A(t))x(\varphi))(t) + \varphi(t) \quad \text{п.в.}$$

Непосредственно из теоремы 4.3 в [19] вытекает

Теорема 6.1. *Пусть выполняются предположения* $\Pi(A)$*:*

(1) *отображение* $t \to \operatorname{gr} A(t)$ *измеримо;*

(2) *выполняется неравенство* (6.1).

Если для любого $\varphi(\cdot) \in L^1(T,H)$ *процесс выметания* (6.2) *имеет решение, то имеет место гипотеза* $H(A)(1)$.

Если для любого $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ *множество решений*

$$\{x(\varphi)(\cdot);\ \varphi(\cdot) \in S^1(r_{\mathscr{N}})\} \tag{6.4}$$

процесса выметания (6.2) *равностепенно непрерывно, то справедлива гипотеза* $H(A)(2)$.

Условия, при которых процесс выметания (6.2) имеет решение $x(\varphi)(\cdot)$ и множество (6.4) равностепенно непрерывно, сформулированы в теореме 3.3 из [19]. Приведем наиболее распространенное условие, при котором множество (6.4) равностепенно непрерывно.

Лемма 6.1 [19]. *Предположим, что выполняются предположения* $\Pi(A)$ *и существует абсолютно непрерывная функция* $b : T \to R$ *такая, что*

$$|d(y, D(A(t))) - d(y, A(s))| \le |b(t) - b(s)|,$$

$y \in H$, $s,t \in T$. *Тогда для любого* $\varphi(\cdot) \in L^1(T,H)$ *процесс выметания* (6.2) *имеет единственное решение* $x(\varphi)(\cdot)$, $x(\varphi)(0) = x_0$, *и для любого* $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ *множество* (6.4) *равностепенно непрерывно.*

Более общие предположения, при которых справедлива лемма 6.1, сформулированы в теореме 3.3 из [19]. Другие условия, при которых процесс выметания (6.2) имеет решение и множество (6.4) равностепенно, можно найти в [21].

Приведем еще условия, при которых справедливы гипотезы $H(A)(1),(2)$. Они сформулированы в теореме 5.1 из [19].

Наиболее часто в силу простоты используются следующие условия.

Лемма 6.2. *Пусть выполняется неравенство* (6.1) *и существует абсолютно непрерывная функция* $b : T \to R$ *такая, что для любых* $s,t \in T$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{dis}(A(s), A(t)) \le |b(t) - b(s)|. \tag{6.5}$$

Тогда справедливы гипотезы $H(A)(1),(2)$.

В неравенстве (6.5) $\operatorname{dis}(A(s), A(t))$ — это псевдорасстояние по Владимирову [22] между максимально монотонными операторами,

$$\operatorname{dis}(A(s), A(t)) = \sup\left\{ \frac{\langle x_1 - x_2, y_2 - y_1\rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|};\ x_1 \in D(A(s)),\right.$$
$$\left. y_1 \in A(s),\ x_2 \in D(A(t)),\ y_2 \in A(t)x_2 \right\}.$$

Лемма вытекает из теоремы 5.1 в [19].

Что касается гипотезы $H(A)(3)$, то она автоматически выполняется в конечномерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractious dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam; London: Elsevier, 1973.
2. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. *Alexiewicz A.* Linear functionals on Denjoy integrable functions // Colloq. Math. 1948. V. 1. P. 289–293.
5. *Толстоногов А. А.* Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.
6. *Толстоногов А. А.* Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 5. С. 177–206.
7. *Толстоногов А. А.* Вариационная устойчивость задач оптимального управления с субдифференциальными операторами // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 123–160.
8. *Tolstonogov A. A.* Relaxation in nonconvex optimal control problems containing the difference of two subdifferentials // SIAM J. Contr. Optim. 2016. V. 54, N 1. P. 175–197.
9. *Толстоногов А. А.* Теорема Н. Н. Боголюбова для управляемой системы, связанной с вариационным неравенством // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 6. С. 165–196.
10. *Brokate M., Krejci P.* Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2013. V. 18, N 2. P. 331–348.
11. *Adam L., Outrata J.* On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2014. V. 19, N 9. P. 2709–2738.
12. *Bouhali N., Azzam-Laouir D., Monteiro M.M.D.P.* Optimal control of an evolution problem involving time-dependent maximal monotone operators // J. Optimiz. Theory Appl. 2022. V. 194. P. 59–91.
13. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fundam. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
14. *Tolstonogov A. A.* Upper semicontinuous convex-valued selectors of a Nemytskii operator with nonconvex values and evolution inclusions with maximal monotone operators // J. Math. Anal. Appl. 2023. V. 526. P. 127–197.
15. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7, N 1. P. 149–182.
16. *Tolstonogov A. A.* Existence and relaxation theorems for extreme continuous selectors of multifunctions with decomposable values // Topology Appl. 2008. V. 155, N 8. P. 898–905.
17. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
18. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
19. *Толстоногов А. А.* Теоремы сравнения для эволюционных включений с максимально монотонными операторами. L^2-теория // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 6. С. 110–135.
20. *Moreau J. J.* Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space // J. Differ. Equ. 1977. V. 26. P. 347–374.
21. *Толстоногов А. А.* Расстояния между максимально монотонными операторами // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 815–829.
22. *Vladimirov A. A.* Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space // Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Appl. 1991. V. 17, N 6. P. 499–518.

Поступила в редакцию 25 декабря 2024 г.
После доработки 25 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Толстоногов Александр Александрович (ORCID 0000-0002-4758-2197)
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
`aatol@icc.ru, alexander.tolstonogov@gmail.com`