Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.51

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Д. Степанов, Г. Э. Шамбилова

Аннотация. Представлена характеризация квазилинейных интегральных операторов итерационного типа на конусах неубывающих функций пространств Лебега на вещественной полуоси.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.211

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, билинейный интегральный оператор, конус монотонных функций.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Обозначим через $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}$ подмножество всех неотрицательных функций и через $\mathfrak{M}^\uparrow \subset \mathfrak{M}^+$ — подмножество всех неубывающих функций.

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$, $0 < p, r, q \le \infty$. В работе изучается задача характеризации неравенства

$$\left(\int_0^\infty [Rf(x)]^r \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{$*$}$$

где константа C не зависит от f и полагается выбранной наименьшей из возможных. В качестве R рассматриваются итерационные интегральные операторы вида

$$Tf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{1}$$

$$\mathscr{T}f(x) := \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{2}$$

$$Sf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{3}$$

Российский научный фонд (проект 24-11-00170).

$$\mathscr{S}f(x) := \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}. \tag{4}$$

Задача характеризации весовых интегральных неравенств с квазилинейными интегральными операторами на конусах монотонных и квазивогнутых функций появилась в связи с исследованиями ограниченности операторов классического анализа в пространствах Лебега и Лоренца [1–10].

В данной работе рассмотрены неравенства $(*)$ на конусе $\mathfrak{M}^{\uparrow}$ возрастающих функций, которые изучены слабее, хотя для неравенств Харди этот случай появился [11] почти одновременно с исследованием неравенств на убывающих функциях [1–4]. Для решения задачи используется метод редукции [12–15] для квазилинейных операторов итерационного типа, уже эффективно применяемый в ряде статей авторов [16–20]. Для операторов T и S задача решена в [21] (см. § 2), в § 3 дано решение для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$.

Одной из мотиваций изучения задачи $(*)$ является характеризация билинейного неравенства Харди. В [22] билинейные неравенства изучались на конусе $\mathfrak{M}^+$ неотрицательных функций как дополнение к некоторым результатам о мультилинейных неравенствах [23–25], а в [26] задача рассмотрена на конусе $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ убывающих функций. В § 4 рассматривается билинейное неравенство с операторами Копсона на конусе неубывающих функций.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от p, q и r; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, χ_E — характеристическую функцию (индикатор) множества $E \subset (0, \infty)$. Если $1 \le p \le \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$ при $1 < p < \infty$, $p' := \infty$ при $p = 1$ и $p' := 1$ при $p = \infty$.

§ 2. Операторы T и S

Если $0 < p \le \infty$ и $v \in \mathfrak{M}^+$, то положим

$$L^p_v := \left\{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L^p_v} := \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$L^\infty_v := \{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L^\infty_v} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \ge 0} v(x)|f(x)| < \infty \}$$

и аналогично $L^p_v[a,b]$ для функций, заданных на отрезке $[a,b]$.

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$. Положим

$$V(t) := \int\limits_0^t v, \quad V_*(t) := \int\limits_t^\infty v, \quad U_*(t) := \int\limits_t^\infty u, \quad W(t) := \int\limits_t^\infty w,$$
$$\mathfrak{u}(t) := \frac{u(t)}{V_*^{\frac{2}{p}}(t)}, \quad \mathfrak{U}(t) := \int\limits_0^t \mathfrak{u}, \quad 0 < t < \infty. \tag{5}$$

Будем считать, что

$$0 < \int\limits_0^x \rho < \infty$$

при любом $x>0$ и
$$\int_0^\infty \rho = \infty.$$
Определим последовательность $\{a_n\}\subset(0,\infty)$ из уравнений
$$\int_0^{a_n} \rho = 2^n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$
Пусть функции $\sigma:[0,\infty)\to[0,\infty)$ и $\sigma^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ задаются формулами (здесь $\inf\varnothing=\infty$)
$$\sigma(x):=\inf\left\{y>0:\int_0^y\rho\ge 2\int_0^x\rho\right\},\quad \sigma^{-1}(x):=\inf\left\{y>0:\int_0^y\rho\ge \frac12\int_0^x\rho\right\}. \quad (6)$$
Пусть $\sigma^2(x):=\sigma(\sigma(x))$. Для $0<c<d\le\infty$, $0<t<\infty$, $h\in\mathfrak{M}^+$ положим
$$\mathscr{T}_t h(x):=\chi_{[t,\infty)}(x)\left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^x\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac1p}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p,$$
$$\mathscr{T}_{[c,d]} h(x):=\chi_{[c,d]}(x)\left(\int_{\sigma^{-1}(c)}^x\left(\int_z^d hV_*\right)^{\frac1p}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p,$$
$$\|\mathscr{T}_t\|_{L^p_v\to L^q_w}:=\sup_{0\ne h\in\mathfrak{M}^+}\frac{\left(\int_0^\infty[\mathscr{T}_t h]^q w\right)^{\frac1q}}{\left(\int_0^\infty[h]^p v\right)^{\frac1p}}.$$

Теорема 2.1 [21, теорема 1]. *Пусть $0<q<\infty$, $0<p<\infty$, $0<r<\infty$. Тогда для наилучшей константы C_T в неравенстве*
$$\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty\left(\int_0^y fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac rq}\rho(x)\,dx\right)^{\frac1r}\le C_T\left(\int_0^\infty[f]^p v\right)^{\frac1p},\quad f\in\mathfrak{M}^\uparrow, \quad (7)$$
выполняется оценка
$$C_T\approx A_1+A_2+B,$$
где A_1, A_2 — наилучшие константы в неравенствах
$$\left(\int_0^\infty\rho(x)[W(x)]^{\frac rq}\left(\int_0^x\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac1p}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac pr}\le A_1^p\int_0^\infty h,$$
$$\left(\int_0^\infty\left[\left(\int_x^\infty\left(\int_y^\infty hV_*\right)^{\frac qp}[\mathfrak{U}(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac pq}\right]^{\frac rp}\rho(x)\,dx\right)^{\frac pr}\le A_2^p\int_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho\right) \left\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 2.1. (1) При $q = \infty$ имеем $C_T \approx A_1 + A_2 + B$, где A_1, A_2 — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)[W(x)]^r \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_1^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{y\ge x} \left[\left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{U}(y)w(y)\,dy\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_2^p \int\limits_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_{tt}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L_w^\infty}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho\right) \left\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1\to L_w^\infty}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p = \infty$ или $r = \infty$ имеем

$$C_T = \left\|T\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L_\rho^r}, \ p = \infty, \quad C_T = \sup_{t>0} R(t)\|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}, \ r = \infty,$$

где

$$R(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{0<z<t} \rho(z), \quad W(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\ge x} w(t).$$

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$T_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_x^{\sigma(t)} \left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p,$$

$$T_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_x^{\sigma(d)} \left(\int\limits_c^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p$$

и

$$\|T_t\|_{L_v^p\to L_w^q} := \sup_{0\ne h\in\mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int\limits_0^\infty [T_t h]^q w\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty [h]^p v\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Теорема 2.2 [21, теорема 2]. *Пусть* $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* C_S *в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left(\int_y^\infty fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_S \left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \qquad (8)$$

выполняется оценка

$$C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — *наилучшие константы в неравенствах*

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} [U_*(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \left(\int_x^{\sigma^2(x)} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbb{B}$ *имеет вид*

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho\right) \|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 2.2. (1) При $q = \infty$ имеем $C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + B$, где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} \left[\left(\int_0^y h\right)^{\frac{1}{p}} U_*(y) w(y)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{x \le y \le \sigma^2(x)} [w(y)]^r \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^\infty_w}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho\right) \|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_{V_*} \to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p = \infty$ или $r = \infty$ имеем

$$C_S = \left\| S\left(\frac{1}{v}\right) \right\|_{L^r_\rho}, \ p = \infty, \quad C_S = \sup_{t>0} R(t) \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, \ r = \infty,$$

где $R(t) := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<z<t} \rho(z)$.

§ 3. Операторы $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$

Будем считать, что $0 < \int_x^\infty \rho < \infty$ при любом $x > 0$ и $\int_0^\infty \rho = \infty$. Определим последовательность $\{b_n\} \subset (0,\infty)$ из уравнений

$$\int_{b_n}^\infty \rho = 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Пусть функции $\zeta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\zeta^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ задаются формулами (здесь $\sup \varnothing = 0$)

$$\zeta(x) := \sup\left\{ y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq \frac{1}{2}\int_x^\infty \rho \right\}, \quad \zeta^{-1}(x) := \sup\left\{ y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq 2\int_x^\infty \rho \right\}. \tag{10}$$

Пусть $\zeta^{-2}(x) = \zeta^{-1}(\zeta^{-1}(x))$. Для $0 < c < d \leq \infty$, $0 < t, p < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{T}_t h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p, \tag{11}$$

$$\widetilde{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_x^{\zeta(d)} \left(\int_c^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p. \tag{12}$$

Теорема 3.1. *Пусть $0 < q, p, r < \infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Предположим, что $V(\infty) = \infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{T}}$ в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_{\mathscr{T}} \left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \tag{13}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{T}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} [U_*(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbf{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbf{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \leq r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_x^\infty \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Доказательство. Замена $f^p \to f$ в неравенстве (13) приводит к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_y^\infty f^{\frac{1}{p}}(z)u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_{\mathscr{T}}^p \int_0^\infty fv.$$

Используя [12, теорема 3.3], получим эквивалентное неравенство

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_y^\infty u(z)\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \lesssim C_{\mathscr{T}}^p \int_0^\infty hV_* \tag{14}$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$.

Оценка сверху. В дальнейшем будем пользоваться известным соотношением (см., например, [7, предложение 2.1])

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}\Big(\sum_{i\le n} a_i\Big)^s \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n} a_n^s, \tag{15}$$

верным для любых последовательностей неотрицательных чисел и фиксированного $s > 0$. Обозначим

$$T_p h(y) := \left(\int_y^\infty u(z)\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
J &:= \sum_n \int_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\,(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_0^{b_n} w(y)\,(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} = \sum_n 2^{-n}\left(\sum_{i\le n}\int_{b_{i-1}}^{b_i} w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{b_{n+1}}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r \\
&\quad + \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)\left(\int_y^{b_{n+1}} \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Далее,

$$J_1 \approx \sum_n \int_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{b_{n+1}}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x) \left(\int\limits_0^x w \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^z h \right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz \right)^r dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x w \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^z h \right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz \right)^r dx \le \mathbf{A}_2^r \left(\int\limits_0^\infty hV_* \right)^{\frac{r}{p}}$$

и

$$J_2 \approx \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_y^{b_{n+1}} \left(\int\limits_0^{b_{n-1}} h \right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_y^{b_{n+1}} u(z) \left(\int\limits_{b_{n-1}}^z h \right)^{\frac{1}{p}} dz \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} =: J_{2,1} + J_{2,2}.$$

Запишем

$$J_{2,1} \le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} [U_*(y)]^q w(y) \left(\int\limits_0^y h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x [U_*(y)]^q w(y) \left(\int\limits_0^y h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \le \mathbf{A}_1^r \left(\int\limits_0^\infty hV_* \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Используя (11) и (12), получим

$$J_{2,2} = \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) (\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]} h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\le \sum_n 2^{-n} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_{V_*}[b_{n-1},b_{n+1}] \to L^{\frac{q}{p}}_w[b_{n-1},b_n]} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_{n+1}} hV_* \right)^{\frac{r}{p}}.$$

При $p \le r$, применяя неравенство Йенсена, имеем

$$J_{2,2} \lesssim \sup_n 2^{-n} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w} \left(\int\limits_0^\infty hV_* \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда

$$J_{2,2}^{\frac{p}{r}} \lesssim \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho \right)^{\frac{p}{r}} \|\widetilde{T}_t\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w} \int\limits_0^\infty hV_* \le \mathbf{B}^p \int\limits_0^\infty hV_*.$$

При $r < p$, используя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$), получим

$$J_{2,2} \lesssim \Big(\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w} \Big)^{\frac{r}{s}} \left(\int\limits_0^\infty hV_* \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$

$$\approx \sum_n \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho\right)\left(\int\limits_{b_n}^{\infty} \rho\right)^{\frac{s}{p}} \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(b_n),\zeta(b_{n-1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx = \mathbf{B}^s,$$

оценка сверху $C_{\mathscr{T}} \lesssim \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования в (14), имеем
(1) $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{A}_1$ при $[0,z] \to [0,y]$,
(2) $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{A}_2$ при $[y,\infty] \to [x,\infty]$.
Также из неравенства (14) для $h \in \mathfrak{M}^+$ следует

$$\left(\int\limits_t^{\infty} \rho\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_0^t w(y)\left(\int\limits_y^{\infty} u(z)\left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \lesssim C^p_{\mathscr{T}} \int\limits_0^{\infty} hV_*.$$

Поэтому $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{B}$ и теорема доказана при $p \le r$.

Из (14) для любого $t \in (0,\infty)$ имеем

$$\left(\int\limits_{\zeta(t)}^{\infty} \rho\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_{\zeta^{-1}(t)}^{\zeta(t)} w(y)\left(\int\limits_y^{\zeta(\zeta(t))} u(z)\left(\int\limits_{\zeta^{-1}(t)}^{z} h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \lesssim C^p_{\mathscr{T}} \int\limits_0^{\infty} hV_*,$$

т. е.

$$\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w} < \infty.$$

Поэтому $\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$ можно вычислить по плотному подмножеству в $L^1_{V_*}$. Пространство $L^1_{V_*}$ сепарабельно. Пусть $X \subset L^1_{V_*}$ — его счетное плотное подмножество. Тогда для любого $t \in (0,\infty)$ выполнено

$$\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w} = \sup_{0\ne h\in X} \frac{\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}h\|_{L^{\frac{q}{p}}_w}}{\|h\|_{L^1_{V_*}}},$$

т. е. функция $t \mapsto \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$ измерима по Борелю.

При $r < p$ запишем

$$\mathbf{B}^s = \int\limits_0^{\infty} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho \right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\, dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^\infty \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(b_{n-1}),\zeta(b_{n+1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}}$$

$$\approx \sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Отсюда

$$\mathbf{B}^s \lesssim \sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}} =: \mathfrak{B}^s.$$

Пусть $\theta \in (0,1)$ — произвольное фиксированное число. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует функция $h_n \in L^1_{V_*}[b_{n-2}, b_{n+3}]$ такая, что $\|h_n\|_{L^1_{V_*}[b_{n-2},b_{n+3}]} = 1$ и

$$\|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} h_n\|_{L_w^{\frac{q}{p}}} \ge \theta \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Положим

$$g_n := 2^{\frac{-ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}} h_n, \quad \mathbf{T}_n := \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|_{L^1_{V_*} \to L_w^{\frac{q}{p}}}, \quad g := \sum g_n.$$

Тогда

$$\|g\|_{L^1_{V_*}} \lesssim \sum_n \int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+3}} g_n V_* = \sum_n 2^{\frac{-ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \mathfrak{B}^s.$$

С другой стороны,

$$D := \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x w(y) (T_p g(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\gtrsim \sum_n \int\limits_{b_{n+2}}^{b_{n+3}} \rho(x)\, dx \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y)(T_p g(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\gtrsim \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y) \left[\left(\int\limits_y^{b_{n+3}} u(z) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^z g_n \right)^{\frac{1}{p}} dz \right)^p \right]^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y) (\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} g_n)^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^{-n} 2^{\frac{-ns}{p}} \mathbf{T}_n^{\frac{sr}{p^2}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} h_n\|^{\frac{r}{p}}_{L_w^{\frac{q}{p}}} \ge \theta^{\frac{r}{p}} \sum_n 2^{\frac{-ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \theta^{\frac{r}{p}} \mathfrak{B}^s.$$

Отсюда

$$\mathfrak{B}^s C^p_{\mathscr{T}} \gtrsim C^p_{\mathscr{T}} \|g\|_{L^1_{V_*}} \overset{(14)}{\gtrsim} D^{\frac{p}{r}} \gtrsim \theta \mathfrak{B}^{\frac{sp}{r}}.$$

Следовательно,

$$C_{\mathscr{T}} \gtrsim \theta^{\frac{1}{p}}\mathfrak{B} \gtrsim \theta^{\frac{1}{p}}\mathbf{B}.$$

В силу произвольности $\theta \in (0,1)$ получаем, что $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{B}$. $\square$

Замечание 3.1. (1) При $q=\infty$ имеем $C_{\mathscr{T}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}\left[\left(\int_0^y h\right)^{\frac{1}{p}} U_*(y)w(y)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}[w(y)]^r \left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^\infty_w}, & p\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty \rho\right)\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p,\end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

(2) При $p=\infty$ или $r=\infty$ имеем

$$C_{\mathscr{T}} = \left\|\mathscr{T}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho}, \ p=\infty, \quad C_{\mathscr{T}} \approx \sup_{t>0}\mathscr{R}(t)\|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}, \ r=\infty,$$

где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z\ge t}\rho(z)$.

Для $0<c<d\le\infty$, $0<t<\infty$, $h\in\mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{\mathscr{T}_t}h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int_0^x\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p, \tag{16}$$

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{[c,d]}h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_{\zeta^{-1}(c)}^x\left(\int_z^d hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p. \tag{17}$$

Теорема 3.2. *Пусть $0<q,p,r<\infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r}-\frac{1}{p}$. Предположим, что $V(\infty)=\infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{S}}$ в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x\left(\int_0^y fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_{\mathscr{S}}\left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f\in\mathfrak{M}^\uparrow, \tag{18}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{S}} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{B},$$

где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_{\zeta^{-2}(x)}^x w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^{\zeta^{-2}(x)}\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_1^p\int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \left(\int_y^\infty hV_*\right)^{\frac{q}{p}} \mathfrak{U}^q(y)w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_2^p \int_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, *а константа* $\mathscr{B}$ *имеет вид*

$$\mathscr{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}_t}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty \rho\right) \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Доказательство. Замена $f^p \to f$ в (18) приведет к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_0^y f^{\frac{1}{p}}(z)u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_{\mathscr{S}}^p \int_0^\infty fv.$$

Используя [12, теорема 3.4], получим эквивалентное неравенство

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_0^y \mathfrak{u}(z)\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \lesssim C_{\mathscr{S}}^p \int_0^\infty h \tag{19}$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$.

Оценка сверху. Положим

$$\mathscr{T}_p h(y) := \left(\int_0^y \mathfrak{u}(z)\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &:= \sum_n \int_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\mathscr{T}_p h(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \\ &\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_0^{b_n} w(y)\left(\mathscr{T}_p h(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} = \sum_n 2^{-n}\left(\sum_{i\le n}\int_{b_{i-1}}^{b_i} w(y)\left(\mathscr{T}_p h(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\ &\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)(\mathscr{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\ &\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^{b_{n-2}}\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r \\ &+ \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)\left(\int_{b_{n-2}}^y\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Далее,

$$I_1 \approx \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{b_{n-2}} \left(\int\limits_z^{\infty} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-2}(x)}^{x} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)} \left(\int\limits_z^{\infty} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-2}(x)}^{x} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)} \left(\int\limits_z^{\infty} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx \le \mathscr{A}_1^r \left(\int\limits_0^{\infty} h\right)^{\frac{r}{p}},$$

$$I_2 \approx \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{y} \left(\int\limits_z^{b_n} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{y} \mathfrak{u}(z) \left(\int\limits_{b_n}^{\infty} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Запишем

$$I_{2,2} \le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} [\mathfrak{U}(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^{\infty} hV_*\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_0^{x} [\mathfrak{U}(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^{\infty} hV_*\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \le \mathscr{A}_2^r \left(\int\limits_0^{\infty} h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Воспользовавшись обозначениями (16) и (17), получим

$$I_{2,1} = \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) (\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]} h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\le \sum_n 2^{-n} \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1[b_{n-2},b_n]\to L_w^{\frac{q}{p}}[b_{n-1},b_n]} \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_n} h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Применим неравенство Йенсена при $p \le r$:

$$I_{2,1} \lesssim \sup_n 2^{-n} \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_0^{\infty} h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Поэтому

$$I_{2,1}^{\frac{p}{r}} \lesssim \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^{\infty} \rho\right)^{\frac{p}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} \int\limits_0^{\infty} h \le \mathscr{B}^p \int\limits_0^{\infty} h.$$

Применив неравенство Гёльдера при $r<p$ $(\frac{1}{s}=\frac{1}{r}-\frac{1}{p})$, получим

$$I_{2,1}\lesssim\left(\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right)^{\frac{r}{s}}\left(\int\limits_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\begin{aligned}\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}}&\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\\ &\approx\sum_n\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}\rho\right)\left(\int\limits_{b_n}^\infty\rho\right)^{\frac{s}{p}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(b_n),\zeta(b_{n-1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\\ &\le\sum_n\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx\\ &=\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx=\mathscr{B}^s,\end{aligned}$$

оценка сверху $C_{\mathscr{S}}\lesssim\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{B}$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования в (19), имеем
(1) $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{A}_1$ при $[0,x]\to[\zeta^{-2}(x),x]$,
(2) $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{A}_2$ при $[z,\infty]\to[y,\infty]$.
Аналогично теореме 3.1 доказывается, что $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{B}$. $\square$

Замечание 3.2. (1) При $q=\infty$ имеем $C_{\mathscr{S}}\approx\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{B}$, где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta^{-2}(x)\le t\le x}[w(t)]^r\left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)}\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}}\le\mathscr{A}_1^p\int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}\left[\left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{U}(y)w(y)\,dy\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}}\le\mathscr{A}_2^p\int\limits_0^\infty h$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа $\mathscr{B}$ имеет вид

$$\mathscr{B}:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty\rho\right)^{\frac{1}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^\infty_w}, & p\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p,\end{cases}$$

где $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$.

(2) При $p=\infty$ или $r=\infty$ имеем

$$C_{\mathscr{S}}=\left\|\mathscr{S}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho},\ p=\infty,\quad C_{\mathscr{S}}\approx\sup_{t>0}\mathscr{R}(t)\|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w},\ r=\infty,$$

где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z \geq t} \rho(z)$.

Замечание 3.3. Точные двусторонние оценки наилучших констант $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}$ в теореме 3.1, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{B}$ в теореме 3.2 и аналогичных констант в теоремах 2.1, 2.2 явными интегральными функционалами находятся с помощью редукционных теорем и характеризаций интегральных неравенств из [27, гл. XI, теорема 4], см. также [12, теорема 1.1; 13–15, 28, 29].

§ 4. Билинейные неравенства на конусе неубывающих функций

Пусть $0 < p_1, p_2, q < \infty$, $v_1, v_2, u_1, u_2, w \in \mathfrak{M}^+$.

Рассмотрим задачу характеризации неравенства

$$\|H^*_{u_1} f \cdot H^*_{u_2} g\|_{L^q_w} \leq C \|f\|_{L^{p_1}_{v_1}} \|g\|_{L^{p_2}_{v_2}}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \tag{20}$$

где константа C не зависит от f и g и предполагается наименьшей из возможных, а операторы имеют вид

$$H^*_{u_i} f(t) := \int_t^\infty f u_i, \quad i = 1, 2.$$

Для решения задачи фиксируем в неравенстве (20) функцию $g \in \mathfrak{M}^{\uparrow}$ и рассмотрим неравенство Харди

$$\|H^*_{u_1} f\|_{L^q_\rho} \leq C \|f\|_{L^{p_1}_{v_1}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \tag{21}$$

где

$$\rho(x) := \frac{\left(\int_x^\infty g u_2\right)^q w(x)}{\|g\|^q_{L^{p_2}_{v_2}}}.$$

Так как двусторонняя оценка константы C точным функционалом известна для всех значений параметров $p_1, q \in (0, \infty]$ [12], основная задача сводится к характеризации или редукции неравенства на конусе возрастающих функций с этим функционалом, в котором в зависимости от параметров суммирования участвуют линейные или квазилинейные интегральные операторы, изученные в предыдущих разделах.

Положим

$$V_i(t) := \int_0^t v_i, \quad V_{i*}(t) := \int_t^\infty v_i, \quad U_{i*}(t) := \int_t^\infty u_i, \quad 0 < t < \infty, \ i = 1, 2.$$

Теорема 4.1. *Пусть $0 < q, p < \infty$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f u\right)^q \rho(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty f^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \tag{22}$$

верно следующее.

(i) *Если* $1 < p \le q < \infty$, *то* $C \approx A_0 + A_1$, *где*

$$A_0 := \sup_{x>0} \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{1}{q}} [V_*(x)]^{-\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$A_1 := \sup_{x>0} \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty \left(\frac{U_*}{V_*} \right)^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(ii) *Если* $0 < q < p < \infty$, $1 < p < \infty$, *то* $C \approx B_0 + B_1$, *где*

$$B_0 := \left(\int_0^\infty V_*^{-\frac{r}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{r}{p}} U_*^q(x)\rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$$B_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_x^\infty \left(\frac{U_*}{V_*} \right)^{p'} v \right)^{\frac{r}{p'}} \rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

(iii) *Если* $0 < q < p \le 1$, *то* $C \approx C_0 + C_1$, *где*

$$C_0 := \left(\int_0^\infty V_*^{-\frac{r}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{r}{p}} U_*^q(x)\rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$$C_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sup_{z\in[x,\infty)} \frac{U_*^p(z)}{V_*(z)} \right)^{\frac{r}{p}} \rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

(iv) *Если* $0 < p \le q < \infty$, $0 < p \le 1$, *то* $C \approx D_0 + D_1$, *где*

$$D_0 := \sup_{x>0} V_*^{-\frac{1}{p}}(x) U_*(x) \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad D_1 := \sup_{x>0} V_*^{-\frac{1}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Доказательство. Для $f \in \mathfrak{M}^\uparrow$ и $\varphi \in \mathfrak{M}^+$ введем обозначения

$$g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad \widetilde{\varphi}(x) := \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \in \mathfrak{M}^+, \quad x \in (0,\infty).$$

Замены $z \to \frac{1}{z}$ в левой части и $t \to \frac{1}{t}$ в правой части неравенства (22) приведут к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} g\widetilde{u} \right)^q \rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty g^p \widetilde{v} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\downarrow.$$

Заменяя $x \to \frac{1}{x}$ в левой части этого неравенства, получим

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g\widetilde{u} \right)^q \widetilde{\rho}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty g^p \widetilde{v} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\downarrow. \tag{23}$$

Неравенство (22) эквивалентно (23), которое охарактеризовано в теореме 2.5 из [12]. $\square$

Будем предполагать, что

$$V_{1*}(x)=\int_x^\infty v_1<\infty,\ U_{1*}(x)=\int_x^\infty u_1<\infty,\ x\in(0,\infty),\ V_{1*}(0)=\infty,\ V_2(\infty)=\infty. \tag{24}$$

Случай 1. $1<p_1\le q<\infty$, $1<p_2\le q<\infty$.

Применив теорему 4.1 в неравенстве (21) при фиксированном $g\in\mathfrak{M}^\uparrow$ и при $1<p_1\le q<\infty$, получим $C\approx\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$, где $\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty U_{1*}^q(t)\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}[V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}}\le\mathbf{A}_0\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}},\quad g\in\mathfrak{M}^\uparrow,$$

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\le\mathbf{A}_1\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}},\ g\in\mathfrak{M}^\uparrow.$$

Снова применив теорему 4.1 при $1<p_2\le q<\infty$, получим $C\approx\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$,

$$\mathbf{A}_0\approx\sup_{x>0}[V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}}[\mathbf{A}_{01}(x)+\mathbf{A}_{02}(x)], \tag{25}$$

где

$$\mathbf{A}_{01}(x):=\sup_{t>x}\left(\int_t^\infty[U_{1*}U_{2*}]^q w\right)^{\frac{1}{q}}[V_{2*}(t)]^{-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathbf{A}_{02}(x):=\sup_{t>x}\left(\int_x^t[U_{1*}]^q w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^\infty\left(\frac{U_{2*}}{V_{2*}}\right)^{p_2'}v_2\right)^{\frac{1}{p_2'}},$$

$$\mathbf{A}_1=\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left[\mathbf{A}_{11}(x)+\mathbf{A}_{12}(x)\right], \tag{26}$$

где

$$\mathbf{A}_{11}(x):=\sup_{0<t<x}\left(\int_t^x U_{2*}^q w\right)^{\frac{1}{q}}[V_{2*}(t)]^{-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathbf{A}_{12}(x):=\sup_{0<t<x}\left(\int_0^t w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^x\left(\frac{U_{2*}}{V_{2*}}\right)^{p_2'}v_2\right)^{\frac{1}{p_2'}}.$$

Случай 2. $0<q<p_1<\infty$, $1<p_1<\infty$ или $0<q<p_2<\infty$, $1<p_2<\infty$.

Используя теорему 4.1 в неравенстве (21) при $0<q<p_1<\infty$, $1<p_1<\infty$, $\frac{1}{r}:=\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}$, получим $C\approx\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1$, где $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{r}{q}}\alpha(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\le\mathbf{B}_0\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}},\quad g\in\mathfrak{M}^\uparrow, \tag{27}$$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty U_{1*}^q(t)w(t)\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q dt\right)^{\frac{r}{q}}\beta(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{B}_1\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g\in\mathfrak{M}^\uparrow, \tag{28}$$

где

$$\alpha(x) := -\frac{d}{dx}\left[\left(\int_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{r}{p_1'}}\right], \quad \beta(x) := \frac{d}{dx}[[V_{1*}(x)]^{-\frac{r}{p_1}}].$$

Далее характеризуем неравенство (27) применением теоремы 3.1. Получим $\mathbf{B}_0\approx\mathbf{B}_{01}+\mathbf{B}_{02}+\mathbf{B}_{03}$, где $\mathbf{B}_{01}$, $\mathbf{B}_{02}$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty\alpha(x)\left(\int_0^x w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_x^\infty\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p_2}}u_2(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p_2}{r}} \le \mathbf{B}_{01}^{p_2}\int_0^\infty hV_{2*}, \quad h\in\mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty\alpha(x)\left[\left(\int_0^x\left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p_2}}[U_{2*}(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p_2}{q}}\right]^{\frac{r}{p_2}}dx\right)^{\frac{p_2}{r}} \le \mathbf{B}_{02}^{p_2}\int_0^\infty hV_{2*},\ h\in\mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}_{03}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_{03} := \begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int_t^\infty\alpha\right)^{\frac{1}{r}}\|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p_2}}_{L^1_{V_{2*}}\to L_w^{\frac{q}{p_2}}}, & p_2\le r,\\[2ex] \left(\int_0^\infty\alpha(x)\left[\left(\int_x^\infty\alpha\right)\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_{2*}}\to L_w^{\frac{q}{p_2}}}\right]^{\frac{s}{p_2}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p_2.\end{cases}$$

Здесь $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p_2}$, а функции ζ, ζ^{-1} определены по формулам (10) при $\rho=\alpha$.

Аналогично, используя теорему 2.2 для константы $\mathbf{B}_1$ в неравенстве (28), находим $\mathbf{B}_1\approx\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}_{13}$, где $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty\beta(x)\left[\left(\int_x^\infty\left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p_2}}U_{1*}^q(y)U_{2*}^q(y)w(y)\,dy\right)^{\frac{p_2}{q}}\right]^{\frac{r}{p_2}}dx\right)^{\frac{p_2}{r}} \le \mathbf{B}_{11}^{p_2}\int_0^\infty hV_{2*},$$

$$\left(\int_0^\infty\beta(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)}U_{1*}^q w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p_2}}u_2(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p_2}{r}} \le \mathbf{B}_{12}^{p_2}\int_0^\infty hV_{2*}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа $\mathbf{B}_{13}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_{13} := \begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t\beta\right)^{\frac{1}{r}}\|T_t\|^{\frac{1}{p_2}}_{L^1_{V_{2*}}\to L^{\frac{q}{p_2}}_{wU_{1*}^q}}, & p_2\le r,\\[2ex] \left(\int_0^\infty\beta(x)\left[\left(\int_0^x\beta\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_{V_{2*}}\to L^{\frac{q}{p_2}}_{wU_{1*}^q}}\right]^{\frac{s}{p_2}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p_2,\end{cases}$$

где $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p_2}$, а функции σ, σ^{-1} определены по формулам (6) при $\rho=\beta$.

Случай $0<q<p_2<\infty, 1<p_2<\infty$ рассматривается аналогично.

Случай 3. $0 < q < \min(p_1, p_2) \le 1$. Применив теорему 4.1 в неравенстве (21) при $0 < q < p_1 \le 1$, имеем $C \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1$, где $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U_{1*}^q(t) w(t) \left(\int_t^\infty g u_2\right)^q dt\right)^{\frac{r}{q}} \mu(x)\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{C}_0 \left(\int_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{29}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty g u_2\right)^q w(t)\, dt\right)^{\frac{r}{q}} \nu(x)\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{C}_1 \left(\int_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{30}$$

где

$$\mu(x) := \frac{d}{dx}([V_{1*}(x)]^{-\frac{r}{p_1}}), \quad \nu(x) := -\frac{d}{dx}\left(\sup_{t \in (x,\infty)} \left[\frac{U_{1*}^{p_1}(t)}{V_{1*}(t)}\right]\right)^{\frac{r}{p_1}}.$$

Рассматривая задачу характеризации квазилинейных операторов в неравенствах (29), (30), заметим, что решение этой задачи аналогично случаю 2, т. е. достаточно применить теорему 2.2 и теорему 3.1.

Случай 4. $0 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$, $0 < \max(p_1, p_2) \le 1$.

Воспользовавшись теоремой 4.1 в неравенстве (21) при $0 < p_1 \le q < \infty$, $0 < p_1 \le 1$, получим $C \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, где $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\sup_{x>0} [V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}} U_{1*}(x) \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty g u_2\right)^q w(y)\, dy\right)^{\frac{1}{q}} \le \mathbf{D}_0 \left(\int_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{31}$$

$$\sup_{x>0} [V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}} \left(\int_x^\infty U_{1*}^q(y) w(y) \left(\int_y^\infty g u_2\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \le \mathbf{D}_1 \left(\int_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow. \tag{32}$$

Для характеризации неравенств (31), (32) так же, как и в случае 1, снова применим теорему 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть* $0 < p_1, p_2, q < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (20) *выполняется следующее.*

(i) *Пусть* $1 < p_1 \le q < \infty$, $1 < p_2 \le q < \infty$. *Тогда* $C \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$, *где* $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ *определены в* (25) *и* (26).

(ii) *Пусть* $0 < q < p_1 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, *тогда* $C \approx \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, *где* $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (27) *и* (28) *при условии* (24).

(iii) *Пусть* $0 < q < \min(p_1, p_2) \le 1$, *тогда* $C \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1$, *где* $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (29) *и* (30) *при условии* (24).

(iv) *Пусть* $0 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$, $0 < \max(p_1, p_2) \le 1$. *Тогда* $C \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, *где* $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (31) *и* (32).

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту статьи за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ariño M., Muckenhoupt B.* Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 320, N 2. P. 727–735.

2. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1990. V. 96, N 2. P. 145–158.

3. *Stepanov V. D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 338, N 3. P. 173–186.

4. *Stepanov V. D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 3. P. 465–487.

5. *Carro M., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator // J. Funct. Anal. 1993. V. 112, N 2. P. 480–494.

6. *Carro M., Soria J.* Boundedness of some integral operators // Canad. J. Math. 1993. V. 45, N 6. P. 1155–1166.

7. *Goldman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.

8. *Sinnamon G.* Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces // Publ. Mat. 2002. V. 46, N 2. P. 489–515.

9. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об интегральных операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 367–370.

10. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 405, N 1. P. 156–172.

11. *Heing H. P., Stepanov V. D.* Weighted Hardy inequalities for increasing functions // Canad. J. Math. 1993. V. 45, N 1. P. 104–116.

12. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3-68.

13. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 155–170.

14. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые неравенства для квазилинейных интегральных операторов на полуоси и приложения к пространствам Лоренца // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 8. С. 135–162.

15. *Прохоров Д. В.* Об одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.

16. *Шамбилова Г. Э.* Весовые неравенства для одного класса квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 912–936.

17. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.* Hardy-type inequalities on the weighted cones of quasi-concave functions // Banach J. Math. Anal. 2015. V. 9, N 1. P. 21–34.

18. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.* Weighted Hardy type inequalities for supremum operators on the cones of monotone functions // J. Inequal. Appl. 2016. V. 237. P. 1–18.

19. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* Ограниченность квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1131–1155.

20. *Stepanov V. D., Shambilova G. E.* On the boundedness of quasilinear integral operators of iterated type with Oinarov's kernels on the cone of monotone functions // Euras. Math. J. 2017. V. 8, N 2. P. 47–73.

21. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* Редукция билинейных весовых неравенств с операторами интегрирования на конусе неубывающих функций // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 639-658.

22. *Aguilar Cañestro M. I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C.* Weighted bilinear Hardy inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387, N 1. P. 320–334.

23. *Cwikel M., Kerman R.* Positive multilinear operators acting on weighted L_p spaces // J. Funct. Anal. 1992. V. 106, N 1. P. 130-144.

24. *Grafakos L., Torres R. H.* A multilinear Schur test and multiplier operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 187, N 1. P. 1–24.

25. *Krepela M.* Bilinear weighted Hardy inequality for nonincreasing functions // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50.

26. *Krepela M.* Iterating bilinear Hardy inequalities // Proc. Edinburg Math. Soc. 2017. V. 60. P. 955–971.

27. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

28. *Sinnamon G., Stepanov V.D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 1. P. 89–101.

29. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.

Поступила в редакцию 13 ноября 2024 г.
После доработки 24 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Степанов Владимир Дмитриевич
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
stepanov@mi-ras.ru

Шамбилова Гульдарья Эрмаковна (ORCID 0000-0002-3656-7821)
Московский государственный строительный университет,
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
shambilova@mail.ru