

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЧЕЗАРО СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

Д. В. Прохоров

Аннотация. Для всех случаев параметров дано описание вещественного интерполяционного пространства пары пространств Чезаро со степенным весом. Показано, что результатом их вещественной интерполяции является пространство Чезаро с другим степенным весом, показатель которого определяется параметрами интерполяции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.209

Ключевые слова: пространства Чезаро и Копсона, интерполяция, K -метод.

1. Введение

Пусть $I := (c, d) \subset \mathbb{R}$, $q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\mathfrak{M}(I)$ — вещественное векторное пространство всех измеримых по Лебегу функций $f : I \rightarrow [-\infty, \infty]$, $L^0(I)$ — векторное пространство классов эквивалентных по мере Лебега функций из $\mathfrak{M}(I)$, $L^q(I)$ — пространство Лебега.

Обозначим (если мера в интеграле не указана, то интеграл берется по мере Лебега)

$$L^1_{\text{loc}}([c, d)) := \{f \in L^0(I) \mid \|\chi_{(c, x)} f\|_{L^1(I)} < \infty \ \forall x \in I\},$$

$$L^1_{\text{loc}}((c, d]) := \{f \in L^0(I) \mid \|\chi_{(x, d)} f\|_{L^1(I)} < \infty \ \forall x \in I\};$$

$$(H^\times(f))(x) := \int_c^x f \quad \forall x \in I, \ \forall f \in L^1_{\text{loc}}([c, d)),$$

$$(H_\times(f))(x) := \int_x^d f \quad \forall x \in I, \ \forall f \in L^1_{\text{loc}}((c, d]).$$

Пусть $w \in \mathfrak{M}(I)$, $w > 0$ почти всюду по мере Лебега на I . Рассматриваются нормированные пространства

$$\text{Ces}_{q,w}(I) := \{f \in L^1_{\text{loc}}([c, d)) \mid \|f\|_{\text{Ces}_{q,w}(I)} := \|w H^\times(|f|)\|_{L^q(I)} < \infty\},$$

$$\mathcal{Ces}_{q,w}(I) := \{f \in L^1_{\text{loc}}([c, d)) \mid \|f\|_{\mathcal{Ces}_{q,w}(I)} := \|w H^\times(f)\|_{L^q(I)} < \infty\},$$

$$\text{Cop}_{q,w}(I) := \{f \in L^1_{\text{loc}}((c, d]) \mid \|f\|_{\text{Cop}_{q,w}(I)} := \|w H_\times(|f|)\|_{L^q(I)} < \infty\},$$

$$\mathcal{C}op_{q,w}(I) := \{f \in L^1_{\text{loc}}((c, d]) \mid \|f\|_{\mathcal{C}op_{q,w}(I)} := \|w H_\times(f)\|_{L^q(I)} < \infty\}.$$

Пространство $\text{Ces}_{q,w}(I)$ называется *пространством Чезаро*, $\mathcal{Ces}_{q,w}(I)$ — *пространством типа Чезаро*. Пространство $\text{Cop}_{q,w}(I)$ называется *пространством Копсона*, $\mathcal{C}op_{q,w}(I)$ — *пространством типа Копсона*. Ясно, что

$\text{Ces}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathcal{Ces}_{q,w}(I)$ и $\text{Cor}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}or_{q,w}(I)$, где символ $\hookrightarrow$ означает непрерывность вложения. При $w^q \in L^1_{\text{loc}}((c, d])$ пространство $\text{Ces}_{q,w}(I)$ имеет запас элементов (в частности, содержит χ_K для любого компакта $K \subset I$), $\text{Ces}_{q,w}(I)$ полное [1, лемма 3.1], $\mathcal{Ces}_{q,w}(I)$ может не быть полным [2, теорема 2.1(e)]. Пространства Копсона обладают аналогичными свойствами в случае $w^q \in L^1_{\text{loc}}([c, d])$.

Обозначим $I_* := (0, \infty)$ и $\varphi_\beta(x) := \frac{1}{x^\beta}$, $x \in I_*$, $\beta \in \mathbb{R}$. Пространства $\text{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*)$ и $\text{Cor}_{q,\varphi_1}(I_*)$ (со степенным весом) активно изучались с 1970-х гг. (см. [3] и литературу к ней). Оба пространства $\text{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*)$ и $\mathcal{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*)$ появляются при решении задачи об описании пространств ассоциированных к одному весовому пространству Соболева на вещественной прямой [4]. Некоторые общие свойства пространств $\mathcal{Ces}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$, $\mathcal{C}or_{q,\varphi_\beta}(I_*)$ получены в статьях [2, 5]. Ряд работ посвящен описанию пространств, ассоциированных к пространствам $\text{Ces}_{q,w}(I)$, $\text{Cor}_{q,w}(I)$ [1, 6] и к $\mathcal{Ces}_{q,w}(I)$, $\mathcal{C}or_{q,w}(I)$ [7, 8] с произвольными весами. В [9, теорема 2.1(ii)] показано, что $\text{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*) = \text{Cor}_{q,\varphi_1}(I_*)$ является результатом вещественной интерполяции пары весовых пространств Лебега.

По теории интерполяции написан ряд монографий (см., например, [10–12]). Приведем основные определения. Пусть X, Y — два вещественных нормированных пространства. Класс всех линейных непрерывных операторов $T : X \rightarrow Y$ обозначим через $L(X, Y)$. Пара пространств (X, Y) называется *интерполяционной парой*, если существует хаусдорфово топологическое векторное пространство $\mathcal{V}$ такое, что X непрерывно вложено в $\mathcal{V}$ и Y непрерывно вложено в $\mathcal{V}$. В этом случае определяются сумма

$$X + Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z = x + y, x \in X, y \in Y\}$$

и пересечение

$$X \cap Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z \in X, z \in Y\}$$

с нормами

$$\|z\|_{X+Y} := \inf_{z=x+y, x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + \|y\|_Y), \quad \|z\|_{X \cap Y} := \max\{\|z\|_X, \|z\|_Y\}.$$

Для интерполяционной пары (X, Y) *промежуточным пространством* называется любое нормированное пространство E такое, что $X \cap Y \hookrightarrow E \hookrightarrow X + Y$. *Интерполяционным пространством* между X и Y называют любое промежуточное для (X, Y) пространство E такое, что для $T \in L(X + Y, X + Y)$, у которого $T|_X \in L(X, X)$ и $T|_Y \in L(Y, Y)$, выполнено $T|_E \in L(E, E)$.

Одним из способов построения интерполяционного пространства для интерполяционной пары (X, Y) является K -метод (метод вещественной интерполяции), сформулированный ниже.

K -метод. Пусть (X, Y) — интерполяционная пара. Для $z \in X + Y$ и $t \in (0, \infty)$ положим

$$K(t, z, X, Y) := \inf_{z=x+y, x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + t\|y\|_Y).$$

Для $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$ пространство

$$(X, Y)_{\theta, p} := \{z \in X + Y \mid \|z\|_{(X, Y)_{\theta, p}} < \infty\},$$

где

$$\|z\|_{(X, Y)_{\theta, p}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty K(t, z, X, Y)^p t^{-\theta p - 1} dt \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} t^{-\theta} K(t, z, X, Y), & p = \infty, \end{cases}$$

является интерполяционным пространством между X и Y .

Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ и $\theta \in (0, 1)$. В [9, следствие 2.4] при помощи теоремы реитерации (см. [10, теорема 2.4, с. 311; 11, теорема 3.5.3]) доказано равенство

$$(\text{Ces}_{p_0, \varphi_1}(I_*), \text{Ces}_{p_1, \varphi_1}(I_*))_{\theta, p_\theta} = \text{Ces}_{p_\theta, \varphi_1}(I_*),$$

где $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Основной результат данной работы находится в п. 2.2, где доказано другой техникой равенство

$$(\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*), \text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*))_{\theta, p} = \text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*) \quad (1)$$

для любых $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$ и $\beta > \frac{1}{p_0}$. В п. 2.3 показано, что схема п. 2.2 неприменима для интерполяции пространств $\mathcal{Ces}_{q, \varphi_\beta}(I_*)$. Аналогичные результаты для пространств Копсона приведены в п. 2.4.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim_{\{\dots\}} B$ означает $A \leq cB$ с константой c , зависящей от параметров перечисленных в $\{\dots\}$; $A \approx_{\{\dots\}} B$ равносильно ($A \lesssim_{\{\dots\}} B$ и $B \lesssim_{\{\dots\}} A$).

2. Результаты

2.1. Общие факты.

Предложение 1. Любые два пространства семейства $\{\mathcal{Ces}_{q, w}(I)\}_{q \in [1, \infty]} \cup \{\text{Ces}_{q, w}(I)\}_{q \in [1, \infty]}$ образуют интерполяционную пару.

Доказательство. Пусть $\{a_k\}_1^\infty \subset I$, $\{b_k\}_1^\infty \subset I$, $a_1 < b_1$, $a_k \downarrow c$, $b_k \uparrow d$. Для $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L_{\text{loc}}^1([c, d])$ положим

$$\|f\|_{(k)} := \int_{a_k}^{b_k} w(x) \left| \int_c^x f \right| dx$$

и определим вещественное векторное пространство

$$\mathcal{V} := \{f \in L_{\text{loc}}^1([c, d]) \mid \|f\|_{\mathcal{V}} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{V}} := \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|_{(k)}}{b_k - a_k + 1}.$$

Фиксируем произвольное $q \in [1, \infty]$. В силу неравенства Гёльдера для произвольного $f \in \mathcal{Ces}_{q, w}(I)$ выполнено

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{(b_k - a_k)^{1 - \frac{1}{q}} \|f\|_{\mathcal{Ces}_{q, w}(I)}}{b_k - a_k + 1} \leq \|f\|_{\mathcal{Ces}_{q, w}(I)},$$

т. е. $\mathcal{Ces}_{q, w}(I) \hookrightarrow \mathcal{V}$. Так как $\text{Ces}_{q, w}(I) \hookrightarrow \mathcal{Ces}_{q, w}(I)$, то $\text{Ces}_{q, w}(I) \hookrightarrow \mathcal{V}$. $\square$

Пусть $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ и $\theta \in (0, 1)$. Определим γ равенством $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, p_θ — равенством $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Заметим, что $\frac{\theta}{\gamma} = \theta \left[\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right] = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_\theta}$ и $\frac{1-\theta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\theta}{\gamma} = \frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}$.

Для элемента $f \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ и $s \in I_*$ положим $I_{0, s} := (0, s]$, $I_{1, s} := (s, \infty)$, $f_{0, s} := f \chi_{I_{0, s}}$, $f_{1, s} := f \chi_{I_{1, s}}$. Если $f_{0, s} \in X$, $f_{1, s} \in Y$, то из определения функционала K вытекает

$$K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, X, Y) \leq \|f_{0, s}\|_X + s^{\frac{1}{\gamma}} \|f_{1, s}\|_Y.$$

При $p \in [1, \infty)$

$$\left(\int_0^\infty K(t, f, X, Y)^p t^{-\theta p - 1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \gamma^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, X, Y)^p s^{-\frac{\theta p}{\gamma} - 1} ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

ибо $-\frac{1}{\gamma}(\theta p + 1) + \frac{1}{\gamma} - 1 = -\frac{\theta p}{\gamma} - 1$, и

$$\|f\|_{(X, Y)_{\theta, p}} \lesssim_{\gamma, p} \left[\int_{I_*} \|f_{0, s}\|_X^p s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_0}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{I_*} \|f_{1, s}\|_Y^p s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

При $p = \infty$ выполнено

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} t^{-\theta} K(t, f, X, Y) = \operatorname{ess\,sup}_{s \in (0, \infty)} s^{-\frac{\theta}{\gamma}} K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, X, Y)$$

и

$$\|f\|_{(X, Y)_{\theta, \infty}} \leq \operatorname{ess\,sup}_{s \in (0, \infty)} s^{\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_0}} \|f_{0, s}\|_X + \operatorname{ess\,sup}_{s \in (0, \infty)} s^{\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}} \|f_{1, s}\|_Y. \quad (3)$$

Кроме того, из определения K существуют $g_{s, 0} \in X$ и $g_{s, 1} \in Y$ такие, что $f = g_{s, 0} + g_{s, 1}$ и

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, X, Y) \geq \|g_{s, 0}\|_X + s^{\frac{1}{\gamma}} \|g_{s, 1}\|_Y. \quad (4)$$

Для произвольного веса $w \in \mathfrak{M}(I_*)$ можно доказать следующий результат.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\theta \in (0, 1)$. Тогда

$$(\mathcal{Ces}_{p_0, w}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, w}(I_*))_{\theta, p} \hookrightarrow \mathcal{Ces}_{p, w \cdot \varphi^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*), \quad (5)$$

$$(\operatorname{Ces}_{p_0, w}(I_*), \operatorname{Ces}_{p_1, w}(I_*))_{\theta, p} \hookrightarrow \operatorname{Ces}_{p, w \cdot \varphi^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*). \quad (6)$$

Доказательство. Фиксируем $f \in (\mathcal{Ces}_{p_0, w}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, w}(I_*))_{\theta, p}$. Для доказательства (5) достаточно показать, что для любого $s \in I_*$ выполнено

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, \mathcal{Ces}_{p_0, w}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, w}(I_*)) \geq \left[\int_0^s \left| w(x) \int_0^x f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}, \quad (7)$$

ибо в этом случае перестановкой интегралов получаем

$$\begin{aligned} 2\|f\|_{(\mathcal{Ces}_{p_0, w}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, w}(I_*))_{\theta, p}} &\gtrsim_{\gamma, p} \left[\int_{I_*} \int_0^s \left| w(x) \int_0^x f \right|^p dx s^{\frac{p}{p_0} - \frac{\theta p}{\gamma} - 2} ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\approx_{p_0, p_1, p, \theta} \left[\int_{I_*} \left| \frac{w(x)}{x^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}} \int_0^x f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Фиксируем $s \in I_*$. Пусть $g_{s, i} \in \mathcal{Ces}_{p_i, w}(I_*)$, $i \in \{0, 1\}$, о которых говорится в (4). Применяя обратное неравенство Гёльдера, оценим

$$\|g_{s, 0}\|_{\mathcal{Ces}_{p_0, w}(I_*)} + s^{\frac{1}{\gamma}} \|g_{s, 1}\|_{\mathcal{Ces}_{p_1, w}(I_*)}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left[\int_0^s \left| w(x) \int_0^x g_{s,0} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} + \left[\int_0^s \left| w(x) \int_0^x g_{s,1} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\gamma}} \\
&\geq \left[\int_0^s \left| w(x) \int_0^x f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

тем самым (7) доказано. Вложение (6) доказывается аналогично. $\square$

Далее работаем с пространствами со степенными весами.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq p \leq \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0, 1)$. Тогда

$$\mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I_*) \hookrightarrow (\mathcal{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*))_{\theta, p}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $f \in \mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I_*)$. Для $s \in I_*$ имеем

$$\begin{aligned}
\|f_{0,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*)} &= \left[\int_0^s \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_0} dx + \int_s^\infty \frac{dx}{x^{\beta p_0}} \left| \int_0^s f \right|^{p_0} \right]^{\frac{1}{p_0}} \\
&\lesssim_{\beta, p_0} \left[\int_{I_{0,s}} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_0} dx \right]^{\frac{1}{p_0}} + s^{\frac{1}{p_0} - \beta} \left| \int_0^s f \right|;
\end{aligned}$$

при $p_1 < \infty$

$$\begin{aligned}
\|f_{1,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)} &= \left[\int_s^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_s^x f \right|^{p_1} dx \right]^{\frac{1}{p_1}} \\
&\lesssim_{\beta, p_1} \left[\int_{I_{1,s}} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_1} dx \right]^{\frac{1}{p_1}} + s^{\frac{1}{p_1} - \beta} \left| \int_0^s f \right|;
\end{aligned}$$

при $p_1 = \infty$

$$\|f_{1,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)} = \sup_{x>s} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_s^x f \right| \leq \sup_{x>s} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right| + \frac{1}{s^\beta} \left| \int_0^s f \right|.$$

Следовательно, для $i \in \{0, 1\}$ и $s \in I_*$ выполнено

$$\|f_{i,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_i, \varphi_\beta}(I_*)} \lesssim_{\beta, p_i} \|\varphi_\beta H^\times(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_i} - \beta} \left| \int_0^s f \right|. \quad (9)$$

1. СЛУЧАЙ $p < \infty$. Пусть $p_1 < p$ и $i \in \{0, 1\}$. Применяя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\left[\int_{I_{i,s}} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_i} dx \right]^{\frac{1}{p_i}} \leq \left[\int_{I_{i,s}} \left| \frac{1}{x^{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}} \int_0^x f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{I_{i,s}} x^{\mu_i} dx \right]^{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p}}, \quad (10)$$

где $\mu_i := \frac{(p_\theta - p)p_i}{p_\theta(p - p_i)}$. Правая часть (10) конечна, ибо $\mu_i + 1 > 0$ при $i = 0$ и $\mu_i + 1 < 0$ при $i = 1$. При $p_1 = p$

$$\left[\int_s^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_1} dx \right]^{\frac{1}{p_1}} \leq \left[\int_s^\infty \left| \frac{1}{x^{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}} \int_0^x f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}} < \infty.$$

Таким образом, $f_{0,s} \in \mathcal{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*)$ и $f_{1,s} \in \mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)$.

Для нашего случая $(X, Y) = (\mathcal{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*), \mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*))$, $i \in \{0, 1\}$ имеем

$$\begin{aligned} & \left[\int_{I_*} \|f_{i,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_i, \varphi_\beta}(I_*)}^p s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \lesssim_{\beta, p_i} \left[\int_{I_*} \left(\int_{I_{i,s}} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} + \|f\|_{\mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)} \\ & \lesssim_{p_0, p_1, p, \theta} \|f\|_{\mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}, \quad (11) \end{aligned}$$

где последняя оценка при $p_i < p$ получена применением неравенства Харди [13] для неотрицательных функций вида

$$\left[\int_{I_*} \left(\int_{I_{i,s}} x^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta})p_i} g(x) dx \right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}) - 1} ds \right]^{\frac{p_i}{p}} \lesssim_{p_0, p_1, p, \theta} \left[\int_{I_*} g(x)^{\frac{p}{p_i}} dx \right]^{\frac{p_i}{p}},$$

ибо для $s \in I_*$ выполнено (см. (10))

$$\left[\int_{I_* \setminus I_{i,s}} y^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}) - 1} dy \right]^{\frac{p_i}{p}} \left[\int_{I_{i,s}} x^{\mu_i} dx \right]^{1 - \frac{p_i}{p}} \approx_{p_0, p_1, p, \theta} 1.$$

При $p_1 = p$ имеем

$$\begin{aligned} & \left[\int_{I_*} \left(\int_s^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{p}{p_1}} s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ & = \left[\int_{I_*} \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^p \int_0^x s^{\frac{p}{p_\theta} - 2} ds dx \right]^{\frac{1}{p}} \approx_{p_0, p_1, p, \theta} \|f\|_{\mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}. \end{aligned}$$

В силу (2) вложение (8) доказано для случая $p < \infty$.

2. СЛУЧАЙ $p = \infty$. Для $i \in \{0, 1\}$ и $s \in I_*$ имеем

$$\begin{aligned} & s^{\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}} \|f_{i,s}\|_{\mathcal{Ces}_{p_i, \varphi_\beta}(I_*)} \lesssim_{\beta, p_i} s^{\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}} \|\varphi_\beta H^\times(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_\theta} - \beta} \left| \int_0^s f \right| \\ & \leq \|f\|_{\mathcal{Ces}_{\infty, \varphi_{\beta - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)} [s^{\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}} \|\varphi_{\frac{1}{p_\theta}}\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + 1] \lesssim_{p_0, p_1, \theta} \|f\|_{\mathcal{Ces}_{\infty, \varphi_{\beta - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}. \end{aligned}$$

Применяя (3), получим (8) для случая $p = \infty$. Теорема доказана. $\square$

2.2. Интерполяция пространств $\mathcal{Ces}_{q, \varphi_\beta}(I_*)$ K -методом. Заметим, что $\mathcal{Ces}_{q, \varphi_\beta}(I_*) = \{0\}$ при $(q < \infty$ и $\beta \leq \frac{1}{q})$ или $(q = \infty$ и $\beta < 0)$.

Теорема 3. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$. Тогда выполнено (1).

Доказательство. 1. Сначала докажем вложение

$$\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*) \hookrightarrow (\text{Ces}_{p_0, \varphi_{\beta}}(I_*), \text{Ces}_{p_1, \varphi_{\beta}}(I_*))_{\theta, p}. \quad (12)$$

При $p \in [p_1, \infty]$ (12) доказывается аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть $p < p_1$. Фиксируем $f \in \text{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*)$. Покажем, что для $i \in \{0, 1\}$ выполнено $f_{i,s} \in \text{Ces}_{p_i, \varphi_{\beta}}(I_*)$ и имеет место оценка

$$\left[\int_{I_*} \|f_{i,s}\|_{\text{Ces}_{p_i, \varphi_{\beta}}(I_*)}^p s^{p(\frac{1}{p\theta}-\frac{1}{p_i})-1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p_0, p_1, p, \theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*)}. \quad (13)$$

В силу (9) имеем

$$\|f_{i,s}\|_{\text{Ces}_{p_i, \varphi_{\beta}}(I_*)} = \| |f_{i,s}| \|_{\mathcal{Ces}_{p_i, \varphi_{\beta}}(I_*)} \lesssim_{\beta, p_i} \|\varphi_{\beta} H^{\times}(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_i}-\beta} \int_0^s |f|$$

и, учитывая $f \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$, достаточно показать конечность первого слагаемого при $s = 1$.

При $p \leq p_i < \infty$ применяем дискретизацию выражения $\|\varphi_{\beta} H^{\times}(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,1})}$ и неравенство Йенсена для сумм. Пусть $Z_0 := \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$, $Z_1 := \mathbb{Z} \cap [1, \infty)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\beta} H^{\times}(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,1})} &= \left[\sum_{k \in Z_i} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \left[\frac{1}{x^{\beta}} \int_0^x |f| \right]^{p_i} dx \right]^{\frac{1}{p_i}} \\ &\lesssim_{\beta, p_i} \left[\sum_{k \in Z_i} \left[(2^k)^{p(\frac{1}{p_i}-\beta)} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{p_i}{p}} \right]^{\frac{1}{p_i}} \leq \left[\sum_{k \in Z_i} (2^k)^{p(\frac{1}{p_i}-\beta)} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sum_{k \in Z_i} (2^k)^{p(\frac{1}{p\theta}-\beta)} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta, p\theta, p} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*)}. \end{aligned}$$

При $p_1 = \infty$ действуем аналогично:

$$\begin{aligned} \sup_{x>1} \left[\frac{1}{x^{\beta}} \int_0^x |f| \right] &= \sup_{k \in Z_1} \sup_{x \in (2^{k-1}, 2^k]} \left[\frac{1}{x^{\beta}} \int_0^x |f| \right] \lesssim_{\beta} \left[\sup_{k \in Z_1} (2^k)^{-p\beta} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sum_{k \in Z_1} (2^k)^{p(\frac{1}{p\theta}-\beta)} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta, p\theta, p} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*)}. \end{aligned}$$

При $p_0 < p$ конечность $\|f_{0,s}\|_{\text{Ces}_{p_0, \varphi_{\beta}}(I_*)}$ доказывается с помощью неравенства Гёльдера, как сделано в (10). Таким образом, $f_{i,s} \in \text{Ces}_{p_i, \varphi_{\beta}}(I_*)$ для $i \in \{0, 1\}$.

При $p_i < \infty$, учитывая (11), для доказательства (13) достаточно показать выполнение неравенства

$$\left[\int_{I_*} \left(\int_{I_{i,s}} \left[\frac{1}{x^{\beta}} \int_0^x |f| \right]^{p_i} dx \right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p\theta}-\frac{1}{p_i})-1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p_0, p_1, p, \theta} \|f\|_{\mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*)}.$$

Пусть $Z_{0,k} := \mathbb{Z} \cap (-\infty, k]$, $Z_{1,k} := \mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Применяя дискретизацию и [14, предложение 2.1], получим

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{I_*} \left(\int_{I_{i,s}} \left[\frac{1}{x^\beta} \int_0^x |f| \right]^{p_i} dx \right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \lesssim_{p_0, p_1, p, \theta} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i})} \left[\sum_{n \in Z_{i,k} 2^{n-1}}^{2^n} \int \left(\frac{1}{x^\beta} \int_0^x |f| \right)^{p_i} dx \right]^{\frac{p}{p_i}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \approx_{\beta, p_i, p} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_i})} \left[\sum_{n \in Z_{i,k}} (2^n)^{1-\beta p_i} \left(\int_0^{2^n} |f| \right)^{p_i} \right]^{\frac{p}{p_i}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \approx_{\beta, p_0, p_1, p, \theta} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta} - \beta)} \left(\int_0^{2^k} |f| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta, p_\theta, p} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.
\end{aligned}$$

При $p_1 = \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{I_*} \|f_{1,s}\|_{\text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)}^p s^{p(\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}) - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{I_*} \left[\sup_{x>s} \left[\frac{1}{x^\beta} \int_s^x |f| \right] \right]^p s^{\frac{p}{p_\theta} - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \lesssim_{p, p_\theta} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^{\frac{p}{p_\theta}} \sup_{m \geq k} \sup_{2^{m-1} < x \leq 2^m} \left[\frac{1}{x^\beta} \int_0^x |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \lesssim_{p, p_\theta} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta} - \beta)} \left[\int_0^{2^k} |f| \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta, p, p_\theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.
\end{aligned}$$

2. Покажем обратное к (12) вложение. Фиксируем элемент $f \in (\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*), \text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*))_{\theta, p}$. Фиксируем $s \in I_*$. Пусть $g_{s,i} \in \text{Ces}_{p_i, w}(I_*)$, $i \in \{0, 1\}$, о которых говорится в (4). Заметим, что

$$\|g_{s,i}\|_{\text{Ces}_{p_i, \varphi_\beta}(I_*)} \geq \|\varphi_\beta\|_{L^{p_i}((s, \infty))} \int_0^s |g_{s,i}| \approx_{\beta, p_i} s^{\frac{1}{p_i} - \beta} \int_0^s |g_{s,i}|.$$

Следовательно,

$$\|g_{s,0}\|_{\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*)} + s^{\frac{1}{\gamma}} \|g_{s,1}\|_{\text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)} \gtrsim_{\beta, p_0, p_1} s^{\frac{1}{p_0} - \beta} \int_0^s |f|.$$

Отсюда

$$\|f\|_{(\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I_*), \text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*))_{\theta, p}} \gtrsim_{\beta, p_0, p_1, p} \|f\|_{\text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

Таким образом, (1) доказано. $\square$

2.3. Контрпример. Следующее утверждение показывает, что схема п. 2.2 неприменима для пространств $\text{Ces}_{q, \varphi_\beta}(I_*)$ при $p < p_1$.

Предложение 2. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, p_1)$. Существует $f \in \mathcal{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I_*)$ такой, что для любого $s \in [0, \infty)$ выполнено $\chi_{(s, \infty)} f \notin \mathcal{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I_*)$.

Доказательство. Пусть $\nu > \beta + \frac{p}{p_1 - p} \left| \frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p} \right|$, $0 < \eta < \min\{1, \frac{p_1}{p} - 1\}$. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_k := \begin{cases} \frac{1}{k^{2+\eta}}, & k \text{ четное,} \\ \frac{1}{k^\eta}, & k \text{ нечетное;} \end{cases} \quad b_k := \begin{cases} k^{\frac{1}{p\nu}}, & k \text{ четное,} \\ k^{-\frac{1}{p\nu}}, & k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Определим $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset [2, \infty)$ и $\{a_k\}_1^\infty \subset (0, 1)$ индуктивно. Положим $\alpha_1 := 2$, $a_1 := \varepsilon_1 2^{-p_1(\nu-\beta)}$. Пусть $\{\alpha_j\}_1^k$ и $\{a_j\}_1^k$ построены. Положим

$$\alpha_{k+1} := \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k - a_k} = \alpha_k + a_k + \frac{a_k^2}{\alpha_k - a_k} \quad \text{и} \quad a_{k+1} := \varepsilon_{k+1} \alpha_{k+1}^{-p_1(\nu-\beta)}. \quad (14)$$

Тогда $\alpha_{k+1} > \alpha_k \geq 2$ и $0 < a_{k+1} < \varepsilon_{k+1} < 1$.

Из (14) вытекает, что последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ растет и

$$\alpha_{k+1} \geq \sum_{j=1}^k a_j = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \alpha_j^{-p_1(\nu-\beta)} \geq \alpha_{k+1}^{-p_1(\nu-\beta)} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j,$$

откуда с учетом расходимости ряда $\sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j$ следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \infty$. Кроме того, из (14) имеем

$$a_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k+1}} = \frac{\alpha_k \alpha_{k+1} - \alpha_k^2}{\alpha_{k+1}} = \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \alpha_k}{\alpha_{k+1}}.$$

Далее, для $q \in (1, \infty)$ имеем

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1} \left[\frac{1}{\alpha_k^{q-1}} - \frac{1}{\alpha_{k+1}^{q-1}} \right] = \frac{1}{q-1} \left[\frac{\alpha_{k+1}^{q-1} - \alpha_k^{q-1}}{\alpha_k^{q-1} \alpha_{k+1}^{q-1}} \right],$$

стало быть,

$$\frac{\min\{q-1, 1\}}{q-1} \frac{a_k}{\alpha_k^q} \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^q} \leq \frac{\max\{q-1, 1\}}{q-1} \frac{a_k}{\alpha_k^q}.$$

Пусть $\alpha_0 = b_0 := 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ выберем $\delta_k \in (0, \alpha_{k+1} - \alpha_k)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}} < \int_{\alpha_k + \delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}},$$

$$[2(b_{k-1}\alpha_{k-1})^\nu + (b_k\alpha_k)^\nu]^p \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta_k} \frac{dx}{x^{p(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta})}} < \frac{1}{2^k}.$$

Положим

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j \alpha_j)^\nu - (b_{j-1} \alpha_{j-1})^\nu}{\delta_j} \chi_{(\alpha_j, \alpha_j + \delta_j)}(x), \quad x \in I_*.$$

Заметим, что для $y \in [\alpha_k + \delta_k, \alpha_{k+1}]$ выполнено

$$\int_2^y f = \int_2^{\alpha_k + \delta_k} f = \sum_{j=1}^k [(b_j \alpha_j)^\nu - (b_{j-1} \alpha_{j-1})^\nu] = (b_k \alpha_k)^\nu,$$

а для $y \in (\alpha_k, \alpha_k + \delta_k)$

$$\left| \int_2^y f \right| \leq \left| \int_2^{\alpha_k} f \right| + \left| \int_{\alpha_k}^y f \right| \leq 2(b_{k-1} \alpha_{k-1})^\nu + (b_k \alpha_k)^\nu.$$

Так как

$$p\nu - p \left[\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta} \right] \leq p(\nu - \beta) + p \left| \frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p} \right| < p(\nu - \beta) + (p_1 - p)(\nu - \beta) = p_1(\nu - \beta),$$

то

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{C}^{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}}^p(I_*) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{1}{x^{p(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta})}} \left| \int_2^x f \right|^p dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta_k} \frac{[2(b_{k-1} \alpha_{k-1})^\nu + (b_k \alpha_k)^\nu]^p}{x^{p(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta})}} dx + [b_k \alpha_k]^{p\nu} \int_{\alpha_k + \delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta})}} \right] \\ &\lesssim_{\beta, p, p_\theta} \sum_{k=1}^{\infty} [2^{-k} + b_k^{p\nu} a_k \alpha_k^{p\nu - p(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta})}] \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p\nu} a_k \alpha_k^{p_1(\nu - \beta)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p\nu} \varepsilon_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\eta)} < \infty. \end{aligned}$$

Фиксируем произвольное $s \in [0, \infty)$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_m^\nu > 2$ и $m^{\frac{1}{p}} > \left| \int_2^{\max\{2, s\}} f \right|$. Тогда для четных $k \geq m$

$$\frac{1}{(b_k \alpha_k)^\nu} \left| \int_2^{\max\{2, s\}} f \right| = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}} \alpha_k^\nu} \left| \int_2^{\max\{2, s\}} f \right| \leq \frac{1}{m^{\frac{1}{p}} \alpha_m^\nu} \left| \int_2^{\max\{2, s\}} f \right| < \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\chi_{(s, \infty)} f\|_{\mathcal{C}^{p_1, \varphi_\beta}}^{p_1}(I_*) &\geq \sum_{k=m}^{\infty} \int_{\alpha_k + \delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1 \beta}} \left| \int_s^{\alpha_k + \delta_k} f \right|^{p_1} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \int_{\alpha_k + \delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1 \beta}} \left| (b_k \alpha_k)^\nu - \int_2^{\max\{2, s\}} f \right|^{p_1} \\ &\gtrsim_{\beta, p_1} \sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k^{p_1 \nu} \alpha_k^{p_1(\nu - \beta)} \left| 1 - \frac{1}{(b_k \alpha_k)^\nu} \int_2^{\max\{2, s\}} f \right|^{p_1} \geq \frac{1}{2^{p_1}} \sum_{j=m}^{\infty} b_{2j}^{p_1 \nu} \varepsilon_{2j} = \infty, \end{aligned}$$

ибо $b_{2j}^{p_1 \nu} \varepsilon_{2j} = (2j)^{\frac{p_1}{p} - 2 - \eta}$. $\square$

2.4. Интерполяция пространств $\text{Cor}_{q, \varphi_\beta}(I_*)$ K -методом. Заметим, что $\text{Cor}_{q, \varphi_\beta}(I_*) = \{0\}$ при $(q < \infty \text{ и } \beta \geq \frac{1}{q})$ или $(q = \infty \text{ и } \beta > 0)$.

Предложение 3. Любые два пространства семейства $\{\mathcal{C}or_{q,w}(I)\}_{q \in [1,\infty] \cup \{\infty\}}$ образуют интерполяционную пару.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\theta \in (0, 1)$. Тогда

$$(\mathcal{C}or_{p_0,w}(I_*), \mathcal{C}or_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p} \hookrightarrow \mathcal{C}or_{p,w \cdot \varphi_{\frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I_*),$$

$$(\text{C}or_{p_0,w}(I_*), \text{C}or_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p} \hookrightarrow \text{C}or_{p,w \cdot \varphi_{\frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I_*).$$

Теорема 5. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq p \leq \infty$, $\beta < \frac{1}{p_1}$ при $p_1 < \infty$, $\beta \leq 0$ при $p_1 = \infty$, $\theta \in (0, 1)$. Тогда

$$\mathcal{C}or_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*) \hookrightarrow (\mathcal{C}or_{p_0,\varphi_{\beta}}(I_*), \mathcal{C}or_{p_1,\varphi_{\beta}}(I_*))_{\theta,p}.$$

Теорема 6. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\beta < \frac{1}{p_1}$ при $p_1 < \infty$, $\beta \leq 0$ при $p_1 = \infty$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$. Тогда выполнено

$$(\text{C}or_{p_0,\varphi_{\beta}}(I_*), \text{C}or_{p_1,\varphi_{\beta}}(I_*))_{\theta,p} = \text{C}or_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p\theta}}}(I_*).$$

Теоремы 4–6 доказываются аналогично теоремам 1–3 с заменой $\int_0^x f$ на $\int_x^\infty f$.

Так, утверждение теоремы 4 вытекает из оценки

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, \mathcal{C}or_{p_0,w}(I_*), \mathcal{C}or_{p_1,w}(I_*)) \geq \left[\int_0^s \left| w(x) \int_x^\infty f \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}},$$

которая доказывается, как (7). А в разложениях $f = f_{0,s} + f_{1,s}$ и $f = g_{s,0} + g_{s,1}$ для $i \in \{0, 1\}$ и $s \in I_*$ имеем

$$\|f_{i,s}\|_{\mathcal{C}or_{p_i,\varphi_{\beta}}(I_*)} \lesssim_{\beta,p_i} \|\varphi_{\beta} H_{\times}(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_i} - \beta} \left| \int_s^\infty f \right|,$$

$$\|g_{s,i}\|_{\text{C}or_{p_i,\varphi_{\beta}}(I_*)} \geq \|\varphi_{\beta}\|_{L^{p_i}((0,s))} \int_s^\infty |g_{s,i}|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminska A., Kubiak D. On the dual of Cesàro function space // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. P. 2760–2773.
2. Prokhorov D. V. On the associate spaces for altered Cesàro space // Anal. Math. 2022. V. 48. P. 1169–1183.
3. Astashkin S. V., Maligranda L. Structure of Cesàro function spaces: a survey // Function Spaces X (H. Hudzik et al., eds.). Proc. Int. Conf. 2014. V. 102. P. 13–40.
4. Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 119–158.
5. Stepanov V. D. On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507, N 1. 125764.
6. Степанов В. Д. Об ассоциированных пространствах к весовым пространствам Чезаро и Копсона // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 443–450.

7. Prokhorov D. V. On the dual spaces for weighted altered Cesàro and Copson spaces // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 514, N 2. 126325.
8. Prokhorov D. V. On the associated spaces of the weighted altered Cesàro space // Euras. Math. J. 2024. V. 15, N 1. P. 55–64.
9. Astashkin S. V., Maligranda L. Interpolation of Cesàro sequence and function spaces // Studia Math. 2013. V. 215. P. 39–69.
10. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. Boston, MA etc.: Acad. Press, Inc., 1988.
11. Bergh J., Löfström J. Interpolation spaces. An introduction. Berlin: Springer-Verl., 1976.
12. Lunardi A. Interpolation theory. Paris: Publications of the Scuola Normale Superiore 3rd ed., 2018.
13. Muckenhoupt B. Hardy's inequalities with weights // Studia Math. 1972. V. 44, N 1. P. 31–38.
14. Gol'dman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D. On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.

Поступила в редакцию 19 ноября 2024 г.

После доработки 24 января 2025 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Прохоров Дмитрий Владимирович (ORCID 0000-0003-1802-6121)
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000
prohorov@as.khb.ru