Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.929

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Обуховский, М. И. Каменский, Г. Г. Петросян, Т. А. Ульвачева, Ш. Цзэн

Аннотация. Исследуются системы дробно-дифференциальных включений в банаховом пространстве, правые части которых являются многозначными отображениями типа Каратеодори, зависящими от времени, конечного набора функций и их производных. Для решения задачи существования решений такой системы применяется теория дробного математического анализа и теория топологической степени для многозначных уплотняющих отображений.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.208

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, краевая задача, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

Посвящается юбилею профессора А. А. Толстоногова

Введение

В последние десятилетия теория дифференциальных включений в банаховых пространствах активно развивается и находит многочисленные интересные приложения в теории управления (см., например, [1–3]). В то же время интерес исследователей в России и за рубежом к различным аспектам дробного анализа и теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка существенно возрастает. Значимость этой темы во многом обусловлена ее разнообразными приложениями во многих областях прикладной математики, физики, техники, биологии, экономики и т. д. (см., например, монографии [4–7]). В настоящее время топологический подход, восходящий к [3–8] и использующий методы многозначного анализа, теории полугрупп, теории топологической степени и неподвижных точек (см. [9–23] и ссылки в них), продемонстрировал свою высокую эффективность при исследовании различных задач теории дробных дифференциальных включений.

В настоящей работе изучаются системы дифференциальных включений дробных порядков в произвольных банаховых пространствах. Вводится разрешающий многозначный оператор для этой системы и описываются его свойства. В частности, показано, что этот мультиоператор является уплотняющим

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

относительно специальной векторной меры некомпактности, заданной на декартовом произведении банаховых пространств. Это позволяет, применяя некоторые теоремы о неподвижной точке для мультиоператоров такого типа, доказать локальную и глобальную теоремы существования интегральных решений этой системы.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разд. 1 приведены необходимые сведения из дробного и многозначного анализа, а также из теории мер некомпактности, уплотняющих мультиоператоров и теории неподвижных точек. В разд. 2 вводится и исследуется разрешающий мультиоператор для системы и приведена локальная и глобальная теоремы существования интегральных решений системы дифференциальных включений. В последнем случае также устанавливаются компактность множества решений и полунепрерывная сверху зависимость множества решений от начальных данных.

1. Предварительные сведения

1.1. Дробные интеграл и производная. Вначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (см. [4, 5]).

Определение 1.1. *Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g : [0,T] \to E$* называется функция $I^q g$ следующего вида:

$$I_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Определение 1.2. *Дробной производной Герасимова — Капуто порядка $q \in (N-1, N]$ функции $g \in C^N([0,T];E)$* называется функция ${}^C D_0^q g$ следующего вида:

$${}^C D_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-q)} \int_0^t (t-s)^{N-q-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

Для $g \in C^N([0,T];E)$ имеет место следующая формула:

$${}^C D_0^q I_0^q g(t) = g(t), \quad I_0^q\, {}^C D_0^q g(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.2. Многозначные отображения. Нам понадобятся некоторые сведения из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см., например, [3, 8]).

Пусть $\mathscr{E}$ – банахово пространство, обозначим:

- $P(\mathscr{E}) = \{A \subseteq \mathscr{E} : A \neq \varnothing\}$ совокупность всех непустых подмножеств $\mathscr{E}$;
- $Pb(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ выпукло$\}$;
- $C(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ замкнуто$\}$;
- $K(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathscr{E}) = \{Pv(\mathscr{E}) \cap K(\mathscr{E})\}$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathscr{E}$.

Определение 1.3. Пусть $(\mathscr{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}$ называется *мерой некомпактности* (МНК) в $\mathscr{E}$, если для любого множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ имеет место равенство $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ – замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

(1) *монотонной*, если для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

(2) *несингулярной*, если для каждого $a \in E$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ имеем $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathscr{A}$ – конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

(3) *правильной*, если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$;

(4) *вещественной*, если $\mathscr{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком.

Примером МНК, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является МНК Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathscr{E}\}.$$

Заметим, что МНК Хаусдорфа удовлетворяет свойству полуоднородности, т. е. $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$.

Для $M \subset \mathscr{E}$ норма определяется как $\|M\| = \sup\limits_{x \in M} \|x\|_{\mathscr{E}}$.

Определение 1.4 (см., например, [3, 8]). Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху* (п.н.св.), если $\mathscr{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathscr{F}(x) \subset V\}$ открыто в X для любого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$;

(ii) *замкнутым*, если его график $\Gamma_{\mathscr{F}} = \{(x, y) : y \in \mathscr{F}(x)\}$ есть замкнутое подмножество $X \times \mathscr{E}$;

(iii) *компактным*, если $\mathscr{F}(X) = \bigcup\limits_{x \in X} F(x)$ относительно компактно в $\mathscr{E}$;

(iv) *квазикомпактным*, если его сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 1.1 (см. [3, теорема 1.1.12]). *Пусть мультиотображение $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ квазикомпактно, тогда $\mathscr{F}$ — п.н.св.*

Пусть X — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathscr{E}$.

Определение 1.5. П.н.св. мультиотображение $\mathscr{F} : X \to K(\mathscr{E})$ или п.н.св. семейство мультиотображений $\Psi : X \times [0, 1] \to K(\mathscr{E})$ называются *β-уплотняющими*, если для любого $\Omega \subset X$, которое не является относительно компактным, имеем соответственно

$$\beta(\mathscr{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega),$$

или

$$\beta(\Psi(\Omega \times [0, 1])) \ngeq \beta(\Omega).$$

Теорема 1.1 (см. [3, следствие 3.3.1]). *Пусть β — несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$, $\mathfrak{M}$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \mathfrak{M} \to Kv(\mathfrak{M})$ — β-уплотняющее мультиотображение. Тогда $\mathscr{F}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $x_\star \in \mathfrak{M}$, $x_\star \in \mathscr{F}(x_\star)$.*

Теорема 1.2 (см. [3, следствие 3.3.3]). *Пусть β — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$, $\mathscr{U}$ — ограниченная открытая окрестность точки $a \in \mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \overline{U} \to Kv(\mathscr{E})$ — β-уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию*

$$x - a \notin \lambda(\mathscr{F} - a)$$

для всех $x \in \partial\mathscr{U}$ и $0 < \lambda \leq 1$. Тогда множество всех неподвижных точек $\mathscr{F}$ непусто и компактно.

1.3. Измеримые мультифункции. Напомним некоторые сведения (см., например, [3, 8]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 1.6. Пусть $p \geq 1$. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ называется:

• L^p*-интегрируемой*, если G допускает L^p-интегрируемое по Бохнеру сечение, т. е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$;

• L^p*-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что $\|G(t)\| \leq \xi(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений $G : [0, T] \to K(E)$ будем обозначать через $\mathscr{W}^p_G$.

Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ называется *измеримой*, если для каждого открытого подмножества $V \subset E$ множество $G^{-1}(V)$ измеримо по Лебегу.

Лемма 1.2 (см. [3, теорема 4.2.1]). *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0, T]; E)$ является L^1-ограниченной и*

$$\chi(\{\xi_n\}(t)) \leq \alpha(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\alpha \in L^1_+([0, T])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0, T]$ с мерой Лебега $m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0, T]; E)$ со значениями в K_δ такие, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2\alpha(t) + \delta, \quad t \in [0, T] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Основные результаты

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — банаховы пространства. Рассмотрим банахово пространство

$$E^N = E_1^N \times \cdots \times E_n^N$$

где $E_i^N = E_i \times E_i \times \cdots \times E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с нормой

$$\|x\|_{E^N} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq N} \|x_{ij}\|_{E_i^j}, \quad x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nN}).$$

Будем изучать следующую систему дифференциальных включений дробного порядка в пространстве E^N:

$$\begin{cases} {}^C D_0^{q_1} x_1(t) \in F_1(t, \Delta^N x_1(t), \ldots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0,T], \\ {}^C D_0^{q_2} x_2(t) \in F_2(t, \Delta^N x_1(t), \ldots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0,T], \\ \ldots \\ {}^C D_0^{q_n} x_n(t) \in F_n(t, \Delta^N x_1(t), \ldots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{1}$$

где ${}^C D_0^{q_i}$ — дробные производные Герасимова — Капуто порядков q_i, $N-1 < q_i < N$, $i = 1, \ldots, n$, $N \geq 1$, и $\Delta^N x_i = \big(x_i, x_i', x_i'', \ldots x_i^{(N-1)}\big)$. Мультиоператор $F_i : [0,T] \times E^N \to Kv(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет следующим условиям:

$(F1_i)$ для каждого $x \in E^N$ мультифункции $F_i(\cdot, x) : [0,T] \to Kv(E_i)$ имеют сильно измеримое сечение;

$(F2_i)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиоператоры $F_i(t, \cdot) : E^N \to Kv(E_i)$ п.н.св.;

$(F3_i)$ для $p_i > \frac{1}{q_i - N + 1}$ мультиотображения F_i локально L^{p_i}–интегрально ограничены, т. е. для каждого $r > 0$ существуют функции $w_{ri} \in L_+^{p_i}(0,T)$ такие, что для всех $x \in E^N$, $\|x\|_{E^N} \leq r$:

$$\|F_i(t,x)\|_{E_i} := \sup\{\|y\|_{E_i} : y \in F_i(t,x)\} \leq w_{ri}(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T].$$

Введем в рассмотрение многозначное отображение $F : [0,T] \times E \to Kv(E)$,

$$F(t,x) = F_1(t,x) \times \cdots \times F_n(t,x).$$

Для формулировки следующего свойства F_i введем в пространстве E^N векторную МНК Хаусдорфа $\mathscr{X}$, полагая для ограниченного множества $\Omega \subset E^N$

$$\mathscr{X}(\Omega) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_1}\big(\Omega_1^j\big), \ldots, \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_n}\big(\Omega_n^j\big) \right)^T \in \mathbb{R}_+^n,$$

где χ_{E_i} — МНК Хаусдорфа в E_i, $\Omega_i^j = \big\{x_i^{(j)} : x_i \in \Omega_i^0 = \Omega_i\big\}$, $j = 0, \ldots, N-1$, и Ω_i^j — проекция множества Ω^j на E_i, $i = 1, \ldots, n$. Будем полагать, что мультиотображение F, удовлетворяет следующему условию $\mathscr{X}$-регулярности:

$(F4_i)$ существуют функции $\mu_i \in L_+^{p_i}(0,T)$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что для всех ограниченных множеств $\Omega^j \subset E$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, имеем

$$\mathscr{X}(F(t,\Omega)) \leq \mathscr{M}(t)\mathscr{X}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T],$$

где матрица $\mathscr{M}(t)$ имеет следующий вид:

$$\mathscr{M}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n(t) \end{pmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению задачи существования интегральных решений $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ для системы (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$\Delta^N x_1(0) = X_{01} \in E_1^N, \ldots, \Delta^N x_n(0) = X_{0n} \in E_n^N, \tag{2}$$

где $X_{0i} = (x_{0i}, x_{1i}, \ldots, x_{N-1i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим $X_0 = (X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0n}) \in E^N$.

Введем в рассмотрение суперпозиционный мультиоператор

$$\Phi_{F_i} : [0,\tau] \to Kv(E), \quad \Phi_{F_i}(t) = F_i(t, \Delta^N x_1(t), \dots, \Delta^N x_n(t)).$$

Функции $x_i : [0,\tau] \to E_i$ непрерывны. Поэтому с учетом свойств $(F1_i)$–$(F3_i)$ Φ_{F_i} L^{p_i}-интегрируемо и L^{p_i}-локально ограничено (см. [3]). Определим мультифункцию $\mathscr{P}_{F_i}$ по формуле

$$\mathscr{P}_{F_i}(x_i) = \{f_i \in L^{p_i}([0,\tau]; E_i) : f_i(t) \in \Phi_{F_i}(t)\}.$$

Справедливо следующее свойство слабой замкнутости для $\mathscr{P}_{F_i}$, доказательство которого может быть проведено по аналогии с леммой 5.1.1 из [3].

Лемма 2.1. *Пусть $\{x_i^m\}$ — последовательность в $C([0,\tau]; E_i)$, сходящаяся к $x_i^* \in C([0,\tau]; E_i)$. Предположим, что последовательность $\{f_i^m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E_i)$, $f_i^m \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i^m)$, слабо сходится к функции f^*. Тогда $f^* \in \mathscr{P}_{F_i}(x^*)$.*

Определение 2.1. *Интегральным решением задачи* (1), (2) на промежутке $[0,\tau]$, $0 < \tau \le T$, называется функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где

$$x_i(\cdot) \in C([0,\tau]; E_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} x_i^{(j)}(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f_i(s)\, ds, \quad f_i \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i).$$

Для заданного $\tau \in [0,T]$ определим операторы

$$S_i : L^{p_i}([0,\tau]; E) \to C([0,\tau]; E_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_i(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q_i)} \int_0^t (t-s)^{q_i-1} f(s)\, ds,$$

и рассмотрим мультиоператоры $G_i : C([0,\tau]; E_i) \multimap C([0,\tau]; E_i)$,

$$G_i(x_i) = x_i^* + S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}(x_i),$$

где

$$x_i^* = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} x_i^{(j)}(0).$$

Для изучения свойств мультиоператоров G_i исследуем множество операторов $S_i^j : L^{p_i}([0,T]; E_i) \to C([0,T]; E_i)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, где $S_i^0 = S_i$ и

$$S_i^j(f)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S_i(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \int_0^t (t-s)^{q_i-j-1} f(s)\, ds$$

для $1 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$.

Лемма 2.2 (см. [20]). *Операторы S_i^j, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$, обладают следующими свойствами:*

(S_1) *существуют константы C_{ij}, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$, такие, что*

$$\left\|S_i^j(\xi)(t) - S_i^j(\eta)(t)\right\|_{E_i}^{p_i} \le C_{ij}^{p_i} \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_{E_i}^{p_i}\, ds, \quad \xi, \eta \in L^{p_i}([0,\tau]; E_i).$$

(S_2) *для каждого компактного множества $K \subset E_i$ и последовательности $\{\xi_m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E_i)$ такой, что $\{\xi_m(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,\tau]$, слабая сходимость $\xi_m \rightharpoonup \xi_0$, влечет сходимость $S_i^j(\xi_m) \to S_i^j(\xi_0)$ в $C([0,\tau]; E_i)$.*

Определение 2.1. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ называется L^{p_i}*-полукомпактной*, если она L^{p_i}-интегрально ограничена и множество $\{f_k(t)\}_{k=1}^\infty$ относительно компактно в E_i для п.в. $t \in (0,\tau)$.

Используя свойство 3.4 из [24], можно установить следующий аналог теоремы 5.1.1 из [3].

Лемма 2.3. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ является L^{p_i}-полукомпактной последовательностью в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$. Тогда $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ слабо компактно в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ и последовательность $\{S_i^j f_k\}_{k=1}^\infty$ относительно компактна в $C([0,\tau]; E_i)$. Более того, если $f_k \rightharpoonup f$, то $S_i^j f_k \to S_i^j f$, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$.*

Доказательство следующих утверждений может быть найдено в [22].

Лемма 2.4. *Пусть последовательность $\{\xi_m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E)$ удовлетворяет условиям леммы* 1.2. *Тогда для $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$ имеет место неравенство*

$$\chi\big(\{S_i^j(\xi_m(t))\}\big) \le 2C_{ij} \left(\int\limits_0^t |\alpha(s)|^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i}, \quad t \in [0,\tau].$$

Лемма 2.5. *Для каждого $i = 1, \dots, n$ мультиоператоры G_i замкнуты и имеют выпуклые значения.*

Теорема 2.1. *Для каждого $i = 1, \dots, n$ мультиоператоры G_i п.н.св.*

Доказательство. Легко видеть, что утверждение достаточно доказать для $S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}$. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset C([0,\tau]; E_i)$ и произвольную последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ такую, что $f_k \in \mathscr{P}_{F_i}(x_k)$, $k \ge 1$. Из свойств ($F3_i$) и ($F4_i$) следует, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ L^{p_i}-полукомпактна. Используя лемму 2.3, получаем, что последовательность $\{S_i f_k\}_{k=1}^\infty \subset C([0,\tau]; E_i)$ относительно компактна и тем самым мультиоператор $S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}$ квазикомпактен. Остается сослаться на лемму 1.1.

Перейдем к исследованию мультиоператора $G : C([0,\tau]; E) \multimap C([0,\tau]; E)$, определяемого по формуле

$$G(x) = G_1(x) \times \dots \times G_n(x).$$

Легко видеть, что функция $x(\cdot) \in C([0,\tau]; E)$ является интегральным решением задачи (1), (2) на промежутке $[0,\tau]$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot)$ — неподвижная точка для G.

Из свойств многозначных отображений (см., например, [3, 8]), леммы 2.5 и теоремы 2.1 следует, что мультиоператор G п.н.св. и имеет компактные значения. Более того, мультиоператор G имеет выпуклые значения.

Докажем, что мультиоператор G уплотняющий. Введем следующую меру некомпактности в пространствах $C^{N-1}([0,\tau];E_i)$.

Модифицированный модуль послойной некомпактности

$$\gamma_i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\gamma_i(\Omega_i) = \sup_{t\in[0,\tau]} e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\Omega_i(t)\right),$$

где $\frac{d^j}{dt^j}\Omega_i(t) := \left\{\frac{d^j}{dt^j}v(t); v\in\Omega_i\right\}$ и константы L_i выбраны так, что

$$l_i := 2\sum_{j=0}^{N-1} C_{ij} \sup_{t\in[0,\tau]} \left(\int\limits_0^t e^{-L_i p_i (t-s)} \mu_i^p(s)\, ds\right)^{1/p_i} < 1,$$

где $\mu_i(\cdot)$ — функции из условия $(F4_i)$.

Модуль равностепенной непрерывности:

$$\operatorname{mod}_C^i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\operatorname{mod}_C^i(\Omega_i) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{v\in\Omega_i} \max_{0\le j\le N-1} \max_{|t_1-t_2|<\delta} \|v^{(j)}(t_1) - v^{(j)}(t_2)\|.$$

Векторная мера некомпактности $\nu_i(\Omega_i)$:

$$\nu_i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+^2, \quad \nu_i(\Omega_i) = \max_{D\in\Delta\left(\Omega_i\right)} \big(\gamma_i(D), \operatorname{mod}_C^i(D)\big),$$

где $\Delta(\Omega_i)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω_i и максимум берется в смысле частичного порядка в конусе $\mathbb{R}_+^2$.

Введем в пространстве $C([0,\tau];E)$ векторную меру некомпактности $\mathscr{V}$, ставящую в соответствие ограниченному множеству $\Omega \subset C([0,\tau];E)$ вектор $\mathscr{V}(\Omega) \in \mathbb{R}_+^{2n}$ по правилу

$$\mathscr{V}(\Omega) = (\nu_1(\Omega_1), \dots, \nu_n(\Omega_n)),$$

где $\Omega_i \subset C([0,\tau];E_i)$, $i = 1,\dots,n$, — проекции множества Ω.

Легко видеть, что МНК $\mathscr{V}$ обладает всеми вышеперечисленными свойствами мер некомпактности.

Теорема 2.2. *Мультиоператор G является $\mathscr{V}$-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset E$ — ограниченное множество такое, что

$$\mathscr{V}(G(\Omega)) \ge \mathscr{V}(\Omega). \tag{3}$$

Покажем, что Ω относительно компактно. Выражение (3) влечет, что для каждого $i = 1,\dots,n$

$$\nu_i(G_i(\Omega_i)) \ge \nu_i(\Omega_i). \tag{4}$$

Пусть $\nu_i(G_i(\Omega_i))$ достигается на последовательности $\{z_m\} \subset G_i(\Omega_i)$, т. е.

$$\nu_i(G_i(\Omega_i)) = \big(\gamma_i(\{z_m\}), \operatorname{mod}_C^i(\{z_m\})\big),$$

где $z_m = x_i^* + S_i(\xi_m)$, $\xi_m \in \mathscr{P}_{F_i}(v_m)$, $\{v_m\} \subset \Omega_i$.

Из неравенства (4) вытекает, что

$$\gamma_i(\{z_m\}) \geq \gamma_i(\{v_m\}). \tag{5}$$

Условие $(F4_i)$ влечет оценку

$$\chi_{E_i}(\{\xi_n(s)\}) \leq \mu_i(s) \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\big\{v_n^{(j)}(s)\big\}\big)$$
$$= \mu_i(s) e^{L_i s} e^{-L_i s} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\big\{v_n^{(j)}(s)\big\}\big) = e^{L_i s} \mu_i(s) \gamma_i(\{v_n\}).$$

Используя лемму 2.4, получаем, что

$$\chi_{E_i}\big(\big\{S_i^j(\xi_m(t))\big\}\big) \leq 2C_{ij} \left(\int_0^t e^{p_i L_i s} \mu_i^{p_i}(s)\, ds \right)^{1/p_i} \gamma_i(\{v_n\}) \tag{6}$$

для всех $t \in [0,\tau]$ и $j = 0, 1, \ldots, N-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Замечая, что

$$S_i^j(\xi_m)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S_i(\xi_m)(t) = \frac{d^j}{dt^j} z_m(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t) = z_m^{(j)}(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t), \quad t \in [0,\tau],$$

и используя (6), имеем

$$e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\left(\left\{ z_m^{(j)}(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t) \right\} \right) = e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\big\{z_m^{(j)}(t)\big\}\big)$$
$$\leq e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\big\{S_i^j(\xi_m)(t)\big\}\big) \leq 2 \sum_{j=0}^{N-1} C_{ij} \left(\int_0^t e^{-L_i p_i (t-s)} \mu_i^{p_i}(s)\, ds \right)^{1/p_i} \gamma_i(\{v_m\}).$$

Учитывая (5), приходим к оценке

$$\gamma_i(\{v_m\}) \leq \gamma_i(\{z_m\}) = \sup_{t\in[0,\tau]} e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\big\{z_m^{(j)}(t)\big\}\big) \leq l \gamma_i(\{v_m\}).$$

Поэтому $\gamma_i(\{v_m\}) = 0$, а, в свою очередь, $\gamma_i(\{z_m\}) = 0$, и

$$\chi_{E_i}\big(\big\{v_m^{(j)}(t)\big\}\big) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ t \in [0,\tau].$$

Воспользовавшись свойствами $(F3_i)$, $(F4_i)$ снова, получаем, что $\{\xi_m\}$ — L^p-полукомпактная последовательность. Тогда по лемме 2.3 $\big\{S_i^j(\xi_m)\big\}$ относительно компактно в $C([0,\tau]; E_i)$ для всех $j = 0, 1, \ldots, N-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это влечет, что $\{z_m\}$ относительно компактно в $C^{N-1}([0,\tau]; E_i)$, поэтому $\mathrm{mod}_C^i(\{z_m\}) = 0$. Таким образом, $\nu_i(\{z_m\}) = \nu_i(\Omega_i) = (0,0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В силу произвольности выбора i получаем, что $\mathscr{V}(\Omega) = 0$ и поэтому множество Ω относительно компактно.

Перейдем к доказательству основных утверждений настоящей статьи. Вначале докажем локальную теорему существования решений задачи (1), (2).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* $(F1_i)$–$(F4_i)$. *Тогда существует* $\tau \in (0,T]$ *такое, что задача* (1), (2) *имеет интегральное решение в* $C([0,\tau];E)$.

Доказательство. Пусть $r_i > 0$ таковы, что $\|\Delta^N x_1(t),\dots,\Delta^N x_n(t)\|_{E^N} \le r_i$, и пусть $p_i' = \frac{p_i}{p_i-1}$ для $p_i > \frac{1}{q_i-N+1}$, $i=1,2,\dots,n$. Заметим, что $q_i - j - \frac{1}{p_i} > 0$ для каждого $j=0,1,\dots,N-1$. Возьмем $\tau_i \in (0,T]$ настолько малыми, что

$$\frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i}\left(\frac{1}{(q_i-j-1)p_i'+1}\right)^{1/p_i'}\tau_i^{q_i-j-1/p_i} \le \frac{r_i}{N}$$

для всех $j=0,1,\dots,N-1$.

Обозначим через $B_{r_i}(x_i^*)$ замкнутый шар в $C^{N-1}([0,\tau_i];E_i)$,

$$B_{r_i}(x_i^*) = \{x \in C^{N-1}([0,\tau_i];E_i) : \|x - x_i^*\| \le r_i\}.$$

Для $x \in C^{N-1}([0,\tau_i];E_i)$, $f \in \mathscr{P}_{F_i}(x)$ и $y \in G_i(x)$ имеем

$$\begin{aligned}\|y(t)-x_i^*(t)\|_{E_i} &\le \frac{1}{\Gamma(q_i)}\int\limits_0^t (t-s)^{q_i-1}\|f(s)\|_E\,ds \le \frac{1}{\Gamma(q_i)}\int\limits_0^t (t-s)^{q_i-1}w_{ri}(s)\,ds\\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_i)}\left(\int\limits_0^t (t-s)^{(q_i-1)p_i'}\,ds\right)^{1/p_i'}\left(\int\limits_0^t |w_{ri}(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i}\\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_i)}\left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i}\left(\frac{1}{(q_i-1)p_i'+1}\right)^{1/p_i'}\tau_i^{q_i-1/p_i} \le \frac{r_i}{N}\end{aligned}$$

для $t \in [0,\tau_i]$. Поскольку для всех $j=1,\dots,N-1$

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{d^j}{dt^j}y(t) - \frac{d^j}{dt^j}x_i^*(t)\right\|_{E_i} \le \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\int\limits_0^t (t-s)^{q_i-j-1}w_{ri}(s)\,ds\\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i}\left(\frac{1}{(q_i-j-1)p_i'+1}\right)^{1/p_i'}\tau_i^{q_i-j-1/p_i} \le \frac{r_i}{N},\end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sup_{t\in[0,\tau_i]}\left\|\frac{d^j}{dt^j}y(t) - \frac{d^j}{dt^j}x_i^*(t)\right\|_{E_i} \le r_i,$$

эквивалентная следующей:

$$\|y - x_i^*\|_{C^{N-1}([0,\tau_i];E_i)} \le r_i.$$

Поэтому G_i отображает $B_{r_i}(x_i^*)$ в себя.

Теперь пусть $r = \min_i r_i$ и $\tau = \min_i \tau_i$, для $i=1,2,\dots,n$. Тогда мультиоператор G преобразует в себя замкнутый шар $B_r(x^*)$ в пространстве $C^{N-1}([0,\tau];E)$. Поэтому для доказательства остается лишь сослаться на теорему 1.1.

Для доказательства глобальной теоремы о существовании решений потребуется условие $(F3_i)$ заменить более строгим

$(F3'_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$ существуют функции $\alpha_i(\cdot) \in L_+^{p_i}(0,T)$ такие, что

$$\|F_i(t,x)\|_{E_i} \le \alpha_i(t)(1 + \|x_i\|_{E_i^N}), \quad \text{для п.в. } t \in [0,T].$$

Также потребуется обобщенная лемма Беллмана — Гронуолла (см, например, [25]).

Лемма 2.6. *Пусть $u(\cdot), u_0(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — неубывающие интегрируемые функции на $[0,T]$, удовлетворяющие интегральному неравенству*

$$u(t) \le u_0(t) + \int_0^t v(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Тогда

$$u(t) \le u_0(t) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t v(\theta)d\theta\right) v(s)u_0(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Теорема 2.4. *При выполнении условий $(F1_i)$, $(F2_i)$, $(F3'_i)$, $(F4_i)$ множество решений задачи* (1), (2) *в $\mathscr{C}([0,T],E)$ непусто и компактно.*

Доказательство. Заметим, что если $x_i \in C^{N-1}([0,T];E_i)$, то

$$x_i - x_i^* \in \lambda(G_i(x) - x_i^*),$$

для $\lambda \in (0,1]$ и $i = 1,2,\dots,n$.

Используя свойство $(F3'_i)$, для $f \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i)$ и $j = 0,1,\dots,N-1$ имеем

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}x_i(t) - \frac{d^j}{dt^j}x_i^*(t)\right\|_{E_i} \le \frac{\lambda}{\Gamma(q_i-j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\|f(s)\|_{E_i}\,ds$$

$$\le \frac{\lambda}{\Gamma(q_i-j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(t)(1+\|\Delta^N x_i(t)\|_{E_i^N})\,ds.$$

Воспользовавшись последней оценкой, получаем

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}x_i(t)\right\|_{E_i} \le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)(1+\|\Delta^N x_i(s)\|_{E_i^N})\,ds$$

$$\le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)\,ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)\|x_i\|_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\,ds$$

$$\le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\left[\frac{1}{(q_i-j-1)p'_i+1}\right]^{1/p'_i} T^{q_i-j-\frac{1}{p_i}}$$

$$\times\left(\int_0^T |\alpha_i(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i} + \frac{1}{\Gamma(q_i-j)}\left[\frac{1}{(q_i-j-1)p'_i+1}\right]^{1/p'_i} T^{q_i-j-\frac{1}{p_i}}$$

$$\times \left(\int_0^T |\alpha_i(s)|^{p_i} \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\, ds \right)^{1/p_i}.$$

Положим

$$C_j = \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \left[\frac{1}{(q_i - j - 1)p_i' + 1} \right]^{1/p_i'} T^{q_i - j - \frac{1}{p_i}},$$

$$C = \max\{C_j,\ j = 0, 1, \ldots, N-1\},$$

$$g_0 = N \|X_{0i}\|_{E_i^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T^k}{k!} + NC \left(\int_0^T \|\alpha_i(s)\|^{p_i}\, ds \right)^{1/p_i},$$

$$h(s) = [NC]^{1/p_i} \alpha_i(s), \quad s \in [0, T].$$

Тогда

$$\|x_i\|_{C^{N-1}([0,t];E_i)} \le g_0 + \left(\int_0^t |h(s)|^{p_i} \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\, ds \right)^{1/p_i}.$$

Пусть $u(t) = \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,t];E_i)}$. Последнее неравенство перепишется в виде

$$u(t) \le 2^{p_i} g_0^{p_i} + 2^{p_i} \int_0^t |h(s)|^{p_i} u(s)\, ds$$

для всех $t \in [0, T]$. В соответствии с леммой 2.6 получаем оценку

$$u(t) = \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,t];E_i)} \le 2^{p_i} g_0^{p_i} \left(1 + \int_0^T \exp\left\{ 2^{p_i} \int_s^T |h(\theta)|^{p_i}\, d\theta \right\} |h(s)|^{p_i}\, ds \right),$$

для всех $t \in [0, T]$. Последнее неравенство гарантирует, что

$$\|x_i\|_{C^{N-1}([0,T];E_i)} \le R_{0i},$$

где

$$R_{0i} = 2g_0 \sqrt[p_i]{1 + \int_0^T \exp\left\{ 2^{p_i} \int_s^T |h(\theta)|^{p_i}\, d\theta \right\} |h(s)|^{p_i}\, ds}.$$

Теперь возьмем $R = \max_i R_{0i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = x^*$, $\mathscr{F} = G$ и применим теорему 1.2 к множеству

$$\overline{\mathscr{U}} = \{v \in C^{N-1}([0, T]; E),\ \|v\|_{C^{N-1}([0,T];E)} \le R\}.$$

Тогда получаем, что $FixG$ непусто и компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховых пространствах. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Deimling K.* Multivalued differential equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications).
3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications).
4. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies; Elsevier Science B.V., 2006.
5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999.
6. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. London; New York: Springer, 2010.
7. *Zhou Y.* Fractional evolution equations and inclusions: analysis and control. London: Elsevier Acad. Press, 2016.
8. *Obukhovskii V., Gel'man B.* Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Hackensack, NJ: World Sci., 2020.
9. *Agarwal R., Ahmad B.* Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1200–1214.
10. *Appell J., Lopez B., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives // J. Nonlinear Var. Anal. 2018. V. 2. P. 25–33.
11. *Belmekki M., Nieto J. J., Rodriguez-Lopez R.* Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation // Boundary Value Problems. 2009. V. 11. P. 1–18.
12. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. P. 1424–1446.
13. *Gomoyunov M. I.* Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus Appl. Anal. 2018. V. 21. P. 1238–1261.
14. *Gomoyunov M. I.* Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progress in Fractional. Differentiation and Applications. 2019. V. 5. P. 143–155.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. V. 18, N 1. P. 269–292.
16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Appl. Anal. 2018. V. 97, N 4. P. 571–591.
17. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On a periodic boundary value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space // Mathematics. 2019. V. 7, N 12. P. 5–19.
18. *Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F.* Existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space // J. Nonlinear Var. Anal. 2021. V. 5, N 1. P. 155–177.
19. *Kamenskii M., Petrosyan G., Raynaud de Fitte R., Yao J.-C.* On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces // Mathematics. 2022. V. 10, N 2. P. 219–231.
20. *Ke T. D., Obukhovskii V. V., Wong N.-C., Yao J.-C.* On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Appl. Anal. 2013. V. 92, N 1. P. 115–137.
21. *Petrosyan G.* Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // The Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics. 2020. V. 34. P. 51–66.
22. *Zhang Z., Liu B.* Existence of mild solutions for fractional evolution equations // Fixed point theory. 2014. V. 15. P. 325–334.
23. *Zhou Y., Jiao F.* Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1063–1077.
24. *Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W.* Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ // Proc. Am. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 447–453.
25. *Qin Y.* Nonlinear parabolic-hyperbolic coupled systems and their attractors. Operator theory:

advances and applications. Basel: Birkhauser-Verl., 2008.

Поступила в редакцию 5 февраля 2025 г.
После доработки 5 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Обуховский Валерий Владимирович
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
valerio-ob2000@mail.ru

Каменский Михаил Игоревич
Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
t1776477642@126.com

Петросян Гарик Гагикович
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
borodich@gsu.by

Ульвачева Татьяна Александровна
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
sfkamornikov@mail.ru

Шенда Цзен
Национальный центр прикладной математики в Чунцине;
Школа математических наук, Чунцинский педагогический университет,
Чунцин 401331, Китай