

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ НУМЕРОВАННЫХ ГРУПП

Н. Х. Касымов

Аннотация. Установлено, что ядро представления любой нумерованной группы является перестановочно вычислимой эквивалентностью. Доказано существование перестановочно вычислимой эквивалентности, над которой не определима никакая группа.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.207

Ключевые слова: нумерованная группа, определимость группы над эквивалентностью, перестановочно вычисляемая эквивалентность.

1. Введение

Следуя Ю. Л. Ершову [1, с. 297], дадим определение нумерованной универсальной алгебры эффективной сигнатуры $\sigma = \langle =, f_0^{m_0}, f_1^{m_1}, \dots \rangle$, где m_i — число аргументов функции, в которую интерпретируется функциональный символ $f_i^{m_i}$ и отображение $h : n \mapsto m_n$ вычислимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Нумерацией* алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; g_0, g_1, \dots \rangle$ сигнатуры σ называется всякое отображение $\nu : \omega \rightarrow A$ множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого выполнено следующее условие: существует двухместная вычисляемая функция G такая, что для любого $n \in \omega$ и любых $y_1, \dots, y_{m_n}$ имеет место равенство $g_n(\nu y_1, \dots, \nu y_{m_n}) = \nu G(n, c^{m_n}(y_1, \dots, y_{m_n}))$, где c^{m_n} — канторовская функция нумерации всех последовательностей натуральных чисел длины m_n .

Другими словами, по ν -номерам элементов из A и номеру операции g_n можно эффективно найти некоторый ν -номер результата применения этой операции к данным элементам.

Если $\nu : \omega \rightarrow A$ — нумерация алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется *нумерованной алгеброй*.

Отметим, что всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию [1].

Под *представлением* будем понимать нумерацию. *Ядром представления* ν нумерованной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ будем называть эквивалентность $\{ \langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y \}$. Если ν — представление, то его ядро будем обозначать через $\ker(\nu)$.

Для фиксированной системы классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними (см.

Автор поддержан в рамках Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2024-1438).

работу [2] С. С. Гончарова и Ю. Л. Ершова), в частности, проблема существования хороших представлений (в первую очередь конструктивных) и их числа (в том числе единственности с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, в рамках парадигмы двойственности можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений систем в целом ряде задач, в том числе в теоретической информатике (см. статью [3] и обзор [4]).

Изучению алгоритмических свойств эквивалентностей на множестве натуральных чисел в настоящее время уделяется большое внимание. Здесь можно отметить работы Эндрюса, Сорби, Бернарди, Сан Мауро, Лемппа, Нг, С. А. Бадаева, Н. А. Баженова, Б. С. Калмурзаева и др. Библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [5, 6]. Богатая библиография в рамках вышеупомянутой парадигмы есть у С. С. Гончарова и Ю. Л. Ершова в [2]. Тесно примыкают к этой проблематике вопросы строения алгебр, определенных над эквивалентностями.

Если η — эквивалентность на множестве натуральных чисел ω , то универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *определимой над η* (или η -алгеброй), если существует ее нумерация ν с ядром, равным η (т. е. $\eta = \{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$). Другими словами, алгебра $\mathfrak{A}$ определима над эквивалентностью η , если существует такое семейство (не обязательно эффективное) F вычислимых функций, согласованных с η , т. е. для каждой

$$f \in F : \forall \bar{x}, \bar{y} [\bar{x} = \bar{y} \pmod{\eta} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \pmod{\eta}]$$

такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; F \rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ по конгруэнции η . При этом естественный проектирующий гомоморфизм $\nu(x) = x/\eta$ и является нумерацией из вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ на $\mathfrak{A}$. Уместно отметить, что роль и место вычислимых алгебр в теории нумерованных алгебр подобны роли и месту абсолютно свободных алгебр подходящего ранга в теории универсальных алгебр, так как и в том, и в другом случае существует гомоморфизм из подходящей вычислимой (некоторой свободной) алгебры на $\mathfrak{A}$. При таком подходе свойство универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ быть η -алгеброй равносильно существованию такого семейства (не обязательно вычислимого) F вычислимых функций, что $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; F \rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ по конгруэнции η .

Слово *эквивалентность* означает отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел ω . Если η — эквивалентность, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым, если α является объединением подходящих η -классов (т. е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$).

Если η — эквивалентность на ω , то семейство η -замкнутых вычислимых (вычислимо перечислимых) множеств задает базу вычислимой (перечислимой) топологии $\tau(\eta)_C$ (соответственно $\tau(\eta)_{CE}$) на фактор-множестве ω/η .

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для любых $x \neq y \pmod{\eta}$ существует вычислимо η -замкнутое множество, содержащее x и не содержащее y (существует такое вычислимо перечислимое η -замкнутое множество α , что $x \in \alpha \wedge y \notin \alpha$ либо $y \in \alpha \wedge x \notin \alpha$).

Пусть (N, ν) — нумерованное множество. Подмножество N_0 множества N называется ν -вычислимым (ν -перечислимым, ν -коперечислимым), если вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо) множество $\nu^{-1}N_0$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация множества имеется в виду, то его подмноже-

ства будем называть просто *вычислимыми* (*перечислимыми*, *коперечислимыми*) без приставки ν .

Нумерация называется *вычислимо отделимой* (*отделимой*), если вычислимо отделимо (отделимо) ее ядро. Нумерация ν называется *эффективно отделимой*, если таково ее ядро $\ker(\nu)$, т. е. существует такое вычислимое семейство $\mathfrak{S}$ вычислимо перечисливых $\ker(\nu)$ -замкнутых множеств, что для любых $x, y \in \omega$ если $\nu x \neq \nu y$, то найдется $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $\nu x \in \nu S \wedge \nu y \notin \nu S$ либо $\nu y \in \nu S \wedge \nu x \notin \nu S$ [7]. Такие семейства будем называть *полными*.

Таким образом, если отделимость обеспечивает T_0 -отделимость пространства, порожденного ν -перечислимыми подмножествами, то эффективная отделимость гарантирует наличие вычислимой нумерации для подходящего полного отделяющего семейства.

2. Нумерованные группы и перестановочно вычислимые эквивалентности

Исходя из вышесказанного, если η — эквивалентность на ω , то группа G называется *определимой над η* (или η -группой), если существует вычислимая универсальная алгебра $\langle \omega; *, []^{-1} \rangle$ (в сигнатуре с одной бинарной $*$ и одной унарной $[]^{-1}$ функциями) с вычислимыми операциями $*$, $[]^{-1}$, для которых η является конгруэнцией (т. е. $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 * x_1 = y_0 * y_1 \pmod{\eta}$ и $x = y \pmod{\eta} \Rightarrow [x]^{-1} = [y]^{-1} \pmod{\eta}$) такая, что группа G изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; *, []^{-1} \rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; *, []^{-1} \rangle$ по конгруэнции η .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Эквивалентность η называется *перестановочно вычислимой*, если существует вычислимое семейство F вычислимых функций, согласованных с η (т. е. $\forall f \in F [\bar{x} = \bar{y} \pmod{\eta} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \pmod{\eta}]$), индуцирующих такие перестановки фактор-множества ω/η , что для любой пары натуральных чисел x, y найдется функция из F , которая m -сводит класс x/η к классу y/η .

Тривиальными примерами перестановочно вычислимых эквивалентностей являются вычислимые эквивалентности, над которыми, очевидно, определимы вычислимо представимые группы.

Будем использовать стандартные λ -обозначения Черча вида $f = \lambda x.[\dots x \dots]$, где x — аргумент функции f .

Теорема 2.1. Ядро любой нумерации всякой группы — перестановочно вычислимая эквивалентность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, ν) — нумерованная группа. Тогда почти очевидно, что ядро $\ker(\nu)$ нумерации ν — перестановочно вычислимая эквивалентность. В самом деле, для произвольных $x, a, b \in \omega$ имеем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} x \in a/\eta &\Leftrightarrow \nu x = \nu a \Leftrightarrow \nu x(\nu a)^{-1}\nu b = \nu a(\nu a)^{-1}\nu b \\ &\Leftrightarrow \nu(x * ([a]^{-1} * b)) = \nu b \Leftrightarrow x * ([a]^{-1} * b) \in b/\eta, \end{aligned}$$

откуда следует, что вычислимая функция $\lambda x.[x * ([a]^{-1} * b)]$ m -сводит a/η к b/η .

Очевидно, что семейство всех таких функций имеет вычислимую нумерацию, и каждая такая функция задает на элементах группы G перестановку $\nu x \mapsto \nu x((\nu a)^{-1}\nu b)$. $\square$

Сделаем три замечания по поводу почти тривиального доказательства теоремы 2.1:

Во-первых, в предъявленном доказательстве мы неявно пользовались теоремой Кэли о вложимости группы в симметрическую группу перестановок на ней. В самом деле, элементу a группы G сопоставляется перестановка $\pi_a = \lambda x.[xa]$ на G и изоморфность этого соответствия очевидна, так как $\pi_{ab}(x) = \pi_b(\pi_a(x))$.

Во-вторых, естественная нумерация $\mu : \omega \rightarrow F$, где $F = \{\lambda x.[xa] \mid a \in G\}$ и $\mu(a) = \lambda x.[xa]$, есть вычислимая нумерация семейства F , ядро которой совпадает с $\ker(\nu)$, так как $\mu u = \mu v \Leftrightarrow \nu u = \nu v$. Таким образом, теорема 2.1 подтверждает эффективную природу теоремы Кэли.

Наконец, в-третьих, отметим, что m -сводящий алгоритм в доказательстве теоремы 2.1 находится эффективно равномерно по a и b .

3. Постановка вопроса и его решение

В связи с теоремой 2.1 возник естественный вопрос о возможности ее обращения: *над всякой ли перестановочно вычислимой эквивалентностью определима некоторая группа?*

Иными словами, всякая ли перестановочно вычислимая эквивалентность является ядром нумерации подходящей нумерованной группы?

В работе [8] утверждалось, что существует контрпример. Однако в доказательстве имеется существенный пробел, заключающийся в том, что ключевым его моментом является апелляция к непрерывности вычислимых функций относительно эффективно порожденных топологий. В настоящий момент вопрос о непрерывности открыт. Тем не менее факт существования перестановочно вычислимой эквивалентности, над которой не определима никакая группа, оказался верным, доказательству чего и посвящена настоящая статья.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество называется *вычислимо прошиваемым*, если существует вычислимая перестановка без конечных циклов с бесконечным числом орбит, в каждой из которых содержится ровно один элемент этого множества.

Если множество α содержит в точности по одному элементу в каждой орбите вычислимой перестановки p без конечных циклов с бесконечным числом орбит, то будем говорить, что p *прошивает* α (или, что α *прошивается* p). Для множества α , прошиваемого вычислимой перестановкой p , через $\eta_{\alpha,p}$ обозначим эквивалентность

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} (p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha),$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $p^0(x) = x$, которая, очевидно, является перестановочно вычислимой эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.

Эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ будем называть *вычислимо прошиваемой, порожденной множеством α и перестановкой p* . Заметим, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ эквивалентность $\eta_{\alpha_n,p}$ совпадает с $\eta_{\alpha,p}$, где $\alpha_n = p^n(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее в целях сокращения вместо «вычислимо прошивается» иногда будем говорить «прошивается», а говоря о перестановках на ω будем подразумевать вычислимые перестановки.

Предложение 3.1. *Если вычислимо перечислимое множество α прошивается перестановкой p , то эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} (p^m(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha \wedge m = n).$$

Ясно также, что

$$x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} (p^m(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha \wedge m \neq n). \quad \square$$

Таким образом, если хотя бы один класс прошиваемой эквивалентности вычислимо перечислим (в частности, если прошиваемая эквивалентность позитивна), то и все классы таковы же, а сама эквивалентность разрешима и над ней тривиально определима любая вычислимо представимая бесконечная группа.

Назовем эквивалентность *локально негативной*, если хотя бы один смежный класс этой эквивалентности коперечислим.

Предложение 3.2. *Всякая нумерация группы с локально негативным ядром является негативной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, ν) — локально негативная группа, $*$ — вычислимая функция, представляющая групповую операцию группы G в нумерации ν и $[\]^{-1}$ — вычислимая операция, поддерживающая операцию взятия обратного элемента.

Допустим, что множество $\nu^{-1}a$ коперечисливо и $\nu a_0 = a$. Тогда для произвольных $x, y \in \omega$ имеем

$$\begin{aligned} \nu x = \nu y &\Leftrightarrow a = \nu x(\nu x)^{-1}a = \nu y(\nu x)^{-1}a \\ &\Leftrightarrow a = \nu((y * [x]^{-1}) * a_0) \Leftrightarrow (y * [x]^{-1}) * a_0 \in \nu^{-1}a, \end{aligned}$$

откуда следует негативность ν . $\square$

В работе [9] доказано следующее

Предложение 3.3. *Существуют вычислимо прошиваемое множество α и прошивающая его вычислимая перестановка p такие, что*

- (1) *каждый $\eta_{\alpha,p}$ -класс коперечислим, но эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ не является негативной;*
- (2) *всякая пара непустых вычислимо перечислимых $\eta_{\alpha,p}$ -замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Назовем эквивалентность η *хаусдорфовой* (T_1 -отделимой), если топологическое пространство $(\omega/\eta; \tau)_{CE}$ является T_2 -отделимым (T_1 -отделимым).

Теорема 3.4. *Существует эффективно отделимая перестановочно вычислимая нехаусдорфова T_1 -отделимая эквивалентность, над которой не определима никакая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\eta_{\alpha,p}$ из предложения 3.3. Свойство 1 из предложения 3.3 обеспечивает не-негативность этой эквивалентности. T_1 -отделимость следует из того, что каждый $\eta_{\alpha,p}$ -класс коперечислим. Нехаусдорфовость вытекает из свойства 2 предложения 3.3.

Допустим, что существует $\eta_{\alpha,p}$ -группа. Тогда в силу локальной негативности эквивалентности $\eta_{\alpha,p}$ согласно предложению 3.2 эта эквивалентность должна быть негативной; противоречие.

Покажем, что эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ эффективно отделима. Положим $\alpha_0 = \omega \setminus \alpha$ и $\alpha_n = p^n(\alpha_0)$. Тогда семейство $\mathfrak{S} = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — полное T_1 -отделяющее семейство вычислимо перечислимых $\eta_{\alpha,p}$ -замкнутых множеств. В самом деле, пусть $x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,p}}$ и $p^m(x) \in \alpha$, $p^n(y) \in \alpha$. По условию $m \neq n$. Множество α_m , являющееся вычислимо перечислимым и $\eta_{\alpha,p}$ -замкнутым, не содержит x и содержит y , поэтому оно является вычислимо перечислимой окрестностью элемента $y/\eta_{\alpha,p}$, отделяющей этот элемент от $x/\eta_{\alpha,p}$. Симметрично $y \notin \alpha_n \wedge x \in \alpha_n$

и α_n — вычислимо перечислимая окрестность элемента $x/\eta_{\alpha,p}$, отделяющая его от $y/\eta_{\alpha,p}$. Следовательно, эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ является не просто T_1 -отделимой, но и обладает вычислимым семейством $\mathfrak{S} = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ отделяющих множеств. Теперь построим следующую нумерацию $\mu : \omega \rightarrow \mathfrak{S}$ семейства $\mathfrak{S}$. Определим $\mu(0) = \alpha_0$ и $\mu(2k) = \alpha_k$, $\mu(2k+1) = \alpha_{-k-1}$ для всех $k \in \omega$. Тогда μ — вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$, причем нумерация однозначная (фридбергова). $\square$

Подчеркнем, что эффективная отделимость эквивалентности означает, что она лежит в классе Π_2^0 арифметической иерархии, хотя не имеет в ней четкой «координатизации», так как существуют как эффективно отделимые эквивалентности вне класса Δ_2^0 , так и Δ_2^0 -эквивалентности, не являющиеся эффективно отделимыми, однако как Σ_1^0 -эквивалентности, так и Π_1^0 -эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых эквивалентностей [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. Касымов Н. Х. Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 5. С. 85–102.
4. Kasymov N. Kh., Dadazhanov R. N., Ibragimov F. N. Separable algorithmic representations of classical systems and their applications // J. Math. Sci. 2024. V. 278, N 3. P. 476–519.
5. Andrews U., Lempp S., Miller J., Ng K., San Mauro L., Sorbi A. Universal computably enumerable equivalence relations // J. Symbol. Logic. 2014. V. 79, N 1. P. 60–88.
6. Andrews U., Belin D. F., San Mauro L. On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers // J. Symbol. Logic. 2022. V. 88, N 3. P. 1038–1063.
7. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
8. Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н., Джавлиев С. К. Uniform m -equivalences and numberings of classical systems // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 400–424.
9. Касымов Н. Х., Морозов А. С., Ходжамуратова И. А. О T_1 -отделимых нумерациях подпрямых неразложимых алгебр // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 4. С. 37–57.

Поступила в редакцию 15 августа 2024 г.

После доработки 28 января 2025 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Касымов Надимулла Хабибуллаевич (ORCID 0000-0003-4940-0649)
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Республика Узбекистан
nadim59@mail.ru