Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НОРМАЛЬНЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, Б. Ченг, Р. В. Бородич, С. Ф. Каморников

Аннотация. Предлагаются бесконечные серии подгрупповых m-функторов и регулярных подгрупповых m-функторов θ, обладающих тем свойством, что θ-подгруппа Фраттини каждой нормальной холловой подгруппы H любой конечной группы G равна пересечению H с θ-подгруппой Фраттини группы G.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.206

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, подгрупповой m-функтор, θ-подгруппа Фраттини.

Введение

Пусть θ — отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [1], назовем отображение θ *подгрупповым функтором*, если $(\theta(G))^{\phi} = \theta(G^{\phi})$ для любого изоморфизма ϕ каждой конечной группы G.

Первоначально понятие подгруппового функтора использовалось в основном для обобщения определенных теоретико-групповых объектов, в частности, $\mathfrak{X}$-проекторов и $\mathfrak{X}$-инъекторов (см., например, [1]). Позже было замечено, что специальные подгрупповые функторы — удобный и достаточно эффективный аппарат исследования свойств групп и их классов. В частности, в [2] метод регулярных подгрупповых функторов применен для изучения свойств локальных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, выделяемых подгрупповыми функторами. В [3–5] идея наследственного и транзитивного подгруппового функтора позволила открыть новые решетки подгрупп.

В [6] получил развитие функциональный подход, обосновывающий необходимость рассмотрения с позиции классов задачи о пересечениях максимальных подгрупп конечных групп. В основу этого подхода положены понятия m-функтора и обобщенной подгруппы Фраттини.

Подгрупповой функтор θ называется *m-функтором*, если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит группу G и некоторые ее максимальные подгруппы.

Подгруппа $\Phi_\theta(G)$, равная пересечению всех подгрупп из $\theta(G)$, называется *подгруппой фраттиниева типа, индуцированной m-функтором* θ, или, короче,

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 12371021). Исследования третьего и четвертого авторов выполнены при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211749).

θ-подгруппой Фраттини группы G. Отметим, что если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы из G, то $\Phi_\theta(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G. Так как множество всех максимальных θ-подгрупп группы G автоморфно допустимо, $\Phi_\theta(G)$ — характеристическая подгруппа группы G.

Особое место занимают регулярные m-функторы, возникшие на основе аксиоматизации свойства инвариантности некоторых m-функторов при всех гомоморфизмах групп. Подгрупповой m-функтор θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ следует $MN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

В данной работе с использованием подгрупповых m-функторов исследуется связь между подгруппами фраттиниева типа группы G и ее нормальных холловых подгрупп.

Бэр в [7] указал на следующее замечательное свойство силовских подгрупп конечной группы: *если P — нормальная силовская подгруппа группы G, то* $\Phi(P) = P \cap \Phi(G)$. В работе [8] этот результат получил существенное развитие.

Теорема 1 [8]. *Если H — нормальная холлова подгруппа конечной группы G, то*

$$\Phi(H) = H \cap \Phi(G).$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит классический результат Гашюца из [9] о существовании в группе G дополнения к нормальной абелевой p-подгруппе, дополняемой в некоторой силовской p-подгруппе из G.

Будем говорить, что *подгрупповой m-функтор θ обладает* Hall Φ*-свойством*, если равенство $\Phi_\theta(H) = H \cap \Phi_\theta(G)$ выполняется для любой нормальной холловой подгруппы H каждой группы G.

В 2007 г. Л. А. Шеметковым отмечены следующие две задачи, открывающие новые свойства холловых подгрупп:

1. *Найти все подгрупповые m-функторы, обладающие* Hall Φ*-свойством.*

2. *Найти все регулярные подгрупповые m-функторы, которые обладают* Hall Φ*-свойством.*

В качестве дополнительного обоснования, инициирующего рассмотрение отмеченных задач, выступает тот факт, что необходимость исследования связи подгрупп фраттиниева типа группы и ее нормальных холловых подгрупп возникает при изучении свойств $\mathfrak{F}$-критических групп и конструировании ее обобщенно префраттиниевых подгрупп (см., например, работы [10, 11]).

В данной работе строятся бесконечные серии регулярных и нерегулярных m-функторов, обладающих Hall Φ-свойством. Отметим, что многие известные подгрупповые m-функторы не являются Hall Φ-функторами.

Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп (включая абелевы простые группы). Следуя [1], для подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{I}$ через $E\mathfrak{X}$ обозначим класс тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что $E\mathfrak{X}$ — формация Фиттинга.

Из определения класса Фиттинга следует, что для любого класса $\mathfrak{X}$ простых групп в каждой группе G существует наибольшая нормальная $E\mathfrak{X}$-подгруппа, равная произведению всех ее нормальных $E\mathfrak{X}$-подгрупп. Эта подгруппа обозначается $G_{E\mathfrak{X}}$ и называется *$E\mathfrak{X}$-радикалом* группы G.

Пусть далее $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G все ее максимальные подгруппы, содержащие $E\mathfrak{X}$-радикал $G_{E\mathfrak{X}}$, а $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$ — подгруппа фраттиниева типа группы G, индуцированная m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Следующая теорема устанавливает, что подгрупповой m-функтор $\theta_{E\mathfrak{X}}$ обладает Hall Φ-свойством.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. Если H — нормальная холлова подгруппа группы G, то $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.*

Если $\mathfrak{X}$ — пустой класс, то $E\mathfrak{X}$ — класс единичных групп, а значит, в этом случае $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Таким образом, теорема 2 включает отмеченные выше результаты работ [7, 8].

Если π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{X}$ — класс всех простых π-групп, то $E\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп и $G_{E\mathfrak{X}} = O_\pi(G)$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел и θ_π — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π. Этот подгрупповой m-функтор является регулярным. Следуя [1], подгруппу фраттиниева типа группы G, индуцированную m-функтором θ_π, будем обозначать через $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p, θ-подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [12] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Отметим, что в общем случае m-функторы $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π различны. В отличие от m-функтора $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ m-функтор θ_π является регулярным. В то же время для ряда множеств π подгруппы фраттиниева типа, индуцированные m-функторами $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π, в любой конечной группе совпадают (это имеет место, например, если множество π одноэлементно). Поэтому из теоремы 2 следует, что существует бесконечное множество регулярных подгрупповых m-функторов, которые обладают Hall Φ-свойством.

1. Основные определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1]. Информацию, касающуюся теории решеток, можно найти в [13].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π.

Подгруппа H называется *π-холловой подгруппой* группы G, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π-холловых подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$.

Далее

— $\mathscr{M}$ — множество всех подгрупповых m-функторов;

— $\mathscr{M}_{reg}$ — множество всех регулярных подгрупповых m- функторов;

— $(\mathfrak{X})$ — наименьший класс групп, содержащий все группы из множества $\mathfrak{X}$, в частности, (G) — наименьший класс групп, содержащий группу G.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $N \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, *то* $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N$;
(2) $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Доказательство. (1) Так как класс $E\mathfrak{X}$ замкнут относительно расширений и $N \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, то $(G/N)_{E\mathfrak{X}} = G_{E\mathfrak{X}}/N$. Отсюда следует, что максимальная подгруппа M/N группы G/N содержит $E\mathfrak{X}$-радикал $(G/N)_{E\mathfrak{X}}$ группы G/N тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G содержит $E\mathfrak{X}$-радикал $G_{E\mathfrak{X}}$ группы G. Следовательно, справедливо равенство $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N$.

(2) Так как класс $E\mathfrak{X}$ замкнут относительно расширений, справедливо равенство $(G/G_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}} = 1$. Поэтому каждая максимальная подгруппа группы $G/G_{E\mathfrak{X}}$ содержит ее $E\mathfrak{X}$-радикал. Отсюда и из определения подгруппы фраттиниева типа, индуцированной m- функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$, следует, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— некоторый класс простых групп. Тогда для любой группы* G *и каждой ее нормальной подгруппы* N *выполняется включение* $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Тогда в G найдется нормальная подгруппа N такая, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N)$ не содержится в $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $N_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/N_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы имеем $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N/N_{E\mathfrak{X}}) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N_{E\mathfrak{X}})$. Так как $N_{E\mathfrak{X}} \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, отсюда в силу утверждения (1) леммы 1 $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N)/N_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N_{E\mathfrak{X}}$, а значит, $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Пришли к противоречию.

Случай 2. $N_{E\mathfrak{X}} = 1$. В силу утверждения (2) леммы 1 заключаем, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) = \Phi(N)$. Так как по теореме A.9.2 из [14] $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$, отсюда $\Phi(N)G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}$. Снова применяя теорему A.9.2 из [14], получаем, что $\Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$, а значит, в силу утверждения (2) леммы 1

$$\Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Таким образом, $\Phi(N)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}$. Отсюда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Снова пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— некоторый класс простых групп. Тогда для любой группы* G *и каждой ее нормальной подгруппы* N *выполняется равенство* $N \cap G_{E\mathfrak{X}} = N_{E\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Так как класс $E\mathfrak{X}$ является классом Фиттинга, в силу леммы II.2.9 из [14] имеем $N \cap G_{E\mathfrak{X}} = N_{E\mathfrak{X}}$.

Лемма доказана.

Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой и $\Phi(G) = 1$. В этом случае минимальная нормальная подгруппа группы G называется ее *монолитом*.

Лемма 4. *Пусть S и R — не изоморфные простые группы. Если H — монолитическая группа с монолитом, принадлежащим классу $E(S)$, то существует монолитическая группа G с монолитом N такая, что $G/N \cong H$ и $N \in E(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть R — группа порядка p. Так как группа H монолитическая и группы S и R неизоморфны, то $O_p(H) = 1$. Тогда по теореме B.10.3 из [14] существует точный неприводимый H-модуль N над полем F_p. Рассмотрим группу $G = [N]H$. Ясно, что $\Phi(G) = 1$, группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N = [N]H/N \cong H$.

Случай 2. Пусть R — простая неабелева группа. Рассмотрим регулярное сплетение $G = R \wr H = [N]H$ групп R и H, где N — база сплетения. Так как R — простая неабелева группа, из свойств регулярного сплетения следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, а значит, $\Phi(G) = 1$. Очевидно, $G/N \cong H$ и $N \in E(R)$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна, и H — нормальная σ-холлова подгруппа группы G для некоторого множества σ простых чисел из $\pi(G)$. Предположим, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \neq H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.

Так как подгруппа H нормальна в G, ввиду леммы 2 выполняется включение $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $H_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/H_{E\mathfrak{X}}$ и ее нормальную σ-холлову подгруппу $H/H_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы G из $|G/H_{E\mathfrak{X}}| < |G|$ имеем

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(H/H_{E\mathfrak{X}}) = H/H_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/H_{E\mathfrak{X}}).$$

Отсюда в силу утверждения (1) леммы 1 заключаем, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Получаем противоречие с выбором группы G и ее нормальной σ-холловой подгруппы H.

Случай 2. Пусть $H_{E\mathfrak{X}} = 1$. Тогда в силу леммы 3 имеем равенство $H \cap G_{E\mathfrak{X}} = 1$. Так как H — нормальная σ-холлова подгруппа группы G, то $G_{E\mathfrak{X}}$ — нормальная σ'-холлова подгруппа группы $HG_{E\mathfrak{X}}$. Таким образом, справедливо равенство $HG_{E\mathfrak{X}} = H \times G_{E\mathfrak{X}}$.

Если $G_{E\mathfrak{X}} = 1$, то ввиду утверждения (2) леммы 1 справедливы равенства $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = \Phi(H)$ и $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Ввиду теоремы 1 отсюда имеем $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$, что противоречит выбору группы G и ее нормальной σ-холловой подгруппы H.

Таким образом, $G_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/G_{E\mathfrak{X}}$ и ее нормальную σ-холлову подгруппу $HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы G из $|G/G_{E\mathfrak{X}}| < |G|$ имеем

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}) = HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/G_{E\mathfrak{X}}).$$

Так как $H_{E\mathfrak{X}} = 1$, то $(HG_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}} = G_{E\mathfrak{X}}$. Отсюда ввиду утверждения (1) леммы 1 справедливо равенство

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}})/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Если M — максимальная подгруппа группы $HG_{E\mathfrak{X}}$ и содержит ее $E\mathfrak{X}$-радикал $(HG_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}}$, то $M = (M \cap H) \times G_{E\mathfrak{X}}$ и $M \cap H$ — максимальная подгруппа группы H. Так как $H_{E\mathfrak{X}} = 1$, то $M \cap H$ содержит $E\mathfrak{X}$-радикал группы H. Верно и обратное: если S — максимальная подгруппа группы H, то $SG_{E\mathfrak{X}}$ — максимальная подгруппа из $HG_{E\mathfrak{X}}$, содержащая $E\mathfrak{X}$-радикал подгруппы $HG_{E\mathfrak{X}}$. Поэтому

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \times G_{E\mathfrak{X}}.$$

Ввиду утверждения (1) леммы 1 имеем

$$HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/G_{E\mathfrak{X}}) = HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Кроме того, в силу тождества Дедекинда

$$HG_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = (H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G))G_{E\mathfrak{X}}.$$

Таким образом, $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \times G_{E\mathfrak{X}} = (H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G))G_{E\mathfrak{X}}$. Так как группа $HG_{E\mathfrak{X}}$ является прямым произведением своих холловых подгрупп H и $G_{E\mathfrak{X}}$, отсюда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Снова пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что группа G обладает свойством C_π, если в группе существует по крайней мере одна π-холлова подгруппа и любые две такие подгруппы сопряжены. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех простых π-групп, то с учетом леммы 2.3.1 из [6] имеем

Следствие 1. *Если H — нормальная холлова подгруппа C_π-группы G, то $\Phi_\pi(H) = H \cap \Phi_\pi(G)$.*

Следствие 2. *Если R — нормальная силовская подгруппа группы G, то $\Phi_p(H) = H \cap \Phi_p(G)$ для любого простого числа p.*

Замечание 1. В общем случае подгрупповой m-функтор $\theta_{E\mathfrak{X}}$ не является регулярным. Пусть, например, $\mathfrak{X} = (Z_3)$, где Z_3 — циклическая группа порядка 3, и G — симметрическая группа степени 4. Так как $O_3(G) = 1$, любая максимальная подгруппа из G входит в $\theta_{E\mathfrak{X}}(G)$. Пусть N — нормальная подгруппа из G, имеющая порядок 4, и M — такая максимальная подгруппа из G, что $|M| = 8$. Очевидно, $N \subseteq M$, но из $|O_3(G/N)| = 3$ следует, что M/N не принадлежит множеству $\theta_{E\mathfrak{X}}(G/N)$.

3. Классы $\Phi_{E\mathfrak{X}}$-эквивалентных подгрупповых m-функторов

Подгрупповые m-функторы θ_1 и θ_2 будем называть Φ-*эквивалентными*, если для любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta_1}(G) = \Phi_{\theta_2}(G)$ (в этом случае мы пишем $\theta_1 \equiv_\Phi \theta_2$).

Пример 1. Пусть p — некоторое простое число. Тогда ввиду леммы 2.3.1 из [6] и леммы 1 подгрупповые m-функторы $\theta_{\mathfrak{G}_p}$ и θ_p Φ-эквивалентны.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и H — простая неабелева группа, не принадлежащая классу $\mathfrak{X}$. Если M — максимальная подгруппа группы H, то положим, что $\theta_{\{H,M\}}$ — отображение, ставящее в соответствие группе H множество

$$\theta_{\{H,M\}}(H) = \{H, M^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(H)\},$$

а для любой группы S, которая не изоморфна H, положим

$$\theta_{\{H,M\}}(S) = \theta_{E\mathfrak{X}}(S).$$

Простая проверка показывает, что $\theta_{\{H,M\}}$ — подгрупповой m-функтор и для любой группы G справедливо равенство

$$\Phi_{\theta_{\{H,M\}}}(G) = \Phi_{\theta_{E\mathfrak{X}}}(G),$$

т. е. подгрупповые m-функторы $\theta_{\{H,M\}}$ и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ являются Ф-эквивалентными. Отсюда, в частности, следует, что если простая неабелева группа H содержит n различных классов автоморфно сопряженных максимальных подгрупп и H не принадлежит классу простых групп $\mathfrak{X}$, то существует по крайней мере n различных подгрупповых m-функторов, Ф-эквивалентных с подгрупповым m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Так как отношение $\equiv_\Phi$ является отношением эквивалентности, оно разбивает множество $\mathscr{M}$ всех подгрупповых m-функторов на попарно не пересекающиеся классы. Класс эквивалентности, содержащий подгрупповой m-функтор θ, будем обозначать далее через $[\theta, \equiv_\Phi]$. Из определения следует, что классы $[\theta_1, \equiv_\Phi]$ и $[\theta_2, \equiv_\Phi]$ совпадают тогда и только тогда, когда $\Phi_{\theta_1}(G) = \Phi_{\theta_1}(G)$ для любой группы G. Из примера 1 следует, что класс эквивалентности $[\theta, \equiv_\Phi]$ может содержать в общем случае как регулярные, так и нерегулярные подгрупповые m-функторы.

На множестве $\mathscr{M}$ всех подгрупповых m-функторов определим операции пересечения и объединения m-функторов следующим образом:

$$(\theta_1 \cap \theta_2)(G) = \theta_1(G) \cap \theta_2(G), \quad (\theta_1 \cup \theta_2)(G) = \theta_1(G) \cup \theta_2(G)$$

для любых двух m-функторов θ_1 и θ_2 и любой группы G. Простая проверка показывает, что $\theta_1 \cap \theta_2$ и $\theta_1 \cup \theta_2$ — подгрупповые m-функторы.

На множестве $\mathscr{M}$ естественным образом введем отношение частичного порядка: $\theta_1 \leq \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$ для любой группы G. Тогда $\mathscr{M}$ — полная бесконечно дистрибутивная решетка, в которой

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2, \quad \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2.$$

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является *нулевой m-функтор*, т. е. такой m-функтор θ, что $\theta(G) = \{G\}$ для любой группы G. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает максимальный m-функтор, т. е. m-функтор, который выделяет в каждой группе все ее максимальные подгруппы.

Каждый элемент решетки $\mathscr{M}$ дополняем (в качестве дополнения m-функтора θ выступает дополнительный m-функтор, т. е. такой подгрупповой m-функтор, который в каждой группе G выделяет саму группу G и все те ее максимальные подгруппы, которые не принадлежат $\theta(G)$). Следовательно, решетка $\mathscr{M}$ является булевой.

Для любого подгруппового m-функтора θ класс эквивалентности $[\theta, \equiv_\Phi]$ является верхней полурешеткой, но в общем случае $[\theta, \equiv_\Phi]$ не является подрешеткой решетки $\mathscr{M}$. Пусть, например, $H \cong PSL(2,7)$ и $\mathfrak{X}$ — класс простых групп, не содержащий H. Пусть $\theta_1 = \theta_{\{H,M\}}$, где $M \cong S_4$, и $\theta_2 = \theta_{\{H,M\}}$, где $M \cong Z_7 : Z_3$. Тогда $\theta_1, \theta_2 \in [\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$, но подгрупповой m-функтор $\theta_1 \cap \theta_2$ не принадлежит $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. В данном разделе исследуется мощность класса $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$, все подгрупповые m-функторы которого ввиду теоремы 2 обладают Hall Φ-свойством.

Напомним, что максимальная подгруппа M группы G *не покрывает* ее главный фактор A/B, если $B \subseteq M$ и $MA = G$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — собственный непустой подкласс класса всех простых групп. Тогда класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ содержит бесконечное число подгрупповых m-функторов.*

Доказательство. Покажем, что для любого натурального n существует по крайней мере n различных подгрупповых m-функторов, Φ-эквивалентных с m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Так как $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{I}$, найдется по крайней мере одна простая группа S, которая не принадлежит $\mathfrak{X}$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ следует, что существует простая группа R, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Ясно, что группы S и R не являются изоморфными. Полагая, что $G_0 = S$, для $i = 1, \ldots, n$ построим рекурсивно по алгоритмам, описанным в лемме 4, монолитические группы

$$G_i = [N_i]([N_{i-1}](\ldots([N_1]S)\ldots)$$

с монолитом $N_i \in E(R)$, если i — нечетное число, $N_i \in E(S)$, если i — четное число. Поэтому $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_i) = N_i$, если i — нечетное число, и $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_i) = 1$, если i — четное число. Кроме того, в главном ряду

$$\begin{aligned}1 \subset N_i = A_1 \subset N_iN_{i-1} = A_2 \subset \cdots \subset N_iN_{i-1}\ldots N_1 \\ = A_i \subset N_iN_{i-1}\ldots N_1S = A_{i+1} = G_i\end{aligned}$$

группы G_i все главные факторы A_j/A_{j-1} $(j = 1, \ldots, i+1)$ нефраттиниевы. Поэтому для каждого главного фактора A_j/A_{j-1} в G_i найдется максимальная подгруппа M_j, которая его не покрывает.

Пусть для определенности n — четное число. Тогда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_n) = 1$. Так как группа G_n монолитическая с монолитом N_n и M_1 не покрывает N_n, то $\mathrm{Core}_{G_n}(M_1) = 1$. Для $j = 1, \ldots, n+1$ пусть $\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}$ — отображение, ставящее в соответствие группе G_n множество

$$\theta_{\{G_n,M_1,M_j\}}(G_n) = \{G_n, M_1^\alpha, M_j^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(G_n)\},$$

а для любой группы G, которая не изоморфна G_n, положим

$$\theta_{\{G_n,M_1,M_j\}}(G) = \theta_{E\mathfrak{X}}(G).$$

Простая проверка показывает, что $\theta_{\{G_n,M_1,M_j\}}$ — подгрупповой m-функтор и для любой группы D справедливо равенство $\Phi_{\theta_{\{G_n,M_1,M_j\}}}(D) = \Phi_{\theta_{E\mathfrak{X}}}(D)$, т. е. подгрупповые m-функторы $\theta_{\{G_n,M_1,M_j\}}$ и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ являются Φ-эквивалентными. Таким образом, если n — четное число, то класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ содержит не менее $n+1$ различных подгрупповых m-функторов.

Если n — нечетное число, то с учетом равенств

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_n) = N_1, \quad \mathrm{Core}_{G_n}(M_2) = N_1$$

класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ также содержит не менее n различных подгрупповых m-функторов.

Предложение доказано.

Требование в предложении 1 собственности подкласса $\mathfrak{X}$ в классе $\mathfrak{I}$ всех простых групп существенно. Действительно, при $\mathfrak{X} = \mathfrak{I}$ для любой группы G справедливо равенство $G_{\mathfrak{X}} = G$. Поэтому нулевой m-функтор является единственным элементом класса эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_{\Phi}]$.

По аналогии с предложением 1 можно показать, что для пустого класса $\mathfrak{X}$ класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_{\Phi}]$ также является бесконечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.

2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.

3. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф.* О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 30–40.

4. *Каморников С. Ф.* О решетке регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1034–1040.

5. *Ballester-Bolinches A., Cosme-Llopez E., Kamornikov S. F.* On subgroup functors of finite soluble groups // Sci. China Math. 2017. V. 60. P. 439–448.

6. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Белорусская наука, 1997.

7. *Baer R.* Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. V. 11. P. 353–369.

8. *Berkovich Y.* Alternate proofs of some basic theorems of finite groups theory // Glasnik Matematicki. 2005. V. 40. P. 207–233.

9. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. P. 93–107.

10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

11. *Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.* Новые свойства префраттиниевых подгрупп конечных разрешимых групп // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2011. № 1. С. 43–47.

12. *Deskins W. E.* A condition for the solvability of a finite group // Ill. J. Math. 1961. V. 5, N 2. P. 306–313.

13. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

Поступила в редакцию 28 ноября 2024 г.
После доработки 28 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Йи Сяолан (Yi Xiaolan) (ORCID 0000-0001-8603-5893)
Чжэцзянский политехнический университет
(Zhejiang Sci-Tech University),
Ханчжоу 310018, Китай
yixiaolan2005@126.com

Ченг Биньхуэй (Cheng Binhui) (ORCID 0009-0000-7834-8881)
Чжэцзянский политехнический университет
(Zhejiang Sci-Tech University),
Ханчжоу 310018, Китай
t1776477642@126.com

Бородич Руслан Викторович (ORCID 0000-0002-9715-721X)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
borodich@gsu.by

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru