Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Д. Р. Баранов, Е. В. Соколов

Аннотация. Предположим, что C — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и декартовых сплетений, G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в свободных множителях и содержащейся в них собственным образом. Предположим также, что подгруппа группы автоморфизмов подгруппы H, составленная из ограничений на указанную подгруппу всех внутренних автоморфизмов группы G, конечна или абелева, или порождается ограничениями внутренних автоморфизмов одного из свободных множителей. В настоящей статье найдено описание C-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G при условии, что последняя аппроксимируется классом C. При этом критерий C-аппроксимируемости группы G известен.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.203

Ключевые слова: отделимость абелевых подгрупп, аппроксимируемость корневыми классами, обобщенное свободное произведение

§ 1. Введение

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп. Следуя А. И. Мальцеву [1], подгруппу Y группы X будем называть *$\mathscr{C}$-отделимой* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что группа X *аппроксимируется классом $\mathscr{C}$* (или, более коротко, является *$\mathscr{C}$-аппроксимируемой*) тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима. Напомним также, что отделимость и аппроксимируемость классом всех конечных групп принято называть *финитной*.

Будем говорить, что класс групп $\mathscr{C}$ является *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из приводимых ниже условий, равносильность которых установлена в [2]:

1) для всякой группы X и для каждого субнормального ряда $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ из включений $X/Y \in \mathscr{C}$ и $Y/Z \in \mathscr{C}$ следует существование нормальной подгруппы T группы X такой, что $T \leqslant Z$ и $X/T \in \mathscr{C}$ (*условие Грюнберга*);

2) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;

3) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, https://rscf.ru/project/24-21-00307/

Понятие корневого класса впервые появилось в работе [3] и оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, позволяя систематизировать и усиливать полученные ранее результаты об аппроксимируемости указанных конструкций конкретными корневыми классами групп (см., например, [4–11]). Нетрудно показать, что корневыми являются классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Легко видеть также, что пересечение произвольного числа корневых классов — снова корневой класс, если оно содержит хотя бы одну неединичную группу.

В [12, 13] Чжоу и Ким показали, что при изучении финитной отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп могут использоваться те же методы, что и при исследовании финитной аппроксимируемости. В [14, 15] их результаты распространены на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и фундаментальной группы произвольного графа групп. Предложенный подход позволяет получить критерий $\mathcal{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы практически для любой свободной конструкции, аппроксимируемость которой классом $\mathcal{C}$ была установлена ранее. В [15] приводится несколько примеров его применения к изучению отделимости подгрупп фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами. Настоящая статья продолжает данное направление исследований и использует указанный подход для описания отделимых подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, нормальной в свободных множителях.

Всюду далее запись $G = \langle A * B;\ H \rangle$ будет означать, что G — обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Отметим, что если $A = H$ или $B = H$, то группа G совпадает с одним из свободных множителей A, B и потому данный случай можно считать вырожденным. Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию* (α), если $A \neq H \neq B$ и подгруппа H нормальна в группах A и B. Аппроксимируемость такого обобщенного свободного произведения различными классами групп изучалась в [6, 16–27]. В ряде случаев необходимыми и достаточными условиями его $\mathcal{C}$-аппроксимируемости служат $\mathcal{C}$-аппроксимируемость групп A, B и $\mathcal{C}$-отделимость в них подгруппы H (см., например, [23, теорема 1; 24, теорема 1; 25, теорема 1; 27, теорема 2]). В формулировках условий аппроксимируемости группы G конечными p-группами встречается также подгруппа H^pH', где $H^p = \mathrm{sgp}\{h^p \mid h \in H\}$ и H' — коммутант группы H [18, 27]. Однако наиболее универсальным и продуктивным подходом к исследованию аппроксимируемости рассматриваемого обобщенного свободного произведения является использование описанной ниже группы автоморфизмов подгруппы H, индуцированных внутренними автоморфизмами группы G.

Заметим, что если X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на последнюю любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом подгруппы Y. Множество всех таких автоморфизмов образует группу, обозначаемую далее через $\mathrm{Aut}_X(Y)$. Если подгруппа H нормальна в группах A и B, то она нормальна и в группе G, что позволяет определить группу $\mathrm{Aut}_G(H)$. Идея использования свойств последней для описания условий аппроксимируемости группы G впервые была предложена в [17] и затем успешно применялась в [6, 21, 22, 26, 27]. В частности, в [6, 26] был получен критерий аппроксимируемости гомоморфно замкнутым корневым классом групп $\mathscr{C}$ обобщенного свободного произведения $G = \langle A * B;\ H\rangle$, удовлетворяющего условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

(β) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна;

(γ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева;

(δ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_A(H)$ или с группой $\mathrm{Aut}_B(H)$.

Целью настоящей статьи является описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющей условиям упомянутого критерия.

§ 2. Формулировка полученных результатов

Пусть X — некоторая группа и $\mathfrak{S}$ — семейство нормальных подгрупп группы X. Будем говорить, что подгруппа Y группы X *отделима семейством* $\mathfrak{S}$, если $\bigcap\limits_{N \in \mathfrak{S}} YN = Y$. Всюду далее, если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, то через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$. Поскольку подгруппы семейства $\mathscr{C}^*(X)$ — это ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathscr{C}$, подгруппа Y группы X $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathscr{C}^*(X)$. В частности, группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейством $\mathscr{C}^*(X)$ отделима ее единичная подгруппа.

Если $G = \langle A * B;\ H\rangle$, то через $\mathscr{C}^+(A, B)$ будем обозначать семейство пар подгрупп группы G, определенное следующим образом: $(R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)$ тогда и только тогда, когда $R \in \mathscr{C}^*(A)$, $S \in \mathscr{C}^*(B)$ и $R \cap H = S \cap H$. Положим также

$$\mathscr{C}^+(A) = \{R \mid (R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)\} \quad \text{и} \quad \mathscr{C}^+(B) = \{S \mid (R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)\}.$$

Упомянутый в конце предыдущего параграфа критерий аппроксимируемости группы G выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. [6, теорема 2] *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

(a) *единичная подгруппа отделима семействами $\mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^+(B)$;*

(b) *подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B;*

(c) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$.

2. [26, теорема 1] *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда справедливы утверждения (a) и (b).*

Перейдем к описанию отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенного свободного произведения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Если $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{C}$. В случае, когда класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ равным множеству всех простых чисел. Будем говорить, что подгруппа Y группы X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-*изолирована* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ содержит все простые числа, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной. В противном случае нетрудно показать (см., например, [28, предложение 5]), что если подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе. Как следствие, свойство $\mathscr{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных подгрупп. В связи с этим соображением и с характером интересующих нас подгрупп *$\mathscr{C}$-дефектом* группы X будем называть семейство всех $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы, не являющихся $\mathscr{C}$-отделимыми в X.

Понятно, что задача поиска критерия $\mathscr{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы группы $G = \langle A * B;\ H \rangle$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, сводится к описанию $\mathscr{C}$-дефекта данной группы. При этом идеальной можно считать ситуацию, когда для такого описания достаточно знать лишь $\mathscr{C}$-дефекты свободных множителей A и B. К сожалению, в общем случае (теорема 2 ниже) выполнения последнего требования добиться не удалось. Однако при некоторых дополнительных предположениях получено именно идеальное решение (см. теоремы 3–5).

Пусть (X, Y) — пара конечно порожденных абелевых подгрупп группы G и символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Рассмотрим следующий набор условий.

($\lambda_{\mathscr{C}}^{1,Z}$) X— $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathscr{C}$-дефекту); $Y = 1$.

($\mu_{\mathscr{C}}^{1,Z}$) X— подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathscr{C}$-дефекту); Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

($\lambda_{\mathscr{C}}^{2,Z}$) X — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся отделимой в этой группе семейством $\mathscr{C}^+(Z)$; $Y = 1$.

($\mu_{\mathscr{C}}^{2,Z}$) X— подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^+(Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathscr{C}}^k(G)$, $k = \overline{1,2}$, семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющих хотя бы одному из условий ($\lambda_{\mathscr{C}}^{k,A}$), ($\lambda_{\mathscr{C}}^{k,B}$), ($\mu_{\mathscr{C}}^{k,A}$), ($\mu_{\mathscr{C}}^{k,B}$), и положим $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^k(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathscr{C}}^k(G)\}$.

Известно (см. [29, теорема 2] и [14, предложение 5]), что произвольная конечно порожденная абелева подгруппа группы G сопряжена либо с подгруппой одного из свободных множителей A, B, либо с прямым произведением подгрупп X и Y, где $X \leqslant H$ и Y — бесконечная циклическая подгруппа, тривиально пересекающаяся с A и с B. Поэтому для задания семейства $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^1(G)$, помимо умения строить конечно порожденные абелевы подгруппы группы G, достаточно знать описания $\mathscr{C}$-дефектов групп A и B. Определения семейств $\mathscr{C}^+(A, B)$ и $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^2(G)$ сложнее: они зависят не только от свойств групп A и B, но и от того, как данные группы склеиваются при построении обобщенного свободного произведения. При этом из включений $\mathscr{C}^+(A) \subseteq \mathscr{C}^*(A)$, $\mathscr{C}^+(B) \subseteq \mathscr{C}^*(B)$ следует, что $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^1(G) \subseteq \mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^2(G)$.

Общее решение рассматриваемой задачи дает

Теорема 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп,* *замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(G)$.*

Приводимые далее теоремы 3–5 указывают некоторые частные случаи, в которых описание $\mathscr{C}$-дефекта обобщенного свободного произведения G можно дать с использованием семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. Отметим, что содержащиеся в этих теоремах критерии $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G являются нетривиальными следствиями теоремы 1 и потому представляют самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, $A/H \in \mathscr{C}$ и $B/H \in \mathscr{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$.*

2. *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

3. *Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathscr{C}$-дефекта, если она $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-дефекта нет в группах A и B.*

Непосредственно из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ). Если подгруппа H имеет конечные индексы в группах A и B, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то и группа G финитно аппроксимируема.*

2. *Если в группах A и B все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы.*

Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп. Следуя [30], будем говорить, что

1) абелева группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathscr{C}$;

2) разрешимая (нильпотентная) группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Будем говорить также, что

1) абелева группа *сильно $\mathscr{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, конечна;

2) разрешимая (нильпотентная) группа *сильно $\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с сильно $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что при любом выборе класса групп $\mathcal{C}$ каждая конечно порожденная абелева группа оказывается сильно $\mathcal{C}$-ограниченной. Поэтому все конечно порожденные нильпотентные группы являются сильно $\mathcal{C}$-ограниченными нильпотентными, а все полициклические группы — сильно $\mathcal{C}$-ограниченными разрешимыми.

Как обычно, целое число будем называть $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-*числом*, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ будем обозначать дополнение множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ в множестве всех простых чисел.

Теорема 4. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, подгруппа H является сильно $\mathcal{C}$-ограниченной разрешимой и каждая ее нормальная подгруппа конечного $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-индекса $\mathcal{C}$-отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения* 1–3 *теоремы* 3.

Согласно предложению 5 из [31] если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то понятия $\mathcal{F}$-ограниченной и сильно $\mathcal{F}$-ограниченной разрешимой группы совпадают с понятием разрешимой группы, ограниченной в смысле А. И. Мальцева [1]. Поэтому из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ). Пусть также подгруппа H является ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева и каждая ее нормальная подгруппа конечного индекса финитно отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения* 1 *и* 2 *следствия* 1.

Теорема 5. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{N}$ — класс $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, группы A и B $\mathcal{N}$-аппроксимируемы и обладают гомоморфизмами на $\mathcal{N}$-группы, действующими инъективно на подгруппе H. Тогда справедливы приводимые ниже утверждения* 1 *и* 2*, а также утверждение* 3 *теоремы* 3.

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*

2. *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*

Следствие 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также A и B — $\mathcal{C}$-ограниченные нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппы 1 и H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группах A и B.*

2. *Если выполняется условие* (γ) *или условие* (δ), *то группа* G $\mathscr{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы* 1 *и* H $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$*-изолированы в группах* A *и* B.

3. *Если группа* G $\mathscr{C}$*-аппроксимируема, то она не имеет* $\mathscr{C}$*-дефекта.*

Говорят (см., например, [32]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой.

Следствие 4. *Пусть группа* $G = \langle A * B;\ H\rangle$ *удовлетворяет условию* (α) *и хотя бы одному из дополнительных условий* (β)–(δ), $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также* $\mathscr{N}_0$ *— класс* $\mathscr{C}$*-ограниченных нильпотентных групп без кручения, группы* A *и* B $\mathscr{N}_0$*-аппроксимируемы и подгруппа* H *имеет конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда выполняются утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 5 *и утверждение* 3 *следствия* 3.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 2–5 и следствий 3, 4.

§ 3. Некоторые вспомогательные утверждения

Предложение 3.1 [27, предложение 3.1]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,* X *— некоторая группа,* Y *и* Z *— подгруппы группы* X*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $Y \in \mathscr{C}^*(X)$, *то* $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(Z)$*. Как следствие, если группа* X *аппроксимируется классом* $\mathscr{C}$, *то и подгруппа* Z *является* $\mathscr{C}$*-аппроксимируемой.*
2. *Если* $Y, Z \in \mathscr{C}^*(X)$, *то* $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(X)$.

Предложение 3.2 [6, предложение 18]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,* X *—* $\mathscr{C}$*-аппроксимируемая группа,* Y *— подгруппа группы* X, *имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа* $Z \in \mathscr{C}^*(X)$ *такая, что* $Z \cap Y = 1$.

Предложение 3.3 [26, предложение 17]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда произвольная группа из класса* $\mathscr{C}$ *имеет конечный период.*

Предложение 3.4 [33, предложение 8]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Конечная разрешимая группа принадлежит классу* $\mathscr{C}$ *тогда и только тогда, когда ее порядок является* $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$*-числом.*

Отметим, что разрешимая (абелева) группа сильно $\mathscr{C}$-ограничена тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-ограниченной разрешимой (соответственно абелевой) в смысле определения, данного в [31]. Поэтому из предложений 2 и 3 указанной работы вытекает

Предложение 3.5. *Если* $\mathscr{C}$ *— класс групп, состоящий из периодических групп, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченных разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.*
2. *Если сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченная разрешимая группа является абелевой, то она принадлежит классу сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченных абелевых групп.*

Ввиду отмеченной выше равносильности определений приводимое далее утверждение совпадает с предложением 18 из [26].

Предложение 3.6. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда произвольная сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathscr{C}$, конечна.*

Предложение 3.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и X — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группа конечного периода. Тогда группа X конечна и принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Пусть Y — произвольный фактор некоторого нормального разрешимого ряда группы X. Тогда Y — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группа конечного периода, являющаяся сильно $\mathscr{C}$-ограниченной абелевой в силу предложения 3.5. Ввиду конечности периода количество примарных компонент группы Y конечно. Каждая из этих компонент соответствует некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ и потому конечна. Следовательно, группа Y (а вместе с ней и группа X) также конечна. Принадлежность группы X классу $\mathscr{C}$ вытекает из предложения 3.4.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-квазирегулярна* по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Предложение 3.8. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая группа, Y — подгруппа группы X. Тогда группа X $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(1) $Y \in \mathscr{C}^*(X)$;

(2) *все подгруппы семейства $\mathscr{C}^*(Y)$ $\mathscr{C}$-отделимы в группе X и имеют конечные индексы в группе Y;*

(3) *класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и замкнут относительно взятия фактор-групп, Y — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа и каждая нормальная подгруппа группы Y конечного $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-индекса $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Доказательство. Если выполняется условие (1), $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y вытекает из условия Грюнберга. Пусть имеет место условие (2), $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ и $\{1, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M. Так как последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X и множество $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq X \setminus M$ конечно, то, пользуясь утверждением 2 предложения 3.1, можно найти подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющую условию $y_1, \ldots, y_n \notin MN$. Если $N \cap Y \nleqslant M$ и $y \in (N \cap Y) \setminus M$, то $y = xy_i$ для подходящих $x \in M$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $y_i = x^{-1}y \in MN$ вопреки выбору подгруппы N. Следовательно, $N \cap Y \leqslant M$ и $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y имеет место.

Пусть выполняется условие (3). Если $M \in \mathscr{C}^*(Y)$, то согласно предложениям 3.5 и 3.6 фактор-группа Y/M оказывается сильно $\mathscr{C}$-ограниченной разрешимой и, следовательно, конечной. Очевидно также, что ее порядок является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом и потому подгруппа M $\mathscr{C}$-отделима в группе X. Стало быть, имеет место условие (2), которое и гарантирует $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y.

Следующие два утверждения вытекают из теоремы 2.4 и предложений 5.2, 6.1, 6.3 работы [30].

Предложение 3.9. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{N}$ — класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения, X — некоторая группа и Y — ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа. Если группа X $\mathscr{N}$-аппроксимируема и обладает гомоморфизмом на $\mathscr{N}$-группу, действующим инъективно на подгруппе Y, то она $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, а последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Предложение 3.10. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

2. *Если периодическая $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом, то она принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

§ 4. Доказательство теоремы 2

Всюду далее, если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, X — группа и Y — подгруппа группы X, то через $\mathscr{C}^*(X, Y)$ будем обозначать семейство подгрупп $\{N \cap Y \mid N \in \mathscr{C}^*(X)\}$.

Предложение 4.1 [6, предложение 10]. *Если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семействами $\mathscr{C}^*(G, A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B)$.*

Как и выше, обозначим через $\mathfrak{D}^3_{\mathscr{C}}(G)$ семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы $G = \langle A * B;\ H\rangle$, удовлетворяющих хотя бы одному из определенных далее условий $(\lambda^{3,Z}_{\mathscr{C}})$, $(\mu^{3,Z}_{\mathscr{C}})$, где $Z = A$ или $Z = B$, и положим $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G) = \big\{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}^3_{\mathscr{C}}(G)\big\}$.

$(\lambda^{3,Z}_{\mathscr{C}})$ X — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^*(G, Z)$; $Y = 1$.

$(\mu^{3,Z}_{\mathscr{C}})$ X — подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^*(G, Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Следующее предложение объединяет в себе частные случаи теорем 2.2 и 2.3 из [15].

Предложение 4.2. *Пусть $G = \langle A * B;\ H\rangle$ и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Тогда справедливы приводимые далее утверждения.*

1. *Если подгруппы 1 и H отделимы семействами $\mathscr{C}^*(G, A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B)$, то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G)$.*

2. *Пусть группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в этих группах и группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппам A и B. При таких предположениях группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathscr{C}$-дефекта, если тем же свойством обладают группы A и B.*

Предложение 4.3 [6, предложение 11]. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Тогда подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе A (в группе B) тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathscr{C}^*(G, A)$ (соответственно семейством $\mathscr{C}^*(G, B)$).*

Предложение 4.4 [26, предложение 12]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:*
(γ) группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ абелева;
(δ) группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\operatorname{Aut}_A(H)$ или с группой $\operatorname{Aut}_B(H)$;
(ε) группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$.
Если $\mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^+(B)$ — семейства подгрупп группы G, определенные в § 2, то $\mathscr{C}^*(G, A) = \mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B) = \mathscr{C}^+(B)$.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1 подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B. Ввиду предложения 4.3 это равносильно ее отделимости семействами $\mathscr{C}^*(G, A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B)$. В силу предложения 4.1 теми же семействами отделима единичная подгруппа группы G. Если выполняется условие (β), то по теореме 1 справедливо включение $\operatorname{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$. Поэтому можно воспользоваться предложением 4.4, согласно которому $\mathscr{C}^*(G, A) = \mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B) = \mathscr{C}^+(B)$. Отсюда $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G) = \mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(G)$ и, следовательно, доказываемая теорема вытекает из утверждения 1 предложения 4.2.

§ 5. Доказательства теорем 3–5 и следствий 3, 4

Приводимое далее утверждение отмечено без доказательства в [34] и может быть легко проверено индукцией по k.

Предложение 5.1. *Пусть $\{\upsilon_k(x, y) \mid k \geqslant 1\}$ — множество слов в (групповом) алфавите $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, $\upsilon_1(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ и при $k \geqslant 2$ слово $\upsilon_k(x, y)$ получается из слова $x^{-1}\upsilon_{k-1}(x, y)^{-1}x\upsilon_{k-1}(x, y)$ путем удаления подслова xx^{-1}. Тогда для каждого $k \geqslant 1$ слово $\upsilon_k(x, y)$ имеет длину 2^{k+1}, начинается на $x^{-1}y^{-1}$, заканчивается на xy и не содержит подслов вида $x^{\xi}x^{\zeta}$ или $y^{\xi}y^{\zeta}$, где $\xi, \zeta = \pm 1$.*

Напомним, что запись элемента g группы $G = \langle A * B;\ H \rangle$ в виде произведения $g_1 g_2 \ldots g_n$, где $g_1, g_2, \ldots, g_n \in A \cup B$, называется *несократимой*, если никакие два соседних сомножителя этого произведения не лежат одновременно в A или в B. Число n называют *длиной* данной несократимой записи. Теорема о нормальной форме для обобщенных свободных произведений (см., например, [35, глава IV, теорема 2.6]) утверждает, что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью неединичной длины, то он отличен от 1.

Предложение 5.2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α), $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и подгруппа H нильпотентна. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа H не является $\mathscr{C}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что $a\sigma \in H\sigma$ при любом гомоморфизме σ группы A на группу из класса $\mathscr{C}$. Пользуясь условием $H \neq B$, выберем некоторый элемент $b \in B \setminus H$ и положим $g = \upsilon_c(a, b^{-1}ab)$, где c — ступень нильпотентности подгруппы H и $\upsilon_c(x, y)$ — слово из предложения 5.1. Согласно указанному предложению элемент g имеет несократимую запись неединичной длины и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если σ — произвольный гомоморфизм группы G на $\mathscr{C}$-группу, то $a\sigma \in H\sigma$ ввиду выбора элемента a и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп, $(b^{-1}ab)\sigma \in H\sigma$ в силу нормальности подгруппы H в группе B и $g\sigma = 1$, поскольку элемент $v_c(a, b^{-1}ab)\sigma$ принадлежит $(c+1)$-му члену нижнего центрального ряда группы $H\sigma$, а c — ступень нильпотентности группы H. Таким образом, группа G не является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой вопреки условию предложения. $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в группе B доказывается аналогично.

Предложение 5.3. *Пусть выполняются условия предложения* 4.4. *Если группы A и B $\mathscr{C}$-квазирегулярны по подгруппе H и каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G, то группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппам A и B.*

Доказательство. Пусть $L \in \mathscr{C}^*(A)$, $M \in \mathscr{C}^*(B)$ и $P = L \cap M \cap H$. Для завершения доказательства достаточно найти подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(G)$ такую, что $N \cap A \leqslant L$ и $N \cap B \leqslant M$. Согласно предложению 3.1

$$L \cap H \in \mathscr{C}^*(H), \quad M \cap H \in \mathscr{C}^*(H) \quad \text{и} \quad P = (L \cap H) \cap (M \cap H) \in \mathscr{C}^*(H).$$

По условию настоящего предложения существует подгруппа $Q \in \mathscr{C}^*(H)$, лежащая в P и нормальная в G. Пользуясь $\mathscr{C}$-квазирегулярностью групп A и B по подгруппе H, найдем подгруппы $U \in \mathscr{C}^*(A)$ и $V \in \mathscr{C}^*(B)$, удовлетворяющие соотношениям $U \cap H \leqslant Q$ и $V \cap H \leqslant Q$. Положим $R = QU \cap L$ и $S = QV \cap M$. Так как $A/U \in \mathscr{C}$, $B/V \in \mathscr{C}$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $A/QU \cong (A/U)/(QU/U) \in \mathscr{C}$ и $B/QV \cong (B/V)/(QV/V) \in \mathscr{C}$. Отсюда ввиду предложения 3.1 получаем, что $R \in \mathscr{C}^*(A)$ и $S \in \mathscr{C}^*(B)$. Из соотношений $U \cap H \leqslant Q$ и $V \cap H \leqslant Q$ легко следует, что $QU \cap H = Q = QV \cap H$. Так как $Q \leqslant P \leqslant L \cap M$, то $R \cap H = Q = S \cap H$ и, стало быть, $R \in \mathscr{C}^+(A)$, $S \in \mathscr{C}^+(B)$. В силу предложения 4.4 $R \in \mathscr{C}^*(G, A)$ и $S \in \mathscr{C}^*(G, B)$, т. е. существуют подгруппы $N_1, N_2 \in \mathscr{C}^*(G)$, удовлетворяющие соотношениям $N_1 \cap A = R$ и $N_2 \cap B = S$. Положим $N = N_1 \cap N_2$. Тогда $N \in \mathscr{C}^*(G)$ в силу предложения 3.1, $N \cap A \leqslant R \leqslant L$ и $N \cap B \leqslant S \leqslant M$. Следовательно, подгруппа N искомая.

Предложение 5.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, обобщенное свободное произведение $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий*:

(1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна или принадлежит классу $\mathscr{C}$*;

(2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ *и группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H*;

(3) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, $H \in \mathscr{C}^*(B)$ и группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H*;

(4) *класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и подгруппа H является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной или сильно $\mathscr{C}$-ограниченной разрешимой.*

Тогда каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G.

Доказательство. Пусть $M \in \mathscr{C}^*(H)$. Построение искомой подгруппы проведем отдельно для каждого из дополнительных условий (1)–(4).

(1) Положим $N = \bigcap\limits_{\theta \in \mathrm{Aut}_G(H)} M\theta$. Согласно определению группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ подгруппа N совпадает с пересечением $\bigcap\limits_{g \in G} g^{-1}Mg$ и потому нормальна в группе G. По теореме Ремака (см., например, [36, теорема 4.3.9]) фактор-группа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/M\theta$, каждая из которых изоморфна $\mathscr{C}$-группе H/M. Указанное декартово произведение, а вместе

с ним и группа H/N принадлежат классу $\mathscr{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и а) расширений, если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна; б) декартовых степеней указанного в определении корневого класса вида, если $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$. Таким образом, подгруппа N является искомой.

(2) Ввиду $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H найдется подгруппа $L \in \mathscr{C}^*(A)$, удовлетворяющая условию $L \cap H \leqslant M$. Положим $N = L \cap H$. Тогда подгруппа N нормальна в группе A и принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(H)$ в силу предложения 3.1. Так как $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, то указанная подгруппа оказывается нормальной в группе G и, следовательно, является искомой.

(3) Как и выше, воспользуемся $\mathscr{C}$-квазирегулярностью группы A по подгруппе H, найдем подгруппу $L \in \mathscr{C}^*(A)$, удовлетворяющую условию $L \cap H \leqslant M$, и положим $Q = L \cap H$, $N = \bigcap\limits_{\theta \in \mathrm{Aut}_G(H)} Q\theta$. Тогда подгруппа Q нормальна в группе A, подгруппа N нормальна в группе G, $Q \in \mathscr{C}^*(H)$ и $N \leqslant M$. Пусть $\{b_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы B по подгруппе H. Поскольку группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева, любой ее элемент совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма, производимого элементом вида ab, где $a \in A$, $b \in B$. Понятно, что каждое такое произведение можно переписать в виде cb_i для подходящих $c \in A$, $i \in \mathscr{I}$. Поэтому

$$N = \bigcap_{i \in \mathscr{I},\, c \in A} b_i^{-1} c^{-1} Q c b_i = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} b_i^{-1} Q b_i$$

и фактор-группа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/b_i^{-1}Qb_i$, изоморфных $\mathscr{C}$-группе H/Q. Так как множество $\mathscr{I}$ равномощно $\mathscr{C}$-группе B/H, группа H/N содержится в классе $\mathscr{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и декартовых степеней. Следовательно, N — искомая подгруппа.

(4) Согласно предложению 3.3 $\mathscr{C}$-группа H/M имеет конечный период q, являющийся, очевидно, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом. Положим $N = \mathrm{sgp}\{h^q \mid h \in H\}$. Тогда подгруппа N содержится в M и нормальна в G, а фактор-группа H/N имеет период q. Если подгруппа H является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной, то в силу предложения 3.10 группа H/N принадлежит классу $\mathscr{C}$. В случае, когда H — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа, аналогичное утверждение вытекает из предложений 3.5 и 3.7. Следовательно, подгруппа N искомая.

Доказательство теорем 3 и 4. Необходимость условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$ для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G в утверждении 1 каждой из теорем 3, 4 обеспечивается теоремой 1. Докажем одновременно утверждения 2, 3 и достаточность в утверждении 1. Согласно предложению 3.8 группы A и B $\mathscr{C}$-квазирегулярны по подгруппе H. Поэтому в силу предложения 5.4 каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G. Из предложения 5.3 теперь следует, что группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по свободным множителям A и B. $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в тех же сомножителях гарантируется либо включениями $A/H, B/H \in \mathscr{C}$ (в случае теоремы 3), либо условием теоремы (в случае теоремы 4). Таким образом, $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы G и утверждение 3 следуют из утверждения 2 предложения 4.2.

Доказательство теоремы 5. Заметим, что в силу предложения 3.9 группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, а условие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности подгруппы H в этих группах равносильно требованию ее $\mathscr{C}$-отделимости. Из вложимости подгруппы H в $\mathscr{N}$-группу и предложения 3.10 следует, что указанная подгруппа является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной. Поэтому ее $\mathscr{C}$-отделимость в группах A и B необходима для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G в силу предложения 5.2. Как и выше, необходимость условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$ в утверждении 1 обеспечивается теоремой 1. Для проверки утверждения 3 и достаточности в утверждениях 1 и 2 можно воспользоваться в точности теми же рассуждениями, что и при доказательстве теорем 3 и 4, с той лишь разницей, что вместо предложения 3.8 нужно сослаться на предложение 3.9, а $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в группах A и B гарантируется условием теоремы 5 и сделанным в начале доказательства замечанием.

Доказательство следствия 3. Очевидно, что принадлежность свободных множителей A и B классу $\mathscr{N}$ из формулировки теоремы 5 и $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность в них же единичной подгруппы имеют место одновременно. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то согласно предложению 3.1 группы A и B также обладают данным свойством. Последнее утверждение равносильно $\mathscr{C}$-отделимости и влечет за собой $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность единичной подгруппы в указанных группах. Таким образом, включение $A, B \in \mathscr{N}$ оказывается выполненным при любых предположениях, содержащихся в утверждениях 1–3, и поскольку $\mathscr{N}$-группы не имеют $\mathscr{C}$-дефекта в силу предложения 3.9, следствие 3 вытекает из теоремы 5.

Доказательство следствия 4. Пусть символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Из предложения 3.10 следует, что класс $\mathscr{N}_0$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 3.2 группа Z обладает гомоморфизмом на $\mathscr{N}_0$-группу, инъективным на подгруппе H. Более того, так как любая конечно порожденная абелева подгруппа X группы Z имеет, очевидно, конечный ранг Гирша — Зайцева, то согласно тому же предложению найдется гомоморфизм группы Z на $\mathscr{N}_0$-группу, действующий инъективно на подгруппе X. Отсюда и из предложения 3.9 следует, что подгруппа X $\mathscr{C}$-отделима в группе Z, если она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе, и, стало быть, группа Z не имеет $\mathscr{C}$-дефекта. Таким образом, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
2. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Commun. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.
3. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.
4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.
5. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
7. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.
8. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.
10. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.
11. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Commun. Algebra. 2022. V. 50, N 3. P. 962–987.
12. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. V. 28, N 3. P. 543–552.
13. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 4. P. 651–660.
14. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.
15. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. II // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 207–228.
16. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
17. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 3. P. 301–305.
18. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с нормальным объединением // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 125–131.
19. *Wong K. B., Wong P. C.* Polygonal products of residually finite groups // Bull. Korean Math. Soc. 2007. V. 44, N 1. P. 61–71.
20. *Kim G., Lee Y., McCarron J.* Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // Kyungpook Math. J. 2008. V. 48, N 3. P. 495–502.
21. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 134–141.
22. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.
23. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.
24. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.
25. *Розов А. В.* Об аппроксимируемости конечными π-группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2. С. 37–44.
26. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.
27. *Sokolov E. V.* On the residual nilpotence of generalized free products of groups // J. Algebra. 2024. V. 657. P. 292–326.
28. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
29. *Молдаванский Д. И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.
30. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. V. 26, N 4. P. 751–777.
31. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
32. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discr. Math. 2007. N 4. P. 23–43.
33. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.
34. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. Т. 2. С. 5–7.
35. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

36. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 26 ноября 2024 г.
После доработки 26 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Баранов Даниил Романович (ORCID 0009-0000-4964-7874),
Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
d.r.baranov.404@gmail.com, ev-sokolov@yandex.ru