Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.3

ПРОСТРАНСТВА МЕРОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕЗИНТЕГРИРОВАНИЯМИ

М. Арсенович, В. И. Богачев, М. Крстич

Аннотация. Изучается несколько нормированных пространств измеримых отображений со значениями в пространствах ограниченных мер. Такие пространства отображений естественно возникают в связи с дезинтегрированиями мер и являются более широкими, чем классическое пространство интегрируемых по Бохнеру отображений. Они определяются посредством интегрируемости значений на множествах или посредством норм типа Канторовича — Рубинштейна.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.202

Ключевые слова: пространство мер, измеримое отображение, дезинтегрирование.

Посвящается 85-летию Александра Александровича Толстоногова

§ 1. Введение

Пусть $(X, \mathscr{B}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой $\mu \geq 0$ и $(Y, \mathscr{A})$ — измеримое пространство. Символ $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ обозначает пространство счетно-аддитивных мер на $\mathscr{A}$, наделенное вариационной нормой (под мерой подразумевается вещественная счетно-аддитивная мера). Напомним, что всякая мера $\nu \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ обладает разложением Хана — Жордана $\nu = \nu^+ - \nu^-$, где ν^+ и ν^- — взаимно сингулярные неотрицательные меры, называемые соответственно *положительной* и *отрицательной* частями меры ν. Мера $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ называется *полной вариацией* ν, а величина $\|\nu\| = |\nu|(Y)$ называется *вариацией* ν. Далее *μ-измеримой функцией* называется функция, которая определена μ-почти всюду и измерима относительно пополнения меры μ (см. [1]).

Во многих задачах полезно использовать различные пространства интегрируемых отображений на X со значениями в пространстве $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$. Наиболее классическая конструкция основана на интеграле Бохнера (см., например, [2]), что приводит к пространству $L^1(\mu, E)$ интегрируемых по Бохнеру отображений со значениями в нормированном пространстве E. Пространство $L^1(\mu, E)$ состоит из классов эквивалентности отображений $f : X \to E$ таких, что имеется последовательность простых отображений $f_n : X \to E$, т. е. отображений с конечным числом значений, принимаемых на разбиении пространства X на

Работа поддержана грантом MPNTR No. 174017 (Сербия) и проектом 23-Ш05-16 в рамках Междисциплинарных научных школ МГУ им. М.В. Ломоносова.

конечное число множеств из $\mathscr{B}$, с тем свойством, что $f_n(x) \to f(x)$ для μ-почти всех $x \in X$ и

$$\int\limits_X \|f_n(x) - f(x)\|_E \, \mu(dx) \to 0.$$

Тогда векторные интегралы отображений f_n образуют фундаментальную последовательность, причем если E полно, то они сходятся к вектору из E, называемому *интегралом Бохнера* от f. Норма на $L^1(\mu, E)$ задается равенством

$$\|f\|_1 = \int\limits_X \|f(x)\|_E \, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности. Если E полно, то $L^1(\mu, E)$ тоже полно. В частности, в нашем случае получаем банахово пространство $L^1(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ мерозначных отображений. Однако это пространство оказывается довольно узким, поскольку всякое интегрируемое по Бохнеру отображение почти наверное принимает значения в сепарабельном подпространстве в E, что не выполнено во многих интересных случаях. Например, если $f(x) = \delta_x$ — мера Дирака в точке x для всякого x из $[0, 1]$ с мерой Лебега, то f не является интегрируемым по Бохнеру.

В этой работе рассматривается несколько более широких классов мерозначных интегрируемых отображений. Первое пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, рассматриваемое в § 2, состоит из мерозначных отображений $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$, для которых функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ являются μ-интегрируемыми и также функция $x \mapsto \|\lambda^x\|$ интегрируема. Для счетно-порожденной σ-алгебры $\mathscr{A}$ это пространство банахово и в типичных случаях шире, чем пространство интегрируемых по Бохнеру отображений, которое является замкнутым подпространством в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. В § 3 изучается пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ мерозначных отображений, которые также имеют интегрируемые значения на множествах, но не обязательно обладают интегрируемыми вариациями. Это пространство обычно неполно, но при некоторых дополнительных предположениях об Y его подмножество, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Наконец, в §4 введено пространство мерозначных отображений с интегрируемыми нормами Канторовича — Рубинштейна. Это пространство обычно также неполно, но его подмножество из отображений со значениями в неотрицательных мерах полно относительно соответствующей метрики. В нашей готовящейся к печати работе изучаются некоторые дополнительные свойства таких пространств.

§ 2. Пространство отображений с интегрируемой вариацией

Естественное пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, содержащее отображения типа рассмотренных в простом примере выше, состоит из классов эквивалентности измеримых мерозначных отображений (как обычно, эквивалентность означает равенство почти всюду), для которых вариация μ-интегрируема, где, однако, измеримость определяется в более слабом смысле: требуется, чтобы функция $x \mapsto f(x)(A)$ была μ-измеримой для каждого множества $A \in \mathscr{A}$.

В лемме ниже показано, что если σ-алгебра $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, то пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ линейно и может быть наделено нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_X \|f(x)\| \, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности, более того, эта норма полна. Чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с мерозначными отображениями, будем использовать также символ $\Lambda = (\lambda^x)_{x\in X}$ для таких отображений.

Для счетно-порожденной σ-алгебры $\mathscr{A}$ равенство $f(x) = g(x)$ выполнено для μ-почти всех $x \in X$ в точности тогда, когда для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеем $f(x)(A) = g(x)(A)$ для μ-почти всех $x \in X$. Достаточно также иметь это равенство для всех множеств из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$.

Условие μ-интегрируемости функции $x \mapsto \|f(x)\|$ включает μ-измеримость, но в общем случае $\mathscr{B}$-измеримость функций $x \mapsto \|f(x)\|$ и $x \mapsto \|g(x)\|$ не влечет $\mathscr{B}$-измеримость функции $x \mapsto \|f(x) + g(x)\|$. Эта проблема не возникает для счетно-порожденных σ-алгебр, так как следующая лемма показывает, что в таком случае $\mathscr{B}$-измеримость $x \mapsto \|f(x)\|$ вытекает из $\mathscr{B}$-измеримости функций $x \mapsto f(x)(A)$, $A \in \mathscr{A}$. Более того, достаточно иметь измеримость таких функций для множеств A из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$.

Лемма 2.1. *Предположим, что найдется счетная алгебра $\mathscr{A}_0$, порождающая $\mathscr{A}$, причем функции $x \mapsto f(x)(A)$ являются $\mathscr{B}$-измеримыми для всех множеств $A \in \mathscr{A}_0$. Тогда функции*

$$x \mapsto f(x)^+(Y), \quad x \mapsto f(x)^-(Y), \quad x \mapsto |f(x)|(Y) = \|f(x)\|$$

также $\mathscr{B}$-измеримы.

Доказательство. Справедливы равенства

$$f(x)^+(Y) = \sup_{A\in\mathscr{A}} f(x)(A) = \sup_{E\in\mathscr{A}_0} f(x)(E).$$

Итак, функция $f(x)^+(Y)$ есть супремум счетного набора $\mathscr{B}$-измеримых функций и также $\mathscr{B}$-измерима. Тогда то же самое верно для $f(x)^-(Y)$, значит, также и для $\|f(x)\|$. $\square$

Следующий простой пример показывает, что для общей σ-алгебры $\mathscr{A}$ предыдущая лемма может быть неверной.

Пример 2.2. Пусть $X = [0, 1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$ и мерой Лебега μ и $Y = [0, 1]$ с σ-алгеброй $\mathscr{A}$, порожденной всеми одноточечными множествами. Возьмем неизмеримую по Лебегу функцию $\varphi : [0, 1] \to (0, 1]$ и положим

$$f(x) = (\varphi(x) + 1)\delta_x - \varphi(x)\delta_{x/2}.$$

Тогда $f(x)([0, 1]) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$. Для всякого $a \in [0, 1]$ функция $x \mapsto f(x)(\{a\})$ является $\mathscr{B}$-измеримой, ибо она равна нулю вне точек a и $2a$. Следовательно, функция $x \mapsto f(x)(A)$ оказывается $\mathscr{B}$-измеримой для всех $A \in \mathscr{A}$, поскольку $\mathscr{A}$ состоит из всех не более чем счетных множеств и их дополнений. Однако функция

$$x \mapsto |f(x)|([0, 1]) = ((\varphi(x) + 1)\delta_x + \varphi(x)\delta_{x/2})([0, 1]) = 1 + 2\varphi(x)$$

неизмерима по Лебегу.

Предложение 2.3. *Пусть σ-алгебра $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной. Тогда пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ банахово.*

Доказательство. Для всякого $f \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ имеется представитель, для которого функция $x \mapsto \|f(x)\|$ является $\mathscr{B}$-измеримой по лемме 2.1. Значит, если $f, g \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$, то $\alpha f + \beta g \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ для всех скаляров α, β. Поэтому

$L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ — линейное пространство. Ясно, что $f \mapsto \|f\|_1$ — норма на этом пространстве.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Можно считать, что $f_1 = 0$, и иметь дело с представителями классов эквивалентности. Переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что

$$\|f_{n+1} - f_n\|_1 \le 2^{-n}.$$

Тогда ряд из интегралов от $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|$ сходится, значит, для μ-почти всех x сходится ряд из $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|$. Поскольку $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ полно, это означает, что для таких x ряд из $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ сходится в $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$. Это влечет сходимость из $f_{n+1}(x)$ по вариационной норме. Предел $f(x) \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ определен почти всюду, более того, функция $x \mapsto f(x)(A)$ является μ-измеримой для всякого $A \in \mathscr{A}$, ибо $f(x)(A) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)(A)$ почти всюду. Наконец, заметим, что $f_n \to f$ в пространстве $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что $2^{-N} < \varepsilon/2$. Тогда при $n, k \ge N$ имеем $\|f_n - f_k\|_1 \le \varepsilon$, т. е.

$$\int\limits_X \|f_n(x) - f_k(x)\| \, \mu(dx) \le \varepsilon.$$

Полагая $k \to \infty$, по теореме Фату получаем, что $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$. $\square$

Пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ не обязано быть линейным для произвольной σ-алгебры $\mathscr{A}$. Предположение, что $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, важно в предыдущем предложении, как видно из следующего примера, аналогичного предыдущему.

Пример 2.4. Пусть опять X — отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$ и мерой Лебега μ и Y есть $[0,1]$ с σ-алгеброй $\mathscr{A}$, порожденной всеми одноточечными множествами. Возьмем неизмеримую по Лебегу функцию $g : [0,1] \to \{-1, 1\}$ и положим $f_1(x) = 2\delta_x$, $f_2(x) = -g(x)\delta_{x/2} + g(x)\delta_x$. Отображение f_1 очевидным образом измеримо вместе с $x \mapsto \|f_1(x)\|$. Отображение f_2 также измеримо, поскольку $f_2(x)([0,1]) = 0$ и для каждой точки $a \in [0,1]$ значение $f_2(x)(\{a\})$ может отличаться от нуля лишь при $x = a$ и $x = 2a$. Следовательно, функция $x \mapsto f_2(x)(A)$ является $\mathscr{B}$-измеримой для всех $A \in \mathscr{A}$. Кроме того, $\|f_2(x)\| = 2|g(x)| = 2$ при $x \in (0,1]$. С другой стороны, для $x \in (0,1]$ имеем равенство $|f_1(x) + f_2(x)| = |2 + g(x)|\delta_x + |g(x)|\delta_{x/2}$, поэтому функция

$$x \mapsto \|f_1(x) + f_2(x)\| = |2 + g(x)| + |g(x)| = 3 + g(x)$$

неизмерима по Лебегу.

Пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ содержит типичные отображения, возникающие при дезинтегрировании мер. Например, типична следующая ситуация. Предположим, что $F : X \to Y$ — некоторое измеримое отображение и σ — образ меры μ при F, определенный формулой

$$\sigma(A) = \mu \circ F^{-1}(A) := \mu(F^{-1}(A)), \quad A \in \mathscr{A}.$$

Известно (см. [1, гл. 10]), что при широких предположениях (например, когда X и Y — суслинские пространства с их борелевскими σ-алгебрами и F — борелевское отображение) существуют борелевские вероятностные меры μ^y на X, $y \in Y$, называемые условными мерами, такие, что для σ-почти всякого y верно равенство $\mu^y(F^{-1}(y)) = 1$, функции $y \mapsto \mu^y(B)$ борелевски измеримы для всех $B \in \mathscr{B}$, причем

$$\mu(B) = \int\limits_Y \mu^y(B)\, \sigma(dy).$$

В типичных случаях отображение $y \mapsto \mu^y$ не является интегрируемым по Бохнеру, так как меры μ^y взаимно сингулярны, но очевидным образом оно входит в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$.

§ 3. Пространство отображений с интегрируемыми значениями на множествах

Теперь рассмотрим два других пространства, которые могут представлять интерес.

Обозначим через $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ классы функций, ограниченных по модулю 1 и измеримых относительно $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ соответственно.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ классов μ-эквивалентности таких отображений $\Lambda : x \mapsto \lambda^x$ со значениями в пространстве $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$, что функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ являются μ-интегрируемыми для каждого $A \in \mathscr{A}$. Эти функции имеют $\mathscr{B}$-измеримых представителей.

Теорема 3.1. *Для всякого элемента $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ функция множества $\nu_\Lambda : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, определенная формулой*

$$\nu_\Lambda(A) = \int\limits_X \lambda^x(A)\, \mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}, \tag{3.1}$$

является счетно-аддитивной вещественной мерой и

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} := \sup_{A \in \mathscr{A}} \int\limits_X |\lambda^x(A)|\, \mu(dx) < \infty.$$

Кроме того, для всякой функции $g \in B_1(Y)$ функция

$$x \mapsto \int\limits_Y g(y)\, \lambda^x(dy)$$

μ-интегрируема.

Доказательство. Сначала проверим счетную аддитивность ν_Λ. Предположим, что множества $A_n \in \mathscr{A}$ попарно дизъюнктны. Пусть $\mathscr{A}_0$ — под-σ-алгебра, порожденная этими множествами. Тогда имеется счетная алгебра $\mathscr{A}_1$, порождающая $\mathscr{A}_0$. Можно выбрать версию Λ так, что функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ будут $\mathscr{B}$-измеримы для всех $A \in \mathscr{A}_1$.

Пусть $p(x)$ — вариация меры λ^x, рассматриваемой на $\mathscr{A}_0$. По лемме 2.1 функция p является $\mathscr{B}$-измеримой. Множества

$$X_N = \{x \in X : p(x) \le N\}$$

$\mathscr{B}$-измеримы. Функции множества $\nu_{\Lambda,N} : \mathscr{A}_0 \to \mathbb{R}$, заданные формулой

$$\nu_{\Lambda,N}(A) = \int\limits_{X_N} \lambda^x(A)\, \mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}_0,$$

являются счетно-аддитивными мерами на $\mathscr{A}_0$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\nu_\Lambda(A) = \lim_{N\to\infty} \nu_{\Lambda,N}(A) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{A}_0.$$

По теореме Никодима последовательность мер $\{\nu_{\Lambda,N}\}$ ограничена по вариации, а по теореме Витали — Лебега — Хана — Сакса мера ν_Λ также счетно-аддитивна на $\mathscr{A}_0$ (см. [1, теорема 4.6.3]). В частности,

$$\nu_\Lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \nu_\Lambda(A_n).$$

Следовательно, для всякой функции $f \in B_1(X)$ мера $\nu_{f\Lambda} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$\nu_{f\Lambda}(A) = \int_X f(x)\lambda^x(A)\,\mu(dx),$$

счетно-аддитивна на $\mathscr{A}$. Семейство мер $(\nu_{f\Lambda})_{f\in B_1(X)}$ равномерно ограничено на каждом множестве $A \in \mathscr{A}$ интегралом от $|\lambda^x(A)|$. Значит, по теореме Никодима эти меры равномерно ограничены по вариации некоторым числом M. Следовательно,

$$\int_X |\lambda^x(A)|\,\mu(dx) \le M \ \text{ для всех } \ A \in \mathscr{A},$$

ибо можно использовать функции $f(x) = \operatorname{sign}\lambda^x(A)$ из $B_1(X)$. Итак,

$$\|\nu_{f\Lambda}\| \le 2 \sup_{A\in\mathscr{A}} |\nu_{f\Lambda}(A)| \le 2\|f\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \quad \text{для всех } f \in B_1(X).$$

Зафиксируем $g \in B_1(Y)$ и обозначим через $\mathscr{A}_0$ под-σ-алгебру, порожденную g; она счетно-порожденная (будучи порожденной всеми множествами вида $g^{-1}((-\infty, r))$, где $r \in \mathbb{Q}$). Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} G(x), \quad G(x) = \int_Y g(y)\,\lambda^x(dy).$$

Чтобы доказать μ-интегрируемость G, достаточно показать, что интегралы от $|G|$ по множествам X_N, определенным выше для $\mathscr{A}_0$, равномерно ограничены. Заметим, что

$$\int_{X_N} |G(x)|\,\mu(dx) = \int_X \biggl(I_{X_N}(x)f(x)\int_Y g(y)\,\lambda^x(dy)\biggr)\mu(dx) = \int_Y g(y)\,\nu_{fI_{X_N}\Lambda}(dy).$$

Последнее равенство выполнено, так как оно верно для функций g, являющихся индикаторами множеств из $\mathscr{A}_0$, значит, оно верно для $\mathscr{A}_0$-измеримых функций с конечным числом значений, а тогда и для их равномерных пределов. Последний интеграл оценивается числом $\|\nu_{fI_{X_N}\Lambda}\| \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$. $\square$

Замечание 3.2. Предыдущая теорема справедлива также для мер μ со значениями в $[0,\infty]$. В самом деле, случай σ-конечной меры μ сводится к рассмотренному, поскольку можно взять конечную меру μ_0, эквивалентную μ, так что μ задается плотностью Радона — Никодима ϱ относительно μ_0. Тогда вместо мер λ^x и μ можно иметь дело с $\varrho(x)\lambda^x$ и μ_0. В общем случае, имея счетный набор множеств A_n, для которых функции $x \mapsto \lambda^x(A_n)$ являются μ-интегрируемыми, получаем такое множество $X_0 \in \mathscr{B}$, что эти функции равны нулю вне X_0 и мера μ является σ-конечной на X_0.

Чтобы наделить пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ конечной нормой

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = \sup_{A \in \mathscr{A}} \int\limits_X |\lambda^x(A)| \, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности, удобнее использовать более слабое отношение эквивалентности: $\Lambda_1 = (\lambda_1^x) \sim \Lambda_2 = (\lambda_2^x)$, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеем $\lambda_1^x(A) = \lambda_2^x(A)$ для μ-почти всех $x \in X$.

Если $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, то это сводится к равенству $\lambda_1^x = \lambda_2^x$ для μ-почти всех $x \in X$, но в общем случае может случиться, что $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = 0$, хотя $\lambda^x \neq 0$ для μ-почти всех $x \in X$. Достаточно взять $\lambda^x = \delta_x - \delta_{x/2}$ для всех $x \in [0, 1]$ в примере 2.4.

Эта норма эквивалентна норме

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{f \in B_1(X),\, g \in B_1(Y)} \int\limits_X \int\limits_Y f(x) g(y) \, \lambda^x(dy) \, \mu(dx). \tag{3.2}$$

В самом деле, очевидно, что $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \leq \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1}$. С другой стороны, для всякой фиксированной функции $f \in B_1(X)$ в доказательстве теоремы 3.1 мы задали меру $\nu_{f\Lambda}$ на $\mathscr{A}$ равенством

$$\nu_{f\Lambda}(A) = \int\limits_X f(x) \lambda^x(A) \, \mu(dx)$$

и показали, что $\|\nu_{f\Lambda}\| \leq 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$. Следовательно, для всех $g \in B_1(Y)$ имеем

$$\int\limits_Y g(y) \, \nu_{f\Lambda}(dy) \leq 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}},$$

что дает оценку $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} \leq 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$.

Согласно теореме 3.1 для всяких $\Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ и $B \in \mathscr{B}$ можно задать меру $\int\limits_B \lambda^x \, \mu(dx)$ на $\mathscr{A}$ посредством

$$\Bigl(\int\limits_B \lambda^x \, \mu(dx)\Bigr)(A) = \int\limits_B \lambda^x(A) \, \mu(dx) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{A}.$$

В обозначениях доказательства теоремы 3.1 это мера $\nu_{I_B \cdot \Lambda}$. Конечно, это же можно сделать и в случае отображений со значениями в пространстве комплексных мер на $\mathscr{A}$. Для иллюстрации этого определения заметим, что

$$\int\limits_{[0,1]} \delta_x \, \mu(dx) = \mu,$$

где μ — мера Лебега.

Замечание 3.3. Для некоторых пространств удобнее использовать меньшие подмножества в $B_1(X)$ и $B_1(Y)$, задающие ту же самую норму $\| \cdot \|_{\mathfrak{L},1}$.

Предположим, что $\Phi \subset B_1(X)$ и $\Psi \subset B_1(Y)$ — подмножества с тем свойством, что для каждой вещественной меры m на $\mathscr{B}$ и каждой функции $f \in B_1(X)$ имеет место неравенство

$$\int_X f\,dm \le \sup_{\varphi\in\Phi} \int_X \varphi\,dm$$

и аналогично для каждой меры η на $\mathscr{A}$ и каждой функции $g \in B_1(Y)$ имеет место неравенство

$$\int_Y g\,d\eta \le \sup_{\psi\in\Psi} \int_Y \psi\,d\eta.$$

Тогда

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\varphi\in\Phi,\,\psi\in\Psi} \int_X \int_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx). \tag{3.3}$$

В самом деле, если функция $f \in B_1(X)$ фиксирована, можно заменить множество $B_1(Y)$ в (3.2) множеством Ψ при взятии супремума интегралов по мере $\nu_{f\Lambda}$. Далее, когда функция $\psi \in \Psi$ фиксирована, супремум

$$\int_X \int_Y f(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx)$$

по $f \in B_1(X)$ может быть заменен супремумом по $\varphi \in \Phi$, так как этот интеграл можно записать как интеграл от f относительно меры m, заданной плотностью Радона — Никодима

$$\varrho(x) = \int_Y \psi(y)\,\lambda^x(dy)$$

относительно μ. Та же самая самая норма может быть определена равенством

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\varphi\in\Phi,\psi\in\Psi} \int_X \left|\int_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\right| \mu(dx). \tag{3.4}$$

В самом деле, правая часть (3.3) мажорируется правой частью (3.4). С другой стороны, если $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$ фиксированы и $\varepsilon > 0$, можно взять функцию ϱ и определенную выше меру m и найти такую функцию $\varphi_1 \in \Phi$, что

$$\int_X |\varphi(x)|\,m(dx) \le \int_X \varphi_1(x)\,m(dx) + \varepsilon.$$

Значит, правая часть (3.4) оценивается правой частью (3.3) плюс ε. Полагая $\varepsilon \to 0$, получаем наше утверждение.

Например, если X и Y — полные сепарабельные метрические пространства, то в качестве Φ и Ψ можно взять подходящие счетные наборы непрерывных функций с модулями не больше 1 или подходящие счетные наборы функций с конечными множествами значений. Последнее всегда возможно, если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются счетно-порожденными, что выполнено, например, в случае, когда X и Y — суслинские пространства (см. [1, следствие 6.7.5]). Если лишь $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, можно использовать $\Phi = B_1(X)$ и взять в качестве Ψ счетное множество в $B_1(Y)$, состоящее из функций с конечным числом значений, принимаемых на множествах из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$. Если

Y — компактное метрическое пространство, можно взять в качестве Ψ счетное множество, плотное в единичном шаре пространства $C_b(Y)$ ограниченных непрерывных функций на Y с его sup-нормой.

Замечание 3.4. Если $\Lambda_1 = (\lambda_1^x), \Lambda_2 = (\lambda_2^x) \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, то

$$\|\nu_{\Lambda_1} - \nu_{\Lambda_2}\| \le 2\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}},$$

так как для всякого $A \in \mathscr{A}$ имеем

$$|\nu_{\Lambda_1}(A) - \nu_{\Lambda_2}(A)| \le \int\limits_X |\lambda_1^x(A) - \lambda_2^x(A)|\,\mu(dx) \le \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}}.$$

В типичных случаях пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ несепарабельно, поскольку оно содержит подпространство, изоморфное пространству $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с вариационной нормой. В самом деле, всякая мера $\sigma \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ задает элемент Λ с $\lambda^x \equiv \sigma$, для которого верны оценки

$$\mu(X)\|\sigma\|/2 \le \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{A \in \mathscr{A}} |\sigma(A)|\mu(X) \le \mu(X)\|\sigma\|.$$

Пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ шире пространства $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ измеримых мерозначных отображений с μ-интегрируемой вариацией. Рассмотрим пример отображения из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, для которого функция $x \mapsto \|\lambda^x\|$ не является μ-интегрируемой.

Пример 3.5. Пусть $X = Y = [0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и μ — мера Лебега. Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и каждого $x \in J_n = ((n+1)^{-1}, n^{-1}]$ пусть λ^x — мера с плотностью $n\sin(2\pi ny)$ на $[0,1]$. Для всяких борелевского множества $A \subset [0,1]$ и $x \in J_n$ имеем

$$\lambda^x(A) = n\int\limits_A \sin(2\pi ny)\,dy = n(I_A, \varphi_n)_{L^2}, \quad \varphi_n(y) = \sin(2\pi ny).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \lambda^x(A)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1}(I_A, \varphi_n)_{L^2},$$

где ряд сходится, так как $\sum\limits_n |(I_A, \varphi_n)_{L^2}|^2 < \infty$. Однако интеграл от $\|\lambda^x\|$ бесконечен, поскольку

$$\|\lambda^x\| = n\int\limits_0^1 |\sin(2\pi ny)|\,dy \ge n\int\limits_0^1 |\sin(2\pi ny)|^2\,dy = \frac{n}{2}$$

при $x \in J_n$ и длина J_n равна $n^{-1}(n+1)^{-1}$.

Вместо $\sin(2\pi ny)$ можно использовать функции Радемахера (см. [3]). В этом примере построенное отображение не входит в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, но приближается элементами из $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ относительно нормы $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Неясно, всегда ли $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ плотно в $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$.

Теперь построим пример, показывающий, что $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ неполно в типичных случаях.

Пусть μ — мера Лебега на $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$. Возьмем винеровский процесс $\{w_t(\omega)\}_{t\in[0,1]}$ на вероятностном пространстве $([0,1],\mathscr{B},\mu)$ (см. [4] или [5]) и соответствующий броуновский мост

$$b_t(\omega) = w_t(\omega) - tw_1(\omega).$$

Ниже используется стохастический интеграл Винера

$$\int_0^1 h(s)\,dw_s$$

для неслучайных функций $h\in L^2[0,1]$, представляющий собой гауссовскую случайную величину ξ с нулевым средним и дисперсией (средним ξ^2), равной $\|h\|^2_{L^2}$ (см. [4] или [5]). Это задает также стохастический интеграл относительно db_s. Такой интеграл не является интегралом типа Стилтьеса, но если функция h непрерывно дифференцируема, то верна следующая формула интегрирования по частям (см. [5, §2.2]):

$$\int_0^1 h(s)\,dw_s = h(1)w_1 - \int_0^1 h'(s)\,w_s\,ds,$$

которая дает и аналогичную формулу с b_s:

$$\int_0^1 h(s)\,db_s = -\int_0^1 h'(s)\,b_s\,ds.$$

Положим

$$c_n = (1+\ln|n|)^{-1},\ n\neq 0,\ c_0 = 0,$$

$$\xi_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^1 b_s(\omega)\exp(-i2\pi ns)\,ds\ \exp(i2\pi nt),$$

$$\xi_{N,t}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z},\,|n|\le N} c_n \int_0^1 b_s(\omega)\exp(-i2\pi ns)\,ds\ \exp(i2\pi nt).$$

Эти процессы вещественны, мы используем комплексный базис в L^2 лишь для упрощения обозначений. Рассмотрим отображение Λ_N такое, что λ_N^ω есть мера с плотностью $\partial_t\xi_{N,t}(\omega)$ относительно меры Лебега на $[0,1]$, т. е. $\xi_{N,t}(\omega)$ есть функция распределения меры λ_N^ω.

Теорема 3.6. *Последовательность $\{\Lambda_N\}$ фундаментальна в $\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, но не имеет предела в этом пространстве.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\{\Lambda_N\}$ — последовательность Коши. Пусть $f\in B_1(X)$, $g\in B_1(Y)$ и $M>N$. Оценим

$$D_{N,M} := \sum_{n:N<|n|\le M} c_n \int_0^1\int_0^1 f(\omega)g(t)\int_0^1 \exp(-i2\pi ns)b_s(\omega)\,ds \\ \times (i2\pi n)\exp(i2\pi nt)\,dtd\omega.$$

Заметим, что по упомянутой выше формуле интегрирования по частям

$$(i2\pi n)\int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)b_s(\omega)\,ds = \int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,db_s(\omega)$$

$$= \int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,dw_s(\omega) = \eta_n(\omega)$$

для всякого $n \neq 0$, так как $db_s = dw_s - w_1 ds$ и интеграл от $\exp(-i2\pi ns)$ по $[0,1]$ равен нулю. Итак,

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(\omega)g(t)(\lambda_M^\omega - \lambda_N^\omega)(dt)\,d\omega = \sum_{n: N<|n|\le M} c_n g_n \int\limits_0^1 f(\omega)\eta_n(\omega)\,d\omega,$$

где

$$g_n = \int\limits_0^1 g(t)\exp(i2\pi nt)\,dt.$$

Поскольку функции $\exp(-i2\pi ns)$ ортонормированы в $L^2[0,1]$, их стохастические интегралы η_n относительно винеровского процесса также ортонормированы в $L^2[0,1]$. Значит,

$$\sum_n \left|\int\limits_0^1 f(\omega)\eta_n(\omega)\,d\omega\right|^2 \le \|f\|_{L^2}^2 \le 1.$$

Кроме того, $\sum\limits_n |g_n|^2 \le \|g\|_{L^2}^2 \le 1$, что по неравенству Коши дает оценку

$$D_{N,M} \le c_N.$$

Итак, $\{\Lambda_N\}$ — последовательность Коши.

Предположим, что она сходится к некоторому элементу $\Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, заданному борелевскими мерами λ^ω на $[0,1]$. Поскольку

$$\xi_{N,t}(\omega) = \lambda_N^\omega([0,t))$$

и $\xi_{N,t}(\omega) \to \xi_t(\omega)$ для всяких фиксированных ω и t, заключаем, что

$$\lambda^\omega([0,t)) = \xi_t(\omega) \tag{3.5}$$

при фиксированном t для почти всех ω. В самом деле, найдутся такие возрастающие номера N_k, что

$$\|\Lambda - \Lambda_{N_k}\|_{\mathfrak{L},1} \le 2^{-k}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного t и всякой функции $f \in B_1(X)$ имеем

$$\left|\int\limits_0^1 f(\omega)\bigl(\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))\bigr)\,d\omega\right| \le 2^{-k}.$$

Беря в качестве $f(\omega)$ знак $\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))$, получаем

$$\int\limits_0^1 \bigl|\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))\bigr|\,d\omega \le 2^{-k},$$

что есть

$$\int_0^1 |\lambda^\omega([0,t)) - \xi_{N_k,t}(\omega)|\, d\omega \le 2^{-k}.$$

Полагая $k \to \infty$, приходим к (3.5).

Чтобы получить противоречие, остается показать, что $\xi_t(\omega)$ имеет неограниченную вариацию для почти каждого ω. Без множителей $(1 + \ln n)^{-1}$ это было бы стандартным фактом для броуновского движения или броуновского моста. Эти множители приводят к иному центрированному гауссовскому процессу. Однако этот процесс ξ_t имеет траектории, которые гёльдеровы со всяким показателем $\alpha \in (0, 1/2)$. В самом деле, записав ξ_t, как и выше, в виде

$$\xi_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{c_n}{i2\pi n} \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\, dw_s \ \exp(i2\pi nt),$$

получаем, что комплексные гауссовские случайные величины с нулевым средним

$$\eta_n = \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\, dw_s$$

независимы и имеют вариации 1. Поскольку

$$\sum_{n: 2^j \le |n| \le 2^{j+1}} \frac{1}{(1+\ln|n|)^2} \frac{1}{|n|^2} = O(2^{-j/2}),$$

процесс ξ_t имеет выборочные траектории, которые гёльдеровы со всяким показателем $\alpha < 1/2$ (см. [6, гл. VII, теорема 2]). Это же можно усмотреть из теоремы Колмогорова о гёльдеровости выборочных траекторий случайных процессов (см. [5]). В самом деле, среднее случайной величины $|\xi_\tau(\omega) - \xi_t(\omega)|^2$ оценивается через $|\tau - t|$, ибо оно не больше среднего $|b_\tau(\omega) - b_t(\omega)|^2$. Это следует из того, что дисперсия ряда $\sum\limits_n \alpha_n \eta_n$ с числовыми коэффициентами α_n равна $\sum\limits_n |\alpha_n|^2$ и $|c_n| \le 1$. С другой стороны, среднее $|b_\tau(\omega) - b_t(\omega)|^2$ равно $|\tau - t| - |\tau - t|^2$, так как среднее $w_\tau w_t$ равно $\min(\tau, t)$. Значит, среднее $|\xi_\tau(\omega) - \xi_t(\omega)|^4$ оценивается через $|\tau - t|^2$.

Предположим теперь, что $\xi_t(\omega)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда в силу результата Зигмунда (см. [7, гл. IX, п. 3, следствие 1] или [8, гл. VI, теорема 3.6]) ряд Фурье функции $\xi_t(\omega)$ сходится абсолютно. Однако ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \frac{1}{1+\ln|n|} \frac{1}{|n|} \left| \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\, dw_s \right|$$

расходится почти наверное. Это вытекает из теоремы Колмогорова о трех рядах: если ξ_n — независимые случайные величины, причем ряд из ξ_n сходится почти всюду, то для всякого $c > 0$ сходится ряд из средних ξ_n^c, где $\xi_n^c = \xi_n$ при $|\xi_n| \le c$ и $\xi_n^c = 0$ при $|\xi_n| > c$ (см. [9, гл. IV, §2, теорема 2]). Легко видеть, что в нашем случае сходимость средних ξ_n^c влечет сходимость средних ξ_n, которая не имеет места, как проверено ниже. Заметим также, что по закону нуля или единицы Колмогорова наш ряд сходился бы почти всюду, если бы он сходился на множестве положительной меры. Есть также иное обоснование:

случайные величины, заданные стохастическими интегралами от $\exp(-i2\pi ns)$, могут быть представлены (после интегрирования по частям) как непрерывные линейные функционалы на пространстве $C[0,1]$ с мерой Винера. Тогда частные суммы ряда выше являются непрерывными полунормами на $[0,1]$, которые возрастают и имеют конечный предел почти всюду относительно меры Винера. Следовательно, их предел — измеримая полунорма, значит, она интегрируема по теореме Ферника (см. [10, теорема 2.8.5]). Поэтому в случае сходимости этот ряд был бы интегрируем по ω. Однако интегралы

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\, dw_s \right| d\omega$$

отделены от нуля. В самом деле,

$$\int_0^1 \cos(2\pi ns)\, dw_s$$

есть центрированная гауссовская случайная величина с дисперсией

$$\int_0^1 |\cos(2\pi ns)|^2\, ds = 1/2.$$

Значит, среднее ее модуля равно $\pi^{-1/2}$. $\square$

Стоит отметить, что элементы $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ интегрируемы по Петтису, если $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ наделить топологией сходимости на множествах или топологией двойственности с пространством $B_{\mathscr{A}}$ ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций, ибо сопряженные к $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с этими топологиями суть пространство простых $\mathscr{A}$-измеримых функций и $B_{\mathscr{A}}$ соответственно. Например, для функционала L, порожденного множеством $A \in \mathscr{A}$, интеграл Петтиса от Λ по множеству $B \in \mathscr{B}$ есть мера $\nu_{I_B\Lambda}$, так как интеграл от $L(\lambda^x) = \lambda^x(A)$ по B равен $\nu_{I_B\Lambda}(A)$. Однако интегрируемости по Петтису может не быть, если мы рассматриваем $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ как банахово пространство с вариационной нормой. В самом деле, если $Y = [0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и $X = [0,1]$ с мерой Лебега μ, то существует непрерывный линейный функционал L на $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с $L(\mu) = 1$ и $L(\delta^x) = 0$ при всех x. Тогда интеграл от $L(\delta_x)$ равен нулю. Более того, функция $L(\lambda^x)$ может быть неизмеримой по Лебегу. Достаточно взять неизмеримую функцию ψ, положить $L(\delta_x) = \psi(x)$, распространить L по линейности на линейные комбинации дираковских мер и затем продолжить на все $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ по теореме Хана — Банаха.

§ 4. Пространство отображений с нормой типа Канторовича

Еще одно интересное пространство мерозначных отображений возникает, если Y — полное сепарабельное метрическое пространство с его борелевской σ-алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{B}(Y)$, а пространство мер $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ наделено нормой Канторовича — Рубинштейна

$$\|\nu\|_{KR} = \sup\left\{ \int_Y \varphi(y)\, \nu(dy) : \varphi \in \mathrm{Lip}_1,\ |\varphi| \le 1 \right\},$$

где Lip_1 — множество 1-липшицевых функций на Y. Норма Канторовича — Рубинштейна метризует слабую топологию на множестве неотрицательных мер (но не на знакопеременных мерах), см. [1] или [11]. Если Y содержит бесконечную последовательность Коши, то $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ неполно относительно нормы Канторовича — Рубинштейна. В самом деле, если бы эта норма была полной, то по теореме Банаха она была бы эквивалентна вариационной норме ввиду оценки $\|\nu\|_{KR} \le \|\nu\|$. Однако если $\{a_n\}$ — последовательность Коши, то $\|\delta_{a_n} - \delta_{a_k}\|_{KR} = d(a_n, a_k)$ для достаточно больших n и k, хотя $\|\delta_{a_n} - \delta_{a_k}\| = 2$ при $a_n \ne a_k$. Тем не менее метрика d_{KR}, порожденная этой нормой, полна на множестве неотрицательных мер. Это влечет следующее утверждение.

Пусть $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ — пространство классов эквивалентности μ-измеримых отображений

$$f : X \to (\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$$

таких, что функция $x \mapsto \|f(x)\|_{KR}$ является μ-интегрируемой (она μ-измерима из-за сепарабельности Y). Это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{1,KR} = \int\limits_Y \|f(x)\|_{KR}\, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности. Ясно, что пространство $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ неполно, если Y не дискретно. Заметим, что пространство $(\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$ сепарабельно, поэтому пространство $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ имеет упомянутый во введении вид $L^1(\mu, E)$ с $E = (\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$, но здесь E неполно.

Предложение 4.1. *Подмножество в $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_{1,KR}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.3 предположим, что $\{f_n\} \subset L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|f_{n+1} - f_n\|_{1,KR} \le 2^{-n}$, $f_1 = 0$. В силу того же рассуждения, что и выше, она сходится к отображению $f \in L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, для которого $f(x) \ge 0$, так как множество неотрицательных мер в $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ полно относительно метрики d_{KR}. $\square$

Аналогичный результат верен для пространства $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, если Y является более специальным пространством.

Теорема 4.2. *Предположим, что Y — такое хаусдорфово топологическое пространство с его борелевской σ-алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{B}(Y)$, что все ограниченные меры на $\mathscr{B}(Y)$ радоновы и компактные множества в Y метризуемы* (*например, Y — суслинское пространство*). *Тогда подмножество в $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай компактного метризуемого Y. Пусть $\{\Lambda_n\} \subset \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, $\Lambda_n = (\lambda_n^x)$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|\Lambda_{n+1} - \Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} \le 2^{-n}$, $\Lambda_1 = 0$. Можно выбрать версии, для которых функции $x \mapsto \lambda_n^x(A)$ являются $\mathscr{B}$-измеримыми для всех $A \in \mathscr{A}$. Найдется счетное множество Ψ, плотное в единичном шаре $C_b(Y)$. Воспользуемся замечанием 3.3 и вычислим норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1} \le 2\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ с помощью (3.4) с $\Phi = B_1(X)$. Для каждого фиксированного $\psi \in \Psi$ имеем μ-почти всюду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_Y \psi(y)\lambda^x_{n+1}(dy) - \int\limits_Y \psi(y)\lambda^x_n(dy)\right| < \infty,$$

поскольку ряд из интегралов относительно μ сходится. Следовательно, множество X_0 всех таких точек $x \in X$, что ряд выше сходится для всех $\psi \in \Psi$, принадлежит $\mathscr{B}$ и $\mu(X\backslash X_0) = 0$. Тогда для $x \in X_0$ имеем сходимость ряда без модулей под знаком интеграла, что означает сходимость интегралов от ψ относительно мер λ^x_n. Это дает слабую сходимость мер λ^x_n к некоторым неотрицательным борелевским мерам λ^x, $x \in X_0$. В самом деле, поскольку Y компактно, последовательность мер λ^x_n имеет предельную точку в слабой топологии, но из-за сходимости интегралов от функций из Ψ предельная точка единственна.

Легко видеть, что функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ являются μ-измеримыми для всех $A \in \mathscr{B}(Y)$, ибо таковы все функции

$$\int\limits_Y h(y)\,\lambda^x(dy), \quad h \in \Psi,$$

а тогда и все такие функции с $h \in C_b(Y)$. Интеграл от $\lambda^x(Y)$ по мере μ конечен по теореме Фату, поскольку

$$\int\limits_X \lambda^x_n(Y)\,\mu(dx) \le \|\Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} \le \sup_j \|\Lambda_j\|_{\mathfrak{L}}.$$

Следовательно, получаем отображение $\Lambda = (\lambda^x)$ из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ с неотрицательными мерами λ^x. Остается доказать сходимость Λ_n к Λ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$. Теперь снова используем замечание 3.3 для вычисления нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1}$ с помощью (3.4). Имеем $\|\Lambda_n - \Lambda_k\|_{\mathfrak{L},1} \le 2^{1-n}$ при $k \ge n$. Зафиксируем n. Для всяких $\varphi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$ имеем

$$\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x_k(dy)\,\mu(dx) \to \int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx)$$

для всех $x \in X_0$ в силу слабой сходимости λ^x_k к λ^x. Следовательно, по теореме Фату

$$\int\limits_X\left|\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x_n(dy)\,\mu(dx) - \int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\right|\mu(dx) \le 2^{1-n}.$$

Взяв супремумы по φ и ψ, получаем $\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathfrak{L},1} \le 2^{1-n}$.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть $\{\Lambda_n\} \subset \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, $\Lambda_n = (\lambda^x_n)$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|\Lambda_{n+1} - \Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} \le 2^{-n}$, $\Lambda_1 = 0$. Из замечания 3.4 вытекает, что борелевские меры ν_{Λ_n}, определенные формулой (3.1), сходятся по вариации, значит, их предел есть ограниченная неотрицательная борелевская мера ν на Y, которая автоматически радонова по нашему предположению. Более того,

$$\|\nu - \nu_{\Lambda_n}\| \le 2^{1-n}.$$

Выберем возрастающие компактные множества $K_j \subset Y$ так, что $\nu(Y\backslash K_j) \le 2^{-j}$. Зафиксируем j. Тогда получаем элементы Λ^j_n из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, определенные следующим образом:

$$\Lambda^j_n = (\lambda^{j,x}_n), \quad \lambda^{j,x}_n(A) := \lambda^x_n(A \cap K_j).$$

Имеем
$$\big\|\Lambda^j_{n+1}-\Lambda^j_n\big\|_{\mathfrak{L}}\le \|\Lambda_{n+1}-\Lambda_n\|_{\mathfrak{L}}\le 2^{-n}.$$
Поскольку все меры $\lambda^{j,x}_n$ сосредоточены на метризуемом компактном множестве K_j, заключаем в силу первого этапа, что при $n\to\infty$ отображения Λ^j_n сходятся к элементу $\Lambda^j=(\lambda^{j,x})\in\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, где все меры $\lambda^{j,x}\ge 0$ сосредоточены на K_j. Кроме того, при всех $n\ge 1$ выполнено неравенство
$$\|\Lambda^j_n-\Lambda^j\|_{\mathfrak{L}}\le 2^{1-n}. \tag{4.1}$$
Заметим, что для μ-почти всех x и всех j
$$\lambda^{j,x}\le\lambda^{j+1,x}.$$
Достаточно проверить это для каждого фиксированного j. Напомним, что согласно первому этапу почти все меры $\lambda^{j,x}$ являются слабыми пределами ограничений мер λ^x_n на K_j и аналогично для $\lambda^{j+1,x}$. Поэтому нам нужен следующий факт: если неотрицательные меры η_n на компактном метрическом пространстве K слабо сходятся к мере η и их ограничения на меньшее компактное множество S слабо сходятся к мере ξ на S, то $\xi\le\eta$ на S. Покажем, что $\xi(C)\le\eta(C)$ для всякого компактного множества $C\subset S$. Пусть $\varepsilon>0$. Найдется такая непрерывная функция $f\colon K\to[0,1]$, что
$$\xi(C)\le\int_S f\,d\xi,\quad \eta(C)\ge\int_K f\,d\eta-\varepsilon.$$
Поскольку
$$\int_S f\,d\xi=\lim_{n\to\infty}\int_S f\,d\eta_n,\quad \int_K f\,d\eta=\lim_{n\to\infty}\int_K f\,d\eta_n,\quad \int_S f\,d\eta_n\le\int_K f\,d\eta_n,$$
получаем оценку $\xi(C)\le\eta(C)-\varepsilon$, что доказывает наше утверждение. Следовательно, для μ-почти всех x последовательность мер $\lambda^{j,x}$ возрастает. Такое же рассуждение, как и выше, показывает, что для почти всех x последовательность $\lambda^x_n(Y)$ сходится к конечному пределу, так как ряд из интегралов от $|\lambda^x_{n+1}(Y)-\lambda^x_n(Y)|$ сходится. Поскольку $\lambda^{j,x}_n(Y)\le\lambda^x_n(Y)$ и $\lambda^{j,x}(Y)\le\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^x_n(Y)$, заключаем, что для μ-почти всех x меры $\lambda^{j,x}$ возрастают к ограниченной борелевской мере λ^x, для которой функция $x\mapsto\lambda^x$ является μ-измеримой. Интегралы от функций $\lambda^x_n(Y)$ относительно μ, равные $\nu_{\Lambda_n}(Y)$, сходятся к $\nu(Y)$ и равномерно ограничены. По теореме Фату функция $x\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^x_n(Y)$ оказывается μ-интегрируемой, значит, меньшая функция $x\mapsto\lambda^x(Y)$ также μ-интегрируема.

Наконец, покажем, что $\Lambda=(\lambda^x)$ является пределом $\{\Lambda_n\}$. Имеем
$$\begin{aligned}\|\Lambda_n-\Lambda^j_n\|_{\mathfrak{L}}&=\sup_{A\in\mathscr{A}}\int_X|\lambda^x_n(A)-\lambda^x_n(A\cap K_j)|\,\mu(dx)\\ &=\sup_{A\in\mathscr{A}}\int_X(\lambda^x_n(A)-\lambda^x_n(A\cap K_j))\,\mu(dx)\\ &=\sup_{A\in\mathscr{A}}(\nu_n(A)-\nu_n(A\cap K_j))=\nu_n(Y\backslash K_j)\le\|\nu_n-\nu\|+4^{-j}.\end{aligned}$$
Аналогично, поскольку $\lambda^x\ge\lambda^{j,x}$ и $\lambda^x(Y)-\lambda^{j,x}(Y)\to 0$ почти всюду, имеем
$$\|\Lambda-\Lambda^j\|_{\mathfrak{L}}\le\int_X(\lambda^x(Y)-\lambda^{j,x}(Y))\,\mu(dx)\to 0.$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем такое j, что $\|\Lambda - \Lambda^j\|_{\mathfrak{L}} \le \varepsilon/4$ и $4^{-j} \le \varepsilon$. В силу (4.1) и оценок выше получаем

$$\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le \left\|\Lambda_n - \Lambda_n^j\right\|_{\mathfrak{L}} + \left\|\Lambda_n^j - \Lambda^j\right\|_{\mathfrak{L}} + \|\Lambda_j - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le \|\nu_n - \nu\| + \frac{\varepsilon}{2} + 2^{1-n} \le \varepsilon,$$

когда $\|\nu_n - \nu\| + 2^{1-n} \le \varepsilon/2$, что дает желаемое заключение. □

Мы не знаем, важны ли дополнительные предположения об Y, использованные в доказательстве этого утверждения.

Наконец, стоит отметить, что множество $\mathscr{P}$, состоящее из таких отображений $\Lambda = (\lambda^x)$, что почти каждая мера λ^x является вероятностной, полно с метрикой из банахова пространства $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, а также с метрикой из нормированного пространства $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Однако топологии на $\mathscr{P}$, порожденные этими метриками, не совпадают. Рассмотрим пример, где X и Y — единичный отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и μ — мера Лебега.

Пример 4.3. Для каждого $n \ge 1$ возьмем разбиение отрезка $[0,1]$ на n полуинтервалов $U_1, \ldots, U_n$ длины $1/n$ и положим $\lambda_n^x(dy) = (1 + \sin(2\pi k y))\,dy$ при $x \in U_k$. Соответствующие отображения $\Lambda_n = (\lambda_n^x)_{x\in[0,1]}$ сходятся в $\mathscr{P}$ с метрикой из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ к отображению $\Lambda = (\lambda^x)_{x\in[0,1]}$, где $\lambda^x = \lambda$ — мера Лебега для всех $x \in [0,1]$, но нет сходимости по метрике из $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Действительно, для всякого борелевского множества A из $[0,1]$ имеем

$$\int_0^1 |\lambda_n^x(A) - \lambda^x(A)|\,dx = n^{-1} \sum_{k=1}^n \left| \int_A \sin(2\pi k x)\,dx \right|$$
$$\le n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^n \left| \int_A \sin(2\pi k y)\,dy \right|^2 \right)^{1/2} \le n^{-1/2} \|I_A\|_{L^2}.$$

Следовательно, $\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le n^{-1/2}$. С другой стороны,

$$\|\Lambda_n - \Lambda\|_1 = \int_0^1 \|\lambda_n^x - \lambda^x\|\,dx = n^{-1} \sum_{k=1}^n \int_0^1 |\sin(2\pi k y)|\,dy \ge 4^{-1}$$

для достаточно больших n, так как интегралы от $|\sin(2\pi k y)|$ больше 1/4 для больших k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bogachev V. I.* Measure theory. V. 2. New York: Springer, 2007.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. I. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М.: Наука, 2017.
4. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
5. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
6. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. 6-е изд.. М.: МЦНМО, 2017.
10. *Bogachev V. I.* Gaussian measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1998.

11. *Bogachev V. I.* Weak convergence of measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2018.

Поступила в редакцию 15 января 2025 г.
После доработки 15 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Арсенович Милош (ORCID 0000-0002-5450-2407)
Белградский университет, факультет математики,
Студенческая пл. 16, Белград, Сербия
milos.arsenovic@matf.bg.ac.rs

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048
vibogach@mail.ru

Крстич Михайло (ORCID 0000-0003-3575-3216)
Белградский университет, факультет математики,
Студенческая пл. 16, Белград, Сербия
mihailo.krstic@matf.bg.ac.rs