Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 510.5

О ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДПОРЯДКОВ С КОНКАТЕНАЦИЕЙ

Д. Б. Алиш, Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев

Аннотация. Предпорядок R называют линейным, если соответствующий фактор-порядок является линейно упорядоченным. Данная работа посвящена изучению вычислимой сводимости на бинарных отношениях. В работе исследуется степенная структура **Celps** вычислимо перечислимых линейных предпорядков относительно вычислимой сводимости.

Операция конкатенации дает упорядоченную сумму двух данных линейных предпорядков. Доказано, что элементарная теория структуры **Celps** с операцией конкатенации рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка. Также показано, что теория всех счетных линейных предпорядков (относительно вычислимой сводимости) с операцией конкатенации рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.201

Ключевые слова: вычислимая сводимость, позитивный линейный предпорядок, вычислимо перечислимый предпорядок, арифметика первого порядка, счетный линейный предпорядок.

1. Введение

В работе изучается вычислимая сводимость для предпорядков, заданных на множестве натуральных чисел ω. Пусть R и S — бинарные отношения на ω. Отношение R *вычислимо сводится* к S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует всюду определенная вычислимая функция $f(x)$ такая, что для любых $x, y \in \omega$ выполнено

$$(x\,R\,y) \;\Leftrightarrow\; (f(x)\,S\,f(y)).$$

Систематические исследования вычислимой сводимости для позитивных (вычислимо перечислимых) отношений эквивалентности были инициированы Ю. Л. Ершовым [1, 2]. В частности, он построил один из первых примеров универсальной позитивной эквивалентности (т. е. позитивной эквивалентности E такой, что любая позитивная эквивалентность F вычислимо сводится к E). Вначале исследования в области вычислимой сводимости были в основном сосредоточены на естественных подклассах универсальных позитивных эквивалентностей (см., например, статьи [3, 4] и недавний обзор [5]).

Исследование поддержано Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP19576325). Работа Н. А. Баженова выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0011).

В последние годы исследования сфокусированы на структурных свойствах частично упорядоченного множества $(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$. Множество **Ceers** содержит все $\leq_c$-степени позитивных эквивалентностей. Отметим, что аббревиатура *ceer* (которая расшифровывается как “computably enumerable equivalence relation”) была введена в [6]. В настоящее время эта аббревиатура стала стандартным синонимом термина «позитивная эквивалентность» (positive equivalence).

В данной работе изучается сложность элементарных теорий для некоторых естественных степенных структур, связанных с вычислимой сводимостью.

В теории вычислимости для многих естественных степенных структур $\mathbf{D}$ их элементарные теории $\mathrm{Th}(\mathbf{D})$ имеют максимальную возможную m-степень. Приведем лишь несколько примеров таких структур.

• Симпсон [7] доказал, что для верхней полурешетки $\mathbf{D}_T$ всех тьюринговых степеней ее теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_T)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

• Шор [8] доказал, что для полурешетки $\mathbf{D}_T(\leq \mathbf{0}')$ Δ^0_2 тьюринговых степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_T(\leq \mathbf{0}'))$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.

• Нероуд и Шор [9] доказали, что для полурешетки $\mathbf{D}_m$ всех m-степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_m)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

• Нис [10] доказал, что для полурешетки $\mathbf{R}_m$ в.п. m-степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{R}_m)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.

Оказывается, что для вычислимой сводимости соответствующие теории $\mathrm{Th}(\mathbf{D})$ также обычно имеют максимально возможную сложность.

В фундаментальной работе [11] Эндрюс и Сорби разработали сложные методы работы с $\leq_c$-степенями позитивных отношений эквивалентности. На основе этих методов в [12] была доказана следующая теорема: теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка. После этого были получены следующие результаты в этом направлении.

(a) Для множества **Ceprs**, содержащего $\leq_c$-степени всех в.п. предпорядков, теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Ceprs}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка [13].

(b) Для множества **ER**, содержащего $\leq_c$-степени всех отношений эквивалентности на ω, теория $\mathrm{Th}(\mathbf{ER}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка [14].

(c) В [15] результаты работы [12] перенесены на случай обобщенной теории вычислимости на несчетных множествах.

В данной работе продолжаются исследования [12–14]. В [13] выделена важная подструктура структуры **Ceprs** (т. е. структуры в.п. предпорядков), которая интересна и сама по себе: эта подструктура **Celps** содержит $\leq_c$-степени всех *в.п. линейных предпорядков*.

Напомним, что *предпорядок* — это рефлексивное и транзитивное отношение. Говорят, что предпорядок R *линейный*, если все $x, y \in \mathrm{dom}(R)$ удовлетворяют следующему свойству: $(x\,R\,y) \vee (y\,R\,x)$.

В статье [13] структура $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ использовалась для того, чтобы установить элементарную определимость $(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$ в структуре предпорядков $(\mathbf{Ceprs}, \leq_c)$. На основе этого результата об элементарной определимости в [13] получен результат (a), упомянутый выше. Отметим, что вопрос о точной сложности теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ остается открытым.

В данной работе рассматривается дополнительная операция $\oplus$ на линейных предпорядках. Пусть L и R — линейные предпорядки на ω. Их *конкатенация* (или упорядоченная сумма) $L \oplus R$ задается следующим образом. Для $x, y \in \omega$ соотношение $(x, y) \in L \oplus R$ верно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- $x = 2k$, $y = 2m$ и $(k, m) \in L$;
- $x = 2k + 1$, $y = 2m + 1$ и $(k, m) \in R$;
- $x = 2k$ и $y = 2m + 1$.

Говоря неформально, операция конкатенации $\oplus$ соответствует (обычной) сумме порядковых типов (см., например, определение 1.29 в [16]). Нетрудно проверить следующее: если линейные предпорядки L и R вычислимо перечислимы, то предпорядок $L \oplus R$ также вычислимо перечислим. Следовательно, операция $\oplus$ корректно определена на множестве **Celps**.

Работа построена следующим образом. Разд. 2 содержит необходимые предварительные сведения. В разд. 3 доказывается, что теория в.п. линейных предпорядков с конкатенацией (т. е. теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$) рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка (теорема 3.1 и следствие 3.2).

В разд. 4 разработанные методы применяются к классу **LP**, содержащему $\leq_c$-степени всех счетных линейных предпорядков на ω. Доказывается, что $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка (теорема 4.1).

2. Предварительные сведения

Если не оговорено обратное, предполагаем, что каждое рассматриваемое бинарное отношение задано на ω. Бинарное отношение R является *предпорядком* если R рефлексивно и транзитивно. Для предпорядка R определяется соответствующее отношение эквивалентности $\mathrm{supp}(R)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(R) = \{(x, y) : (x\, R\, y) \,\&\, (y\, R\, x)\}.$$

Для элемента $a \in \omega$ и отношения эквивалентности E через $[a]_E$ обозначается класс E-эквивалентности элемента a.

Для предпорядка R его $\leq_c$-степень задается стандартным образом:

$$\deg_c(R) = \{S : S \equiv_c R\}.$$

Через $\leq_{\mathbb{N}}$ обозначается стандартный линейный порядок на натуральных числах. Более подробные сведения о счетных линейных порядках можно найти в монографии [16].

Напомним, что предпорядок R является *линейным*, если все $x, y \in \omega$ удовлетворяют следующему условию: $(x\, R\, y) \vee (y\, R\, x)$. Линейный предпорядок R индуцирует естественный линейный порядок на классах $\mathrm{supp}(R)$-эквивалентности:

$$[a]_{\mathrm{supp}(R)} \leq_R [b]_{\mathrm{supp}(R)} \text{ тогда и только тогда, когда } (a\, R\, b).$$

Через **Celps** обозначаем множество всех $\leq_c$-степеней в.п. линейных предпорядков.

Как обычно, иногда будем отождествлять линейный предпорядок R и его степень $\deg_c(R)$. В случаях, когда это ясно из контекста, также будем отождествлять предпорядок R и соответствующий фактор-порядок $(\omega/\,\mathrm{supp}(R), \leq_R)$.

Для натурального числа $n \geq 1$ зададим вычислимый линейный предпорядок Lin_n следующим образом:

$$(x, y) \in \mathrm{Lin}_n \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rest}(x, n) \leq_{\mathbb{N}} \mathrm{rest}(y, n),$$

где $\mathrm{rest}(x, n)$ — это остаток от деления x на n. Для Lin_n его $\leq_c$-степень обозначается через $\mathbf{l}_n$.

Замечание 2.1. Отметим следующие простые свойства степеней $\mathbf{l}_n$:

(a) $\mathbf{l}_n <_c \mathbf{l}_{n+1} <_c \deg_c(R)$ для любого (не обязательно в.п.) линейного предпорядка R такого, что соответствующее отношение эквивалентности $\mathrm{supp}(R)$ имеет бесконечно много классов;

(b) $\mathbf{l}_n \oplus \mathbf{l}_k = \mathbf{l}_{n+k}$ для всех $n, k \geq 1$.

Известно, что частично упорядоченное множество $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ имеет наибольший элемент U (см., например, теорему 3.1 в [17]). Как обычно, такой предпорядок U называем *универсальным в.п. линейным предпорядком.* Обзор других известных результатов о частично упорядоченном множестве $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ можно найти в [18].

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем стандартную нумерацию упорядоченных пар, осуществляемую функцией

$$\langle x, y \rangle = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x.$$

Через ζ обозначается порядковый тип целых чисел.

Вычислимые линейные порядки рассматриваются на основе стандартного подхода теории вычислимых структур: вычислимый линейный порядок L задается вычислимым бинарным отношением, которое является рефлексивным, транзитивным, линейным и *антисимметричным.* Заметим, что каждый вычислимый линейный порядок L (с областью определения ω) является позитивным линейным предпорядком.

Для предпорядка R его *обращение* R^* определяется стандартным образом: $x \leq_{R^*} y$ верно тогда и только тогда, когда $y \leq_R x$.

Если L_1 и L_2 — (вычислимые) линейные порядки на ω, то полагаем, что их произведение $L_1 \cdot L_2$ имеет область определения ω и задается следующим образом. Имеет место $\langle a, b \rangle \leq_{L_1 \cdot L_2} \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда либо $b <_{L_2} d$, либо ($b = d$ и $a \leq_{L_1} c$).

Если L — линейный порядок и a, b — элементы L, то говорят, что a и b принадлежат одному и тому же *блоку* внутри L, если множество $\{x : (a \leq_L x \leq_L b) \vee (b \leq_L x \leq_L a)\}$ конечно.

Прежде чем переходить к основным результатам, установим следующий факт.

Лемма 2.2. *Операция конкатенации $\oplus$ не является формульно определимой в частично упорядоченном множестве* $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$.

Доказательство. Заметим, что отображение обращения $R \mapsto R^*$ индуцирует автоморфизм Ψ частично упорядоченного множества $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$. Выберем теперь пару вычислимых линейных порядков следующим образом: L изоморфен ω и R изоморфен ω^*. Тогда ясно, что

$$\Psi(L \oplus R) \cong \omega + \omega^*, \quad \Psi(L) \oplus \Psi(R) \cong \omega^* + \omega \cong \zeta.$$

Следовательно, $\Psi(L \oplus R) \not\equiv_c \Psi(L) \oplus \Psi(R)$, а отображение $\oplus$ не может быть определимым в $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$.

3. Интерпретация арифметики первого порядка в Celps

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 3.1. *Теория* $\mathrm{Th}(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ *m-сводится к* $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Основная идея доказательства теоремы 3.1 следует идеям теоремы 2.6 из [19]. Заметим, что структура $(\{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}, \oplus)$ изоморфна структуре $(\omega \setminus \{0\}, +)$. Таким образом, говоря неформально, наша основная цель заключается в том, чтобы получить формульную определимость для умножения $\times$ в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Эта цель достигается путем «кодирования» графика умножения $\times$ через соответствующий параметр p_L (который является вычислимым линейным порядком): будет получена формула $\psi(x, y, z; p_L)$ сигнатуры $\{\leq_c, \oplus\}$, при этом эта формула определяет умножение $(\mathbf{l}_x, \mathbf{l}_y) \mapsto \mathbf{l}_{x \times y}$. После этого необходимо «элиминировать» параметр p_L из формулы ψ.

Доказательство теоремы 3.1 состоит из двух частей. Первая часть (п. 3.1) является подготовительной: приводится список некоторых полезных множеств, формульно определимых в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Во второй части (п. 3.2) описывается нужный вычислимый линейный порядок p_L (который кодирует умножение) и приводятся формулы, дающие элементарную определимость для $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Прежде чем привести доказательство теоремы 3.1, сформулируем основное следствие этой теоремы.

Следствие 3.2. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ *рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.*

Доказательство. Напомним, что множество $A \subseteq \omega$ является *цилиндром*, если $A \times \omega \leq_1 A$. Если A — цилиндр и $B \leq_m A$, то $B \leq_1 A$ (см., например, разд. 7.6 в [20]).

Известно, что теории $\mathrm{Th}(\omega, +, \times)$ и $\mathrm{Th}(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ 1-эквивалентны. Поскольку каждая элементарная теория является цилиндром, из теоремы 3.1 вытекает, что $\mathrm{Th}(\omega, +, \times) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. С другой стороны, заметим, что структура $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ имеет $\mathbf{0}^{(3)}$-вычислимую изоморфную копию, и из этого следует, что $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus) \leq_1 \mathrm{Th}(\omega, +, \times)$. Заключаем, что теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ и $\mathrm{Th}(\omega, +, \times)$ рекурсивно изоморфны.

3.1. Вспомогательные определимые множества. В силу того, что рассматриваются $\leq_c$-степени для вычислимых линейных порядков, следует быть внимательными, когда речь идет о конкретных линейных порядках. В самом деле, нетрудно заметить, что два изоморфных вычислимых линейных порядка L_1 и L_2 могут обладать разными $\leq_c$-степенями (см., например, работу [21], в которой подробно рассмотрен случай, когда L_i изоморфны наименьшему предельному ординалу ω). Поэтому выделим некоторые конкретные «стандартные» вычислимые линейные порядки:

- ω_{st} — стандартный линейный порядок на натуральных числах;
- ω_{st}^* — это обращение для ω_{st} (т. е. $x \leq_{\omega_{st}^*} y$ тогда и только тогда, когда $y \leq_{\omega_{st}} x$);
- $\zeta_{st} = \omega_{st}^* \oplus \omega_{st}$;
- ζ_{st}^2 — это «стандартный» квадрат ζ_{st}, т. е. $(\langle i_1, j_1 \rangle, \langle i_2, j_2 \rangle) \in \zeta_{st}^2$ тогда и только тогда, когда либо $j_1 <_{\zeta_{st}} j_2$, либо ($j_1 = j_2$ и $i_1 \leq_{\zeta_{st}} i_2$).

Вначале установим следующий вспомогательный результат:

Предложение 3.3. *Следующие подмножества являются формульно определимыми в структуре* $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$*:*

(1) $\{\mathbf{l}_n\}$ *для каждого* $n \geq 1$*;*

(2) $\mathbf{Fin} = \{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}$*;*

(3) $\{\omega_{st}\}$, $\{\omega^*_{st}\}$, $\{\zeta_{st}\}$*;*

(4) $\{\zeta^2_{st}\}$.

Доказательство. Для каждого из подмножеств приведем формулу логики первого порядка, показывающую определимость этого подмножества.

(1) Степень $\mathbf{l}_1$ является наименьшей в частично упорядоченном множестве $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$, следовательно, формула

$$\psi_{\mathbf{1}}(x) := \forall y[x \leq y]$$

определяет множество $\{\mathbf{l}_1\}$. Ясно, что формула

$$\psi_{\mathbf{n}}(x) := (x = \underbrace{\mathbf{l}_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{l}_1}_{n \text{ раз}})$$

определяет множество $\{\mathbf{l}_n\}$ при $n \geq 2$.

(2) Сначала напомним следующую лемму.

Лемма 3.4 [13, лемма 2.1]. *Пусть* R *— неуниверсальный в.п. линейный предпорядок со следующим свойством:* $\mathrm{supp}(R)$ *имеет бесконечно много классов эквивалентности. Тогда существует в.п. линейный предпорядок* S *такой, что* S *и* R *несравнимы относительно* $\leq_c$.

Получаем, что формула

$$\psi_{fin}(x) = \forall t[x \leq t \vee t \leq x] \,\&\, \forall y \forall z[(y \leq x \,\&\, z \leq x) \to (y \leq z \,\vee\, z \leq y)]$$

определяет множество $\mathbf{Fin}$ в $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$. Действительно, первая часть конъюнкции говорит о том, что x должен быть сравним с любой степенью (по лемме 3.4, этому условию удовлетворяют только все $\mathbf{l}_n$ и универсальная степень). Вторая часть конъюнкции говорит о том, что нижний конус для x линейно упорядочен (по лемме 3.4 универсальная степень не удовлетворяет этому условию).

(3.a) Покажем, что формула

$$\psi_{\omega}(x) = [\mathbf{l}_1 \oplus x = x] \,\&\, \forall z((\mathbf{l}_1 \oplus z = z) \to x \leq z)$$

определяет множество $\{\omega_{st}\}$. Формула $\psi_\omega(x)$ говорит о том, что x является наименьшей степенью среди тех, которые удовлетворяют $\mathbf{l}_1 \oplus x = x$. Следовательно, если существует степень x со свойством $\psi_\omega(x)$, то такой x должен быть единственным. Заметим, что $\mathbf{l}_1 \oplus \omega_{st} \equiv_c \omega_{st}$. Поэтому достаточно установить следующий факт.

Лемма 3.5. *Если* T *— (необязательно в.п.) линейный предпорядок, удовлетворяющий* $\mathrm{Lin}_1 \oplus T \leq_c T$*, то* $\omega_{st} \leq_c T$.

Доказательство. Пусть $f : \mathrm{Lin}_1 \oplus T \leq_c T$. Построим сводящую функцию $g : \omega_{st} \leq_c T$ следующим образом:

$$g(0) = f(0), \quad g(x+1) = f(2g(x)+1).$$

Поскольку f является сводящей функцией, заметим следующее:

$$[f(2y+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(0)]_{\mathrm{supp}(T)}$$

верно для всех $y \in \omega$. Кроме того, если $[v]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [z]_{\mathrm{supp}(T)}$, то

$$[f(2v+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)}.$$

Следовательно, условие $[g(z+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(z)]_{\mathrm{supp}(T)}$ истинно для всех $z \in \omega$ и, таким образом, g является вычислимой функцией, сводящей ω_{st} к T. Лемма 3.5 доказана.

(3.b) Несложно получить результат, аналогичный лемме 3.5, для порядка ω^*_{st}, т. е. если $T \oplus \mathrm{Lin}_1 \leq_c T$, то $\omega^*_{st} \leq_c T$. Отсюда получаем, что формула

$$\psi_{\omega^*}(x) = [x \oplus \mathbf{l}_1 = x] \,\&\, \forall z((z \oplus \mathbf{l}_1 = z) \to x \leq z)$$

определяет множество $\{\omega^*_{st}\}$.

(3.c) Порядок ζ_{st} определяется следующим образом:

$$\psi_\zeta(x) := (x = \omega^*_{st} \oplus \omega_{st}).$$

(4) Заметим, что $\zeta^2_{st} \equiv_c \zeta_{st} \cdot \omega^*_{st} \oplus \zeta_{st} \cdot \omega_{st}$. Следовательно, достаточно привести формулы, задающие $\leq_c$-степени для порядков $\zeta_{st} \cdot \omega^*_{st}$ и $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$.

Покажем, что формулы

$$\psi_{\zeta_{st}\cdot\omega_{st}}(x) = [\zeta_{st} \oplus x = x] \,\&\, \forall z(\zeta_{st} \oplus z = z \to x \leq z),$$

$$\psi_{\zeta_{st}\cdot\omega^*_{st}}(x) = [x \oplus \zeta_{st} = x] \,\&\, \forall z(z \oplus \zeta_{st} = z \to x \leq z)$$

определяют множества $\{\zeta_{st}\cdot\omega_{st}\}$ и $\{\zeta_{st}\cdot\omega^*_{st}\}$ соответственно. Аналогично п. (3.a) для $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$ достаточно установить следующее свойство.

Лемма 3.6. *Если T — (необязательно в.п.) линейный предпорядок, удовлетворяющий $\zeta_{st} \oplus T \leq_c T$, то $\zeta_{st} \cdot \omega_{st} \leq_c T$.*

Доказательство. Пусть $f : \zeta_{st} \oplus T \leq_c T$. Для удобства рассуждений полагаем, что элементы из ζ_{st} отождествляются с целыми числами. Также полагаем, что каждый элемент из $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$ отождествляется с парой (x, y), где $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$. Определим вычислимую функцию $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathrm{dom}(T)$ следующим образом. Для $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ положим

$$g(x, 0) = f(2x), \quad g(x, y+1) = f(2g(x, y) + 1).$$

Заметим следующее: $[f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2x)]_{\mathrm{supp}(T)}$ верно для всех $z \in \mathrm{dom}(T)$ и $x \in \mathbb{Z}$. Более того, если $[v]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [z]_{\mathrm{supp}(T)}$, то

$$[f(2v+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)}.$$

Следовательно, применяя индукцию по y, можно показать, что

$$[g(x, y+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(x', y)]_{\mathrm{supp}(T)}$$

для всех $y \in \mathbb{N}$ и $x, x' \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, нетрудно установить, что $[g(x+1, y)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(x, y)]_{\mathrm{supp}(T)}$ для всех $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ (при $y = 0$ это непосредственно следует из того, что функция f сводит $\zeta_{st} \oplus T$ к T). Из этого утверждения и полученного выше факта выводим, что g задает сводимость из $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$ в T. Лемма 3.6 доказана.

Доказательство для порядка $\zeta_{st} \cdot \omega^*_{st}$ строится аналогично лемме 3.6 (с соответствующими изменениями).

Заключаем, что все подмножества из пп. (1)–(4) являются формульно определимыми в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Предложение 3.3 доказано.

Определимые подмножества из предложения 3.3 будут использованы в кодировании стандартной модели арифметики в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Будем кодировать ненулевое натуральное число n посредством степени $\mathbf{l}_n$. Отметим, что сложение определяется следующим образом: $m + n = k$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{l}_m \oplus \mathbf{l}_n = \mathbf{l}_k$. Более формально, зададим следующую формулу:

$$\psi_+(x, y, z) := (x, y, z \in \mathbf{Fin}) \,\&\, (x \oplus y = z). \tag{1}$$

Дадим определения, необходимые для кодирования (графика) умножения.

Определение 1. Пусть $(n_1, n_2, n_3) \in (\omega \setminus \{0\})^3$ — упорядоченная тройка. Через $t(n_1, n_2, n_3)$ обозначается следующий вычислимый линейный порядок:

$$t(n_1, n_2, n_3) = \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_1} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_3} \oplus \zeta_{st}.$$

Определение 2. Пусть $x, y \in \mathbf{Celps}$. Будем писать $x \sqsubseteq y$, если

$$\exists u, v(u \oplus x \oplus v = y \,\&\, \forall z_1, z_2[(x = z_1 \oplus z_2 \,\&\, x \neq z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus z_2) \to u \oplus (z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus z_2) \oplus v \neq y]). \tag{2}$$

Говоря неформально, определение 2 описывает «точное» вложение линейного предпорядка X в линейный предпорядок Y. Основные полезные свойства отношения $\sqsubseteq$ заключаются в следующем.

• Порядок Y можно «разбить» на три части U, X, V так, что $Y \leq_c U \oplus X \oplus V$ и $U \oplus X \oplus V \leq_c Y$.

Подчеркнем, что порядковые типы структур Y и $U \oplus X \oplus V$ *не обязательно совпадают* (это составляет ключевое отличие от доказательств в [19]). Действительно, заметим, что $\zeta_{st}^2 \equiv_c \zeta_{st} \cdot \omega_{st}^* \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \zeta_{st} \cdot \omega_{st}$.

• Для любого «разбиения» $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ такого, что $\leq_c$-степень $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ отлична от $\leq_c$-степени X (в этом случае ясно, что $Z_1 \oplus Z_2$ строго ниже $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$), порядок $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ не $\leq_c$-сводится к Y. Неформально говоря, порядок $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ становится «слишком большим» для вложения в Y.

По предложению 3.3 каждый порядок $t(n_1, n_2, n_3)$ и отношение $\sqsubseteq$ являются формульно определимыми в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Кроме того, из предложения 3.3 также вытекает

Следствие 3.7. *Существует формула $\psi_C(x_1, x_2, x_3; y)$ со следующим свойством. Для данной степени $\mathbf{p}$ из $\mathbf{Celps}$ множество*

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \{(\mathbf{l}_m, \mathbf{l}_n, \mathbf{l}_k) : t(m, n, k) \sqsubseteq \mathbf{p}\} \tag{3}$$

определимо в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ посредством формулы $\psi_C(x_1, x_2, x_3; \mathbf{p})$.

Определение 3. Для данной степени $\mathbf{p}$ будем говорить, что $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ — это *тернарный предикат, закодированный посредством* $\mathbf{p}$.

3.2. Кодирование умножения с помощью вычислимого линейного порядка. Вначале дадим ключевое определение, которое позволит закодировать бесконечное множество $A \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ с помощью параметра $t_L(A)$. Здесь L — данный счетный линейный порядок, а параметр $t_L(A)$ будет $\deg_T(L \oplus A)$-вычислимым линейным порядком. Для удобства чтения можно думать об A как о графике умножения для положительных целых чисел.

Определение 4. Пусть $A = \{x_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})\}_{i\in\omega} \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ — бесконечное множество, а L — счетный линейный порядок (с областью определения ω). Тогда *L-кодом для A* называем порядок $t_L(A)$, заданный следующим образом:

$$t_L(A) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i\in L} t(x_i)\Big) \oplus \zeta_{st}^2. \qquad (4)$$

Здесь сумма $S = \sum_{i\in L} M_i$ определяется стандартным образом: для любых $i, j, k, l \in \omega$

$$\langle k, i\rangle \leq_S \langle l, j\rangle \;\Leftrightarrow\; (i <_L j) \vee (i = j \;\&\; k \leq_{M_i} l).$$

Порядки $t(x_i) = t(n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})$ были ранее введены в определении 1.

Определение 5. Для порядка $t_L(A)$ из уравнения (4) и $i \in \omega$ будем называть интервал $t(x_i)$ *i-м фрагментом* порядка $t_L(A)$.

Заметим следующее: если A — бесконечное вычислимое множество и L — вычислимый линейный порядок, то структура **Celps** содержит L-код для множества A.

Напомним следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.8. (1) *Для Δ_2^0 тьюринговой степени $\mathbf{D}$ существует вычислимый линейный порядок $L_{\mathbf{D}}$, имеющий порядковый тип $\omega + \omega^*$ такой, что степень начального ω-сегмента для $L_{\mathbf{D}}$ равна $\mathbf{D}$ (предложение 3.1 в [22]).*

(2) *Если $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ является не в.п. тьюринговой степенью, то порядки ω_{st} и ω_{st}^* не $\leq_c$-сводимы к $L_{\mathbf{D}}$.*

Доказательство. (2) Пусть $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ и $\mathbf{D}$ — это не в.п. степень. Допустим, что $f : \omega_{st} \leq_c L_{\mathbf{D}}$. Заметим, что все элементы $f(x)$, $x \in \omega$, принадлежат начальному ω-сегменту в $L_{\mathbf{D}}$. Обозначим этот начальный сегмент через $\Omega(L_{\mathbf{D}})$. Тогда множество $\Omega(L_{\mathbf{D}})$ является в.п. Действительно, $y \in \Omega(L_{\mathbf{D}})$ тогда и только тогда, когда $\exists x(f(x) >_{L_{\mathbf{D}}} y)$. Это противоречит выбору степени $\mathbf{D} = \deg_T(\Omega(L_{\mathbf{D}}))$. Заключаем, что $\omega_{st} \not\leq_c L_{\mathbf{D}}$. Аналогичным образом показывается, что $\omega_{st}^* \not\leq_c L_{\mathbf{D}}$. Лемма 3.8 доказана.

Приведем ключевое свойство L-кодов из определения 4.

Лемма 3.9. *Пусть множество $A \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ бесконечно, и пусть тьюрингова степень $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ не в.п. Выберем порядок $L = L_{\mathbf{D}}$ из леммы 3.8. Тогда*

$$t(n_1, n_2, n_3) \sqsubseteq t_L(A) \;\Leftrightarrow\; (n_1, n_2, n_3) \in A.$$

Другими словами, можно отождествить A с множеством $\mathbf{C}(t_L(A))$ из уравнения (3).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $A = \{x_i : i \in \omega\}$ и $x_e = (n_1, n_2, n_3) \in A$. Будем обозначать $t(x_e)$ через X. Наша цель — показать, что $X \sqsubseteq t_L(A)$. Во-первых, определим линейные порядки

$$U := \zeta_{st}^2 \oplus \sum_{i<_L e} t(x_i), \quad V := \sum_{i>_L e} t(x_i) \oplus \zeta_{st}^2.$$

Нетрудно заметить, что $U \oplus X \oplus V \equiv_c t_L(A)$.

Теперь нужно установить вторую часть конъюнкции из уравнения (2). Пусть $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ и $X \not\equiv_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ для некоторых Z_1 и Z_2. Заметим, что $Z_1 \oplus Z_2 \leq_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ выполнено всегда, следовательно, имеет место $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \not\leq_c Z_1 \oplus Z_2 \equiv_c X$.

От противного, допустим, что

$$U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \equiv_c t_L(A) \equiv_c U \oplus X \oplus V.$$

Зафиксируем вычислимую сводимость $f : U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \leq_c U \oplus X \oplus V$. Поскольку $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \not\leq_c X$, существует элемент p, принадлежащий $(Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2)$-части, такой, что $f(p)$ не лежит в e-м фрагменте $t(x_e) = X$. Заметим, что $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-части порядка V, поскольку в противном случае отображение f давало бы изоморфное вложение $1 \oplus \zeta^2_{st}$ в ζ^2_{st}. Аналогично $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-части порядка U.

Для удобства будем считать, что в обоих порядках $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ и $U \oplus X \oplus V$ элементы i-го фрагмента имеют вид $\langle y, i\rangle$ для $y \in \omega$.

Поскольку $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-частям в $U \oplus X \oplus V$, элемент $f(p)$ принадлежит i_0-му фрагменту для некоторого $i_0 \neq e$.

Случай 1. Предположим, что $i_0 >_L e$. Поскольку $f(p)$ принадлежит i_0-му фрагменту и $\mathbf{l}_1 \oplus t(x_{i_0}) \not\leq_c t(x_{i_0})$, существует элемент $\langle y_0, i_0\rangle$ такой, что $f(\langle y_0, i_0\rangle)$ строго больше (в порядке $U \oplus X \oplus V$), чем каждый элемент из i_0-го фрагмента. Находим $\leq_{\mathbb{N}}$-наименьший y_0 с таким свойством. Ясно, что $f(\langle y_0, i_0\rangle) = \langle z, i_1\rangle$ для некоторого $i_1 >_L i_0$. После того как индекс i_1 найден, аналогичная процедура вычисляет y_1 такой, что $f(\langle y_1, i_1\rangle) = \langle z', i_2\rangle$ для некоторого $i_2 >_L i_1$.

Действуя аналогичным образом, можно построить вычислимую последовательность $(i_k)_{k\in\omega}$ такую, что $i_{k+1} >_L i_k$ для всех k. Следовательно, функция $h : k \mapsto i_k$ дает вычислимую сводимость ω_{st} к L. Это противоречит выбору $L = L_{\mathbf{D}}$, см. лемму 3.8(2).

Случай 2. В противном случае имеем $i_0 <_L e$. Тогда рассуждение, аналогичное рассуждению для случая 1 показывает, что $\omega^*_{st} \leq_c L$, и это вновь противоречит выбору L.

В обоих случаях, рассмотренных выше, приходим к противоречию. Поэтому заключаем, что вторая часть конъюнкции из уравнения (2) истинна.

($\Rightarrow$) Пусть $X = t(n_1, n_2, n_3)$ для некоторых ненулевых n_1, n_2, n_3, и пусть $X \sqsubseteq t_L(A)$.

Фиксируем порядки U и V такие, что $U \oplus X \oplus V \equiv_c t_L(A)$. Также фиксируем сводящую функцию

$$f : U \oplus X \oplus V \leq_c t_L(A).$$

Главная техническая цель здесь заключается в следующем: дать анализ возможных f-образов для блоков $\mathbf{l}_{n_1}, \mathbf{l}_{n_2}, \mathbf{l}_{n_3}$ из порядка $t(n_1, n_2, n_3)$.

Заметим следующее: если $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ и $X \not\equiv_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$, то $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ является $\equiv_c$-эквивалентным одному из следующих порядков:

$$t(n_1 + 1, n_2, n_3), \quad t(n_1, n_2 + 1, n_3), \quad t(n_1, n_2, n_3 + 1). \tag{5}$$

Действительно, это легко следует из того факта, что $\zeta_{st} \equiv_c \omega^*_{st} \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \omega_{st}$.

В дальнейшем сосредоточимся на f-образе для $\mathbf{l}_{n_1}$-блока. Для удобства работы с этим случаем предполагаем, что $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \equiv_c t(n_1 + 1, n_2, n_3)$. Заметим, что всегда выполнено $t_L(A) \equiv_c U \oplus X \oplus V \leq_c U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$. В силу того, что $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \not\equiv_c t_L(A)$, выводим, что

$$U \oplus t(n_1 + 1, n_2, n_3) \oplus V \not\leq_c t_L(A). \tag{6}$$

Если для некоторого элемента p из $\mathbf{l}_{n_1}$ его образ $f(p)$ принадлежит ζ-блоку B в порядке $t_L(A)$, то ясно, что все точки a из блоков $C \neq \mathbf{l}_{n_1}$ (внутри $U \oplus X \oplus V$)

удовлетворяют $f(a) \notin B$. Следовательно, множество $B \cap \mathrm{range}(f)$ имеет мощность не более чем n_1, и поэтому легко получить вычислимую сводящую функцию $f_1 : U \oplus t(n_1+1, n_2, n_3) \oplus V \leq_c t_L(A)$ такую, что $f \subset f_1$. Это противоречит уравнению (6). Получаем, что точки из $\mathbf{l}_{n_1}$-блока не могут отображаться функцией f в ζ-блок.

Аналогичные рассуждения показывают следующее.

• Для элемента p из $\mathbf{l}_{n_1}$ его образ $f(p)$ не может принадлежать $\mathbf{l}_m$-блоку $t_L(A)$ при $m > n_1$.

• Если p и q — элементы из $\mathbf{l}_{n_1}$, то $f(p)$ и $f(q)$ должны принадлежать одному и тому же конечному блоку в $t_L(A)$.

Работая с другими случаями из уравнения (5), можно получить аналогичные свойства для блоков $\mathbf{l}_{n_2}$ и $\mathbf{l}_{n_3}$. Таким образом, выводим, что для каждого $i \in \{1,2,3\}$ $\mathbf{l}_{n_i}$-блок в X (сюръективно) отображается посредством f на некоторый $\mathbf{l}_{n_i}$-блок в $t_L(A)$.

Предположим, что (например) $\mathbf{l}_{n_1}$-блок и $\mathbf{l}_{n_2}$-блок в X отображаются посредством f в различные фрагменты $t(m_1, m_2, m_3)$ и $t(m_1', m_2', m_3')$ в $t_L(A)$. Рассмотрим блоки $B_1 = f(\mathbf{l}_{n_1})$ и $B_2 = f(\mathbf{l}_{n_2})$. Тогда внутри $t_L(A)$ существуют как минимум два ζ_{st}-блока, лежащие строго между B_1 и B_2. Так как $(\mathbf{l}_{n_1} \oplus \mathbf{l}_1) \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2} \leq_c \mathbf{l}_{n_1} \oplus \zeta_{st} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2}$, можно получить сводящую функцию $f_1 : U \oplus t(n_1+1, n_2, n_3) \oplus V \leq_c t_L(A)$ такую, что $f \subset f_1$, а $f_1(\mathbf{l}_{n_1} \oplus \mathbf{l}_1)$ — подмножество фрагмента $t(m_1, m_2, m_3)$. Это противоречит уравнению (6).

Аналогичные рассуждения показывают, что для всех $i \in \{1,2,3\}$ образы $f(\mathbf{l}_{n_i})$ должны принадлежать одному и тому же фрагменту в $t_L(A)$. Это означает, что этот конкретный фрагмент в $t_L(A)$ равен $t(n_1, n_2, n_3)$, а следовательно, тройка (n_1, n_2, n_3) принадлежит множеству A. Лемма 3.9 доказана.

Из леммы 3.9 выводим

Следствие 3.10. *Существует степень $\mathbf{p}_0$ в* **Celps** *такая, что $\mathbf{p}_0$ кодирует график умножения $\times$ (в смысле определения* 3*). Следовательно, структура $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ формульно определима (с параметром $\mathbf{p}_0$) внутри $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ посредством формул $\psi_{Dom}(x) = (x \in \mathbf{Fin})$, $\psi_+(x,y,z)$ из уравнения* (1) *и $\psi_C(x,y,z;\mathbf{p}_0)$ из следствия* 3.7.

Последний необходимый этап в доказательстве теоремы 3.1 — элиминация параметра $\mathbf{p}_0$ из следствия 3.10. Для этого заметим следующий факт.

Данная $\leq_c$-степень $\mathbf{p}$ кодирует график умножения тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}$ удовлетворяет следующим двум условиям.

(a) Тернарный предикат Γ, закодированный посредством $\mathbf{p}$, является графиком функции $g_{\mathbf{p}}$. Более формально,

$$\forall k_1 \forall k_2 \exists! k_3 (t(k_1, k_2, k_3) \sqsubseteq \mathbf{p}).$$

(b) Функция $g_{\mathbf{p}}$ удовлетворяет стандартному примитивно рекурсивному определению умножения на $\omega \setminus \{0\}$:

$$g_{\mathbf{p}}(k, 1) = k, \quad g_{\mathbf{p}}(k, m+1) = g_{\mathbf{p}}(k, m) + k.$$

Следовательно, используя формулы ψ_+ и ψ_C, можно формульно определить множество $P_\times$ всех параметров $\mathbf{p} \in \mathbf{Celps}$, кодирующих график умножения. Затем, заменяя в следствии 3.10 формулу $\psi_C(x,y,z;\mathbf{p}_0)$ формулой

$$\widehat{\psi}_\times(x,y,z) = \forall p (p \in P_\times \to \psi_C(x,y,z;p)), \tag{7}$$

получаем формульное определение $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ внутри $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ без параметров. Теорема 3.1 доказана.

4. Интерпретация арифметики второго порядка в счетных линейных предпорядках

В этом разделе рассмотрим множество **LP**, содержащее $\leq_c$-степени *всех* счетных линейных предпорядков с областью определения ω. Докажем следующий результат.

Теорема 4.1. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ *рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.*

Доказательство. Рассмотрим двусортную структуру

$$\mathscr{N}_2 = (\omega, \mathscr{P}(\omega); +, \times, \in).$$

Заметим, что в $\mathscr{N}_2$ условие $\langle x, y\rangle \in X$ эквивалентно формуле

$$\exists w \exists z[2w = (x+y)(x+y+1) \,\&\, z = w + x \,\&\, z \in X].$$

Следовательно, можно использовать функцию нумерации пар $\langle \cdot, \cdot \rangle$ при определении формул в сигнатуре структуры $\mathscr{N}_2$.

Вначале установим элементарную определимость $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ в структуре $\mathscr{N}_2$. Введем следующие вспомогательные формулы.

• Формула $\xi_{Dom}(X)$ говорит, что для всех x, y, z выполнено:
— $\langle x, x\rangle \in X$,
— $(\langle x, y\rangle \in X \,\&\, \langle y, z\rangle \in X) \to \langle x, z\rangle \in X$,
— $(\langle x, y\rangle \in X \vee \langle y, x\rangle \in X)$.

Неформально говоря, формула $\xi_{Dom}(X)$ выделяет $X \in \mathscr{P}(\omega)$ такие, что X кодирует некоторый линейный порядок R_X с областью определения ω.

• Можно задать формулу $\xi_\varphi(e, m, n)$, выражающую (в $\mathscr{N}_2$), такую, что $\varphi_e(m){\downarrow} = n$ (подробности см., например, в разд. 15.1 в [20]).

• Формула $\xi_{\leq_c}(X, Y)$ выражает, что линейный предпорядок R_X вычислимо сводится к R_Y. Более формально, $\xi_{\leq_c}(X, Y)$ утверждает о том, что

$$\exists e[\forall m \exists n \xi_\varphi(e, m, n) \;\&\; \forall m \forall m' \forall n \forall n' [(\xi_\varphi(e, m, n) \,\&\, \xi_\varphi(e, m', n')) \\ \to (\langle m, m'\rangle \in X \leftrightarrow \langle n, n'\rangle \in Y)]].$$

• $\xi_{\equiv_c}(X, Y) = \xi_{\leq_c}(X, Y) \,\&\, \xi_{\leq_c}(Y, X)$.

• Формула $\xi_\oplus(X, Y, Z)$ выражает, что R_Z эквивалентно (относительно $\leq_c$) предпорядку $R_X \oplus R_Y$. Более формально, $\xi_\oplus(X, Y, Z)$ говорит, что существует V такой, что $\xi_{\equiv_c}(V, Z)$ и для всех x, y условие $\langle x, y\rangle \in V$ истинно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:
— $\exists k \exists m(x = 2k \,\&\, y = 2m + 1)$,
— $\exists k \exists m(x = 2k \,\&\, y = 2m \,\&\, \langle k, m\rangle \in X)$,
— $\exists k \exists m(x = 2k + 1 \,\&\, y = 2m + 1 \,\&\, \langle k, m\rangle \in Y)$.

Рассмотрим структуру $\mathscr{L}$ в сигнатуре $\{\leq, \oplus\}$, которая задана следующим образом:

• область определения $\mathscr{L}$ равна фактор-множеству $\xi_{Dom}[\mathscr{N}_2]/\xi_{\equiv_c}[\mathscr{N}_2]$;

• отношение $\leq_{\mathscr{L}}$ и график для $\oplus_{\mathscr{L}}$ определяются формулами $\xi_{\leq_c}$ и $\xi_\oplus$, соответственно.

Ясно, что структура $\mathscr{L}$ является изоморфной копией для $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Таким образом, получаем элементарную определимость $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ внутри $\mathscr{N}_2$. Следовательно, стандартное рассуждение показывает, что $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathscr{N}_2)$.

Известно, что для структур $\mathscr{N}_2 = (\omega, \mathscr{P}(\omega); +, \times, \in)$ и $\widehat{\mathscr{N}_2} = (\omega \setminus \{0\}, \mathscr{P}(\omega \setminus \{0\}); +, \times, \in)$ их элементарные теории рекурсивно изоморфны. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить следующий факт.

Предложение 4.2. $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2}) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что все множества из предложения 3.3 являются формульно определимыми в структуре $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Действительно, анализ доказательства предложения 3.3 показывает, что все аргументы доказательства работают и для $\mathbf{LP}$, за исключением одной ключевой части: для $\mathbf{LP}$ необходимо ввести новую формулу $\widehat{\psi}_{fin}(x)$, определяющую множество

$$\mathbf{Fin} = \{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}.$$

Формула $\widehat{\psi}_{fin}(x)$ утверждает следующее:
(a) для каждого y $\leq_c$-степени x и y имеют инфимум;
(b) нижний конус для x линейно упорядочен;
(c) $\forall y[y \leq x \to (y = \mathbf{l}_1 \vee \exists z(y = z \oplus \mathbf{l}_1))]$.

Лемма 4.3. *Формула* $\widehat{\psi}_{fin}(x)$ *определяет множество* $\mathbf{Fin}$ *внутри* $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.

Доказательство. Пусть $X = \mathrm{Lin}_n$ для некоторого $n \geq 1$. Ясно, что свойства (b) и (c) из определения формулы $\widehat{\psi}_{fin}$ выполнены для степени $\mathbf{l}_n = \deg_c(\mathrm{Lin}_n)$.

Пусть Y — произвольный счетный линейный предпорядок. Если Y имеет не менее чем n классов $\mathrm{supp}(Y)$-эквивалентности, то $\mathrm{Lin}_n \leq_c Y$ и $\inf(\mathrm{Lin}_n, Y) = \mathrm{Lin}_n$. Если Y имеет $k < n$ $\mathrm{supp}(Y)$-классов, то $\inf(\mathrm{Lin}_n, Y) = \mathrm{Lin}_k$. Действительно, это вытекает из того факта, что нижний конус для Lin_n равен $\{\mathrm{Lin}_m : m \leq n\}$ (кроме того, заметим, что $\mathrm{Lin}_m \leq_c Y$ тогда и только тогда, когда $m \leq k$). Следовательно, Lin_n удовлетворяет формуле $\widehat{\psi}_{fin}(x)$.

Предположим теперь, что $X \notin \mathbf{Fin}$. Тогда линейный предпорядок X удовлетворяет одному из следующих трех случаев.

Случай 1. Пусть $\omega_{st} \leq_c X$ и $\omega^*_{st} \leq_c X$. Тогда нижний конус X не является линейно упорядоченным.

Случай 2. Пусть ($\omega_{st} \nleq_c X$ или $\omega^*_{st} \nleq_c X$) и при этом X имеет бесконечно много классов $\mathrm{supp}(X)$-эквивалентности.

Без ограничения общности можно считать, что $\omega_{st} \nleq_c X$. Тогда множество нижних граней для пары (X, ω_{st}) в точности равно $\mathbf{Fin}$, а следовательно, (X, ω_{st}) не имеет инфимума.

Случай 3. В противном случае X имеет лишь конечное число $\mathrm{supp}(X)$-классов и при этом X имеет не менее двух невычислимых $\mathrm{supp}(X)$-классов. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $X = \mathrm{Lin}_k \oplus Y$, где все $\mathrm{supp}(Y)$-классы невычислимы. Тогда выполнено $\forall Z(Y \not\equiv_c Z \oplus \mathrm{Lin}_1)$ и, следовательно, X не удовлетворяет свойству (c) из определения для $\widehat{\psi}_{fin}$.

Получаем, что каждый линейный предпорядок $X \notin \mathbf{Fin}$ не удовлетворяет $\widehat{\psi}_{fin}(x)$. Лемма 4.3 доказана.

Применяя лемму 4.3 и следуя доказательству предложения 3.3, заключаем, что все множества из предложения 3.3 формульно определимы в структуре $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.

Дальнейший анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что после предложения 3.3 все последующие рассуждения не использовали специальные свойства в.п. линейных предпорядков, следовательно, эти рассуждения работают и для счетных линейных предпорядков. В частности, имеем

Следствие 4.4. *Структура* $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ *формульно определима внутри* $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ *посредством следующих формул:*
• $\widehat{\psi}_{Dom}(x) = \widehat{\psi}_{fin}(x)$,
• $\widehat{\psi}_{+}(x, y, z) = (x \oplus y = z)$,
• *формула* $\widehat{\psi}_{\times}(x, y, z)$ *из уравнения* (7).

Последняя компонента доказательства теоремы 4.1 описывает, как «кодируются» подмножества $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$ внутри $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Это кодирование похоже на то, что было описано в определении 4.

Для ненулевого числа $b \in \omega$ определяем

$$t^1(b) = \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_b \oplus \zeta_{st}.$$

Определение 6. Пусть $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$, и пусть тьюрингова степень $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ не в.п. Выберем порядок $L = L_{\mathbf{D}}$ из леммы 3.8. *Код для* B определяется как следующий счетный линейный порядок $T(B)$.
• Если $B = \varnothing$, то положим $T(\varnothing) = \zeta_{st}$.
• Если $B = \{b_0 <_{\mathbb{N}} b_1 <_{\mathbb{N}} \dots <_{\mathbb{N}} b_k\}$, то

$$T(B) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i \leq k} t^1(b_i) \Big) \oplus \zeta_{st}^2.$$

• Пусть $B = \{b_i : i \in \omega\}$, где $b_i <_{\mathbb{N}} b_{i+1}$ для всех i. Тогда положим

$$T(B) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i \in L} t^1(b_i) \Big) \oplus \zeta_{st}^2.$$

Аналогично лемме 3.9 можно установить следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.5. *Пусть* $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$. *Тогда каждое* $b \in \omega \setminus \{0\}$ *удовлетворяет следующему свойству:*

$$t^1(b) \sqsubseteq T(B) \;\Leftrightarrow\; b \in B.$$

Говоря неформально, лемма 4.5 показывает, что определение 6 позволяет закодировать *каждое* множество B формульно определимым образом.

Наконец, для формулы $\psi(x_1, \dots, x_n; X_1, \dots, X_m)$ в сигнатуре структуры $\widehat{\mathcal{N}_2}$ определим новую формулу $\psi^*(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}; V_{X_1}, \dots, V_{X_m})$ в сигнатуре $\{\leq_c, \oplus\}$. Как обычно, без ограничения общности можем считать, что в ψ каждая подформула вида $t(\bar{x}) = q(\bar{x})$ содержит не более одного вхождения функциональных символов.

1. Если ψ равно $x = y$, то положим $\psi^* = (u_x = u_y)$.
2. Если $\psi = (X = Y)$, то положим $\psi^* = \forall b(t^1(b) \sqsubseteq V_X \leftrightarrow t^1(b) \sqsubseteq V_Y)$.
3. Если $\psi = (x + y = z)$, то $\psi^* = \widehat{\psi}_{+}(u_x, u_y, u_z)$.
4. Если $\psi = (x \times y = z)$, то $\psi^* = \widehat{\psi}_{\times}(u_x, u_y, u_z)$.
5. Если $\psi = (x \in X)$, то $\psi^* = (t^1(u_x) \sqsubseteq V_X)$.
6. Если $\psi = \psi_1 \# \psi_2$ для $\# \in \{\&, \vee, \to\}$, то $\psi^* = \psi_1^* \# \psi_2^*$.
7. Если $\psi = \neg\psi_1$, то $\psi^* = \neg\psi_1^*$.
8. Если $\psi = \exists x \psi_1$, то $\psi^* = \exists u_x(\widehat{\psi}_{fin}(u_x) \,\&\, \psi_1^*)$.
9. Если $\psi = \forall x \psi_1$, то $\psi^* = \forall u_x(\widehat{\psi}_{fin}(u_x) \to \psi_1^*)$.
10. Если $\psi = \exists X \psi_1$, то $\psi^* = \exists V_X \psi_1^*$.
11. Если $\psi = \forall X \psi_1$, то $\psi^* = \forall V_X \psi_1^*$.

Заметим, что описанное преобразование $\psi \mapsto \psi^*$ эффективно.

Стандартное индуктивное рассуждение устанавливает следующий факт.

Лемма 4.6. *Пусть* $a_1, \dots, a_n \in \omega \setminus \{0\}$ *и* $B_1, \dots, B_m \in \mathscr{P}(\omega \setminus \{0\})$. *Тогда*

$$\widehat{\mathscr{N}_2} \models \psi(a_1, \dots, a_n; B_1, \dots, B_m) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus) \models \psi^*(\mathbf{l}_{a_1}, \dots, \mathbf{l}_{a_n}; T(B_1), \dots, T(B_m)).$$

Из леммы 4.6 вытекает, что предложение ψ принадлежит $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2})$ в том и только том случае, когда $\psi^* \in \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Следовательно, имеет место $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2}) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Доказательство предложения 4.2 завершено.

Теорема 4.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Позитивные эквивалентности // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 6. С. 620–650.
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. *Bernardi C.* On the relation provable equivalence and on partitions in effectively inseparable sets // Stud. Logic. 1981. V. 40, N 1. P. 29–37.
4. *Bernardi C., Sorbi A.* Classifying positive equivalence relations // J. Symbol. Logic. 1983. V. 48, N 3. P. 529–538.
5. *Andrews U., Badaev S. A., Sorbi A.* A survey on universal computably enumerable equivalence relations // Lect. Notes Comput. Sci. 2017. V. 10010. P. 418–451.
6. *Gao S., Gerdes P.* Computably enumerable equivalence relations // Stud. Logic. 2001. V. 67, N 1. P. 27–59.
7. *Simpson S. G.* First-order theory of the degrees of recursive unsolvability // Ann. Math. 1977. V. 105, N 1. P. 121–139.
8. *Shore R. A.* The theory of degrees below $\mathbf{0}'$ // J. Lond. Math. Soc. 1981. V. 24, N 1. P. 1–14.
9. *Nerode A., Shore R. A.* Reducibility orderings: Theories, definability and automorphisms // Ann. Math. Logic. 1980. V. 18, N 1. P. 61–89.
10. *Нис А.* Последний вопрос о рекурсивно-перечислимых m-степенях // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 5. С. 550–563.
11. *Andrews U., Sorbi A.* Joins and meets in the structure of ceers // Computability. 2019. V. 8, N 3–4. P. 193–241.
12. *Andrews U., Schweber N., Sorbi A.* The theory of ceers computes true arithmetic // Ann. Pure Appl. Logic. 2020. V. 171, N 8. P. 102811.
13. *Бадаев С. А., Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.* О структуре позитивных предпорядков // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 3. С. 293–314.
14. *Andrews U., Belin D. F., San Mauro L.* On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers // J. Symb. Logic. 2023. V. 88, N 3. P. 1038–1063.
15. *Andrews U., Lempp S., Mustafa M., Schweber N. D.* The first-order theory of the computably enumerable equivalence relations in the uncountable setting // J. Logic Comput. 2022. V. 32, N 1. P. 98–114.
16. *Rosenstein J. G.* Linear orderings. New York: Acad. Press, 1982.
17. *Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.* О темных вычислимо перечислимых отношениях эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 29–40.
18. *Bazhenov N., Kalmurzayev B., Zubkov M.* A note on joins and meets for positive linear preorders // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. V. 20, N 1. P. 1–16.
19. *Kach A. M., Montalbán A.* Undecidability of the theories of classes of structures // J. Symb. Logic. 2014. V. 79, N 4. P. 1001–1019.
20. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
21. *Askarbekkyzy A., Bazhenov N. A., Kalmurzayev B. S.* Computable reducibility for computable linear orders of type ω // J. Math. Sci. 2022. V. 267, N 4. P. 429–443.

22. *Harizanov V. S.* Turing degrees of certain isomorphic images of computable relations // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. V. 93, N 1–3. P. 103–113.

Поступила в редакцию 20 августа 2024 г.
После доработки 17 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Алиш Дарын Бакытович (ORCID 0000-0002-4933-0575)
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
alish.darynn@gmail.com

Баженов Николай Алексеевич (ORCID 0000-0002-5834-2770)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
bazhenov@math.nsc.ru

Калмурзаев Биржан Сеилханович (ORCID 0000-0002-4386-5915)
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
birzhan.kalmurzayev@gmail.com