Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.554

О КЛАССИФИКАЦИИ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ 10–МЕРНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ДИАГОНАЛЬНОГО ТИПА

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Простая правоальтернативная сингулярная супералгебра является расширенным дублем. Минимальная размерность расширенного дубля, не являющегося линейной супералгеброй, равна 10. В работе рассматриваются 10-мерные расширенные дубли диагонального типа. Доказано, что всякий 10-мерный расширенный дубль диагонального типа над алгебраически замкнутым полем характеристики не 2, 3 имеет структуру супералгебры, зависящей от двух параметров. Если основное поле является полем комплексных чисел, то доказано, что семейство простых супералгебр при положительных действительных значениях параметров не содержит изоморфных супералгебр.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.109

Ключевые слова: правоальтернативная супералгебра, сингулярная супералгебра, расширенный дубль, переключатель, супералгебра диагонального типа.

Введение

Супералгеброй $B = B_0 \oplus B_1$ называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, в которой $B_0 \neq 0, B_1 \neq 0$ и справедливы включения $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j (\mathrm{mod}\ 2)}$ для любых $i, j = 0, 1$. Идеал I супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *градуированным*, если $I = (I \cap B_0) \oplus (I \cap B_1)$. Супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ называется *простой*, если $B^2 \neq 0$ и B не имеет собственных градуированных идеалов.

Супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ является *правоальтернативной* (см. [1]), если для однородных элементов $x, y, z \in B_0 \cup B_1$ выполнено тождество

$$(x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) = 0, \tag{1}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z, $|x|$ — четность однородного элемента $x \in B_0 \cup B_1$, т. е. $|x| = i$, если $x \in B_i$ $(i = 0, 1)$.

Простая правоальтернативная супералгебра называется *сингулярной*, если ее четная часть имеет нулевое умножение. Минимальная размерность сингулярной супералгебры равна 5. Первый пример сингулярной супералгебры был указан в [2]; эта алгебра обозначается через $B_{2|3}$. В [3] классифицированы 5-мерные сингулярные супералгебры; в [4] доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр.

Следуя [5], напомним понятия алгебраически порожденной и линейно порожденной сингулярных супералгебр.

Определение. Пусть $SW(B) = \{q \in B_1 \mid qB = 0\}$ — пространство нечетных левых аннуляторов, элементы из $SW(B)$ называются *переключателями* (switch). Размерность пространства $SW(B)$ называется *индексом* супералгебры B и обозначается через $\mathrm{ind}(B)$.

Определение. Переключатель p называется *невырожденным*, если $ap = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in B_0$.

Определение. Сингулярная супералгебра B называется *алгебраически порожденной*, если она порождается множеством $B_0 \cup SW(B)$.

Частным случаем алгебраически порожденных супералгебр являются линейно порожденные супералгебры.

Определение. Сингулярная супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ над полем Φ называется *линейно порожденной* (или *линейной над четной частью*), если $B_1 = \Phi p \oplus B_0 p$ для некоторого переключателя p.

В [5] были классифицированы линейно порожденные супералгебры над алгебраически замкнутым полем, а также описаны их группы автоморфизмов и супералгебры дифференцирований. Размерность линейно порожденной супералгебры сравнима с 1 по модулю 4.

Определение. Сингулярная супералгебра B называется *супералгеброй с невырожденным переключателем*, если она порождается четной частью B_0 и невырожденным переключателем p.

В [6] было введено понятие расширенного дубля $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ (см. разд. 1.3) и доказано, что всякая конечномерная сингулярная супералгебра с невырожденным переключателем является расширенным дублем.

Наконец, из работ [7, 8] вытекает, что всякая конечномерная сингулярная супералгебра является расширенным дублем. Расширенный дубль индекса 1 является линейно порожденной супералгеброй. Кроме того, в [7] перечислены размерности расширенных дублей. Минимальная размерность расширенного дубля индекса ≥ 2 равна 10.

В данной работе изучаются расширенные дубли $B = A \oplus M$ размерности 10. Супералгебра B содержит невырожденный переключатель p такой, что $D = R_p^2$. Спектр $\Lambda_0(D)$ оператора D на четной части A имеет либо 2, либо 4 значения. Случай $|\Lambda_0(D)| = 4$ сводится к случаю $|\Lambda_0(D)| = 2$ (см. § 5).

Итак, допустим, что $|\Lambda_0(D)| = 2$. Без ограничения общности можно считать, что $\Lambda_0(D) = \{\pm 1\}$.

Пусть p — невырожденный переключатель в B. Тогда всякий нечетный элемент x определяет линейный оператор ψ_x, действующий на четной части A по правилу:

$$a^{\psi_x} = a', \text{ если } ax = a'p.$$

Определение. Пусть сингулярная супералгебра B размерности 10 имеет невырожденный переключатель p такой, что $\Lambda_0\big(R_p^2\big) = \{\pm 1\}$. Будем говорить, что B имеет *диагональный* тип, если в ней найдется ненулевой вырожденный переключатель x такой, что оператор ψ_x имеет диагональную форму (в некотором базисе); в противном случае будем говорить, что супералгебра B имеет *жорданов* тип.

В данной работе рассматриваются 10-мерные расширенные дубли диагонального типа. Работа состоит из введения и пяти параграфов. В § 1 приведены необходимые известные результаты.

В § 2 доказан ряд вспомогательных общих результатов о 10-мерных расширенных дублях. В частности, обсуждается взаимосвязь между жордановыми формами операторов D и ψ_x, действующими на четной части. На самом деле действия операторов D и ψ_x на четной части A полностью определены их действиями на весовом пространстве A_1 оператора D, отвечающем собственному значению 1. Кроме того, оказалось, что не существует супералгебр, в которых на A_1 оператор D является жордановой клеткой, а вырожденный оператор ψ_x диагонален. Значит, в супералгебре диагонального типа все ненулевые весовые векторы собственные.

В § 3 вводится понятие канонического базиса и доказывается, что всякий 10-мерный расширенный дубль диагонального типа обладает каноническим базисом.

В § 4 доказано, что 10-мерный расширенный дубль диагонального типа изоморфен супералгебре вида $BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$. Доказано также, что если основное поле является полем комплексных чисел, то семейство алгебр вида $BD(\mu,\nu)$ содержит бесконечно много попарно неизоморфных алгебр.

В § 5 доказано, что если в расширенном 10-мерном дубле $B = B(\dots, D, \dots)$ спектр $\Lambda_0(D)$ оператора D на четной части A имеет 4 значения, то в нем можно выбрать невырожденный переключатель q так, что $\Lambda_0\big(R_q^2\big) = \{\pm 1\}$, причем все ненулевые весовые векторы оператора R_q^2 являются собственными и супералгебра B имеет диагональный тип.

§ 1. Известные результаты

1.1. Обозначения и известные факты. Всюду в работе используются следующие обозначения:

Φ — алгебраически замкнутое поле характеристики, отличной от 2 и 3;

$\Phi^{\times}$ — множество ненулевых скаляров поля Φ;

$B = A \oplus M$ — супералгебра над полем Φ с четной частью A и нечетной частью M; предполагается, что B является расширенным дублем с невырожденным переключателем p.

Как обычно, если $r, s \in B$, то $[r, s] = rs - sr$ — коммутатор элементов r, s; $r \circ s = rs + sr$ — их йорданово произведение.

Образ элемента a при отображении φ обозначается через $a\varphi$ или a^{φ}, т. е. используется правая запись для обозначения образов элементов.

Через R_a и L_a обозначаются операторы правого и левого умножений на элемент a:

$$xR_a = xa, \quad xL_a = ax.$$

Подпространство, порожденное множеством X, обозначается через $\langle X \rangle$.

Если не оговорено противное, то латинские буквы, возможно с индексами, обозначают однородные элементы супералгебры B:

$$a, b, c, e \in A, \quad x, y, z \in M, \quad q, r, s \in A \cup M.$$

Супер-тождество (1) равносильно следующим двум соотношениям:

$$(ra)s + (rs)a = r(a \circ s), \tag{2}$$

$$(qx)y - (qy)x = q[x, y]. \tag{3}$$

Считая, что супералгебра $B = A \oplus M$ является алгебраически порожденной, положим

$$P_0 = SW(B), \quad P_\nu = \{pL_{a_1}L_{a_2}\dots L_{a_\nu} \mid p \in P_0,\ a_i \in A,\ \nu \geq 1\},$$

$$X = \sum_{m\geq 0} \langle P_{2m} \rangle; \quad X' = AX = \sum_{m\geq 0} \langle P_{2m+1} \rangle.$$

Известно [5], что

$$M = X + X', \quad X'X = A \tag{4}$$

и для любого $a \in A$ выполнены равенства

$$X' \circ A = a(aX) = A^2 = XB = X'^2 = 0. \tag{5}$$

Лемма 1.1. *Если $a, b \in A$, $x, y, z \in X$, то*

(а) *элементы $(ax)y$ и $(ax \cdot y)(bz)$ симметричны как по нечетным переменным x, y, z, так и по четным переменным a, b;*

(б) *элемент $a(bx)$ кососимметричен по четным переменным a, b.*

Эта лемма доказана в [5] (см. леммы 4.2 и 4.4).

Лемма 1.2. *Пусть $a \in A$, $x \in X$, $x' \in X'$. Тогда выполнены следующие условия «невырожденности» произведения:*

(а) *если $aX' = 0$, то $a = 0$;*

(б) *если $aX = 0$, то $a = 0$;*

(в) *если $x'X = 0$, то $x' = 0$;*

(г) *если $Ax = 0$, то $x = 0$.*

Эта лемма вытекает из [6, лемма 2.1].

Лемма 1.3. *Если $p \in M$ — невырожденный переключатель, то оператор $D = R_p^2$ невырожденный на A. Кроме того, справедливы равенства*

$$X' = Ap, \quad X = A(Ap).$$

Эта лемма вытекает из [6, лемма 2.4].

1.2. Весовые подпространства дифференцирований. Пусть C — произвольная алгебра над полем Φ, D — ее дифференцирование и 1_C — тождественное отображение множества C на себя. Обозначим через $\Lambda(D)$ спектр оператора D, т. е. набор его собственных значений. Для каждого $\alpha \in \Lambda(D)$ обозначим, как обычно, через

$$C_\alpha = \{c \in C \mid (\exists n = n(c) \in \mathbb{N}) \mid c(D - \alpha \cdot 1_C)^n = 0\}$$

весовое подпространство оператора D, отвечающее его собственному значению α. Поскольку $\Lambda(D) \subseteq \Phi$, оператор D может быть приведен к жордановой нормальной форме, т. е. справедливы следующие утверждения (см. [9, 10]):

(а) $C_\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Lambda(D)$;

(б) в пространстве $C_\alpha \neq 0$ можно выбрать базис $E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots$ (набор $E^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{k_i}^{(i)}\}$ называется *базисным блоком длины k_i*) так, что подпространства $\langle E^{(i)} \rangle$ инвариантны относительно D и матрица оператора D относительно базисного блока $E^{(i)}$ является жордановой клеткой;

(в) C является прямой суммой весовых подпространств C_α;

(г) $C_\alpha C_\beta \subseteq C_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Lambda(D)$; $C_\alpha C_\beta = 0$, если $\alpha + \beta \notin \Lambda(D)$.

Свойства (а)–(г) будут использоваться далее без дополнительных ссылок.

Заметим, что оператор $R_x R_y$, где $x, y \in X$, является четным дифференцированием супералгебры $B = A \oplus M$ (см. [6, п. 2.3]).

Лемма 1.4. *Пусть p — невырожденный переключатель. Тогда спектр $\Lambda_0(D)$ оператора $D = R_p^2$ на четной части состоит из ненулевых попарно различных чисел $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_m$; спектр $\Lambda_1(D)$ оператора D на нечетной части состоит из чисел $0, \pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_m$.*

Эта лемма о спектре вытекает из [6, лемма 2.3].

1.3. Расширенный дубль. Понятие расширенного дубля введено в [6]. Пусть A и X — конечномерные векторные пространства, причем

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ — базис } X, \quad p = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$D : A \to A$ — невырожденный линейный оператор;

$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — набор попарно перестановочных линейных операторов $\psi_i : A \to A$ таких, что $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 1_A$;

$\sigma : A \otimes A \to \mathrm{End}_\Phi(X)$ — линейное отображение такое, что

$$(a \otimes b)^\sigma = -(b \otimes a)^\sigma, \quad (a^{\psi_i D} \otimes b)^\sigma = (b^{\psi_i D} \otimes a)^\sigma, \quad x_i^{(a\otimes b)^\sigma} = p^{(a\otimes b^{\psi_i})^\sigma},$$

где a^φ — образ элемента a при отображении φ. Допустим, что пространство X не содержит собственных $(A \otimes A)^\sigma$-инвариантных подпространств.

Пусть $[A]$ — линейная копия пространства A. Введем градуировку на пространстве B:

$$B = B_0 \oplus B_1, \text{ где } B_0 = A, \ B_1 = X \oplus [A].$$

Определим произведение однородных элементов из $B_0 \cup B_1$:

(а) $a \cdot x_i = [a^{\psi_i}], \quad [a] \cdot x_i = a^{\psi_i D}$,

(б) $a \cdot [b] = -[b] \cdot a = p^{(a\otimes b)^\sigma}$,

(в) остальные произведения базисных элементов нулевые.

Построенная супералгебра называется *расширенным дублем* (алгебры A с нулевым умножением) и обозначается через $B(A, X, D, \sigma, \Psi)$.

Заметим, что $X' := AX = [A]$, $AX' \subseteq X$ и выполнены равенства (5). Кроме того, известно, что

$$ap = [a], \quad D = R_p^2, \quad p^{(a\otimes b)^\sigma} = -pL_aL_b.$$

Обозначим через ∇ подалгебру в $\mathrm{End}_\Phi(X)$, порожденную множеством операторов $\{L_aL_b \mid a, b \in A\}$ и тождественным отображением 1_A. Заметим, что алгебра ∇ порождается множеством $(A\otimes A)^\sigma \cup \{1_A\}$. Известно, что расширенный дубль $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ является сингулярной супералгеброй с невырожденным переключателем тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$.

Заметим, что 10-мерный расширенный дубль не является линейно порожденной супералгеброй; более того, его индекс равен 2.

§ 2. Некоторые результаты без ограничений на жорданову форму операторов D и ψ

В данной работе рассматриваются только сингулярные супералгебры с невырожденным переключателем p; $D = R_p^2$; кроме того, если не оговорено противное, предполагается, что

$$\Lambda_0(D) = \{\pm 1\}, \text{ т. е. } A = A_1 \oplus A_{-1},$$

где A_1, A_{-1} — весовые подпространства в A оператора D.

Определение. Если $x \in X, a \in A$, то положим $a^{\psi_x} = a'$, если $ax = a'p$.

В силу невырожденности переключателя p отображение ψ_x определено корректно.

Определение. Элемент $0 \neq x \in X$ называется *вырожденным*, если оператор ψ_x вырожденный на A_1.

2.1. Предварительные леммы.

Лемма 2.1. *Справедливо следующее условие «инвариантности»:*

$$a^{\psi}(bp) = a(b^{\psi}p)$$

для $\psi = \psi_x$ *и любых* $a, b \in A$.

Доказательство. В силу леммы 1.1(б) имеем

$$a^{\psi}(bp) = -b(a^{\psi}p) = -b(ax) = a(bx) = a(b^{\psi}p).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если* $a_{-1} \cdot A_1p = 0$, *то* $a_{-1} = 0$. *Аналогично если* $a_1 \cdot A_{-1}p = 0$, *то* $a_1 = 0$.

Доказательство. Если v — ненулевой весовой вектор из множества $a_{-1} \cdot A_{-1}p$, то его собственное значение относительно оператора D равно -2. Поскольку $-2 \notin \Lambda_1(D)$, то $a_{-1} \cdot A_{-1}p = 0$. Тогда

$$0 = a_{-1} \cdot Ap = a_{-1}X'$$

и $a_{-1} = 0$ в силу леммы 1.2(а). Лемма доказана.

2.2. Вырожденность оператора ψ на A_1.

Лемма 2.3. *Если* $0 \neq x \in X$, *то* $\psi_x \neq 0$ *на каждой компоненте* A_1 *и* A_{-1}.

Доказательство. Допустим, что $A_1x = 0$. Тогда

$$A_{\varepsilon} \cdot A_{\varepsilon'}x = 0, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1,$$

откуда следует, что подпространство Φx инвариантно относительно алгебры ∇, что противоречит определению расширенного дубля. Значит, $\psi_x \neq 0$ на компоненте A_1. Аналогично проверяется, что $\psi_x \neq 0$ на A_{-1}. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ *— расширенный дубль с невырожденным переключателем* p *произвольной размерности и* $\operatorname{ind}(B) \geq 2$. *Тогда существует* $0 \neq x \in X$ *такой, что отображение* ψ_x *вырожденное на* A_1, *т. е.* $(\exists 0 \neq a_1 \in A_1)\ a_1x = 0$.

Доказательство. Пусть $q \in X$, $q \notin \Phi p$. Заметим, что $A_1X \subseteq A_1p$, и рассмотрим отображение $R_{\lambda p - q} : A_1 \to A_1p$, где $\lambda \in \Phi$.

Пусть $(v_1, \ldots, v_k)$ — базис A_1; тогда $(v_1p, \ldots, v_kp)$ — базис A_1p и

$$v_iq = \sum_j \theta_{ij}v_jp,$$

т. е. $\Theta = (\theta_{ij})$ — матрица линейного отображения $R_q : A_1 \to A_1p$ относительно пары базисов $(v_1, \ldots, v_k)$ и $(v_1p, \ldots, v_kp)$. Матрица отображения $R_{\lambda p - q}$ является характеристической матрицей $\lambda \cdot E - \Theta$ для матрицы Θ. Поскольку поле Φ алгебраически замкнуто, можно подобрать элемент $\lambda \in \Phi$ так, что $|\lambda \cdot E - \Theta| = 0$. Значит, отображение $R_{\lambda p - q}$ вырожденное. Лемма доказана.

Всюду далее предполагается, что $\dim(A) = 4$. В [6, теорема 3] доказано, что ни одна из компонент A_1 и A_{-1} не может быть одномерна, значит,

$$\dim A_1 = \dim A_{-1} = 2.$$

Если линейное отображение $0 \neq \psi := \psi_x$ вырожденно на A_1, то положим $x_1 = x$ и $x_2 = p - x$. Тогда x_1, x_2 линейно независимы, поскольку они действуют поразному на подходящий элемент $0 \neq a_2 \in A_1$:

$$a_2 x_1 = 0, \quad a_2 x_2 = a_2 p \neq 0.$$

Далее, оператор ψ на A_1 либо диагонален, либо является жордановой клеткой. В этой работе будет рассмотрен только первый из этих случаев.

Пусть $a_1^\psi = \lambda a_1$, $a_2^\psi = 0$, причем $\lambda \neq 0$ в силу леммы 2.3. Значит, справедливы равенства

$$a_1 x_1 = \lambda a_1 p, \quad a_2 x_1 = 0, \quad a_1 x_2 = (1-\lambda) a_1 p, \quad a_2 x_2 = a_2 p. \tag{6}$$

2.3. Одно замечание об операторе ψ. Докажем, что понятие супералгебры диагонального типа определено корректно.

Лемма 2.5. *Не существует вырожденных элементов $0 \neq x, y \in X$ таких, что на A_1 оператор ψ_x диагонален, а ψ_y является жордановой клеткой.*

Доказательство. Допустим, что для некоторых ненулевых $x, y \in X$ существуют ненулевые $a_1, a_2, c_1, c_2 \in A_1$ и $\lambda \in \Phi^\times$ такие, что

$$a_1 x = \lambda a_1 p, \quad a_2 x = 0, \qquad c_1 y = c_2 p, \quad c_2 y = 0. \tag{7}$$

Вектор $z = \lambda^{-1} x$ удовлетворяет равенствам

$$a_1 z = a_1 p, \quad a_2 z = 0. \tag{8}$$

Поскольку 1 является собственным значением оператора ψ_z, элементы y, z непропорциональны. Значит, $X = \langle y, z \rangle$. В силу леммы 1.2(б) элементы a_2, c_2 линейно независимы (иначе $a_2 X = 0$), значит, они линейно порождают A_1. Отсюда $A_1 y \cdot z = 0$, поскольку в силу (7) и (8)

$$a_2 y \cdot z = a_2 z \cdot y = 0, \quad c_2 y \cdot z = 0.$$

Кроме того, из (7) следует $A_1 y \cdot y = 0$. Стало быть, $A_1 y \cdot X = 0$ и $A_1 y = 0$ в силу леммы 1.2(в). Равенство $A_1 y = 0$ противоречит соотношению $c_1 y = c_2 p$ из (7). Полученное противоречие завершает доказательство. Лемма доказана.

2.4. О жордановых формах оператора D на A_1 и A_{-1}. Заметим, что компоненты A_1 и A_{-1} в определенном смысле равноправны. Пусть p — невырожденный переключатель, $i = \sqrt{-1} \in \Phi$. Тогда $p' = ip$ также невырожденный переключатель. Если $D = R_p^2$, то $D' = R_{p'}^2 = -D$ и компоненты $A_1(D)$, $A_{-1}(D)$ для D совпадают с компонентами $A_{-1}(D')$, $A_1(D')$ для D'. Кроме того, если D диагонален на A_1, то D' диагонален на A_{-1}; если D является жордановой клеткой на $A_1(D)$, то D' также жорданова клетка на $A_{-1}(D')$. В самом деле, если

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2,$$

то для элементов $g_1 = e_1$, $g_2 = -e_2$ верно

$$g_1^{D'} = -g_1 + g_2, \quad g_2^{D'} = -g_2.$$

Лемма 2.6. *Если оператор D диагонален на одном из весовых пространств A_1, A_{-1}, то он диагонален и на другом пространстве.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — жорданов базисный блок оператора D в пространстве A_1:

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2.$$

Допустим, что оператор D диагонален на A_{-1}; тогда для любого $a_{-1} \in A_{-1}$ верно $a_{-1}^D = -a_{-1}$. В силу леммы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} e_1(a_{-1}p) + e_2(a_{-1}p) &= e_1^D(a_{-1}p) = (e_1p \cdot p)(a_{-1}p) \\ &= (a_{-1}p \cdot p)(e_1p) = (a_{-1}D)(e_1p) = -a_{-1}(e_1p) = e_1(a_{-1}p). \end{aligned}$$

Значит, $(\exists 0 \neq a_1 \in A_1)$ $a_1(a_{-1}p) = 0$, т. е. $a_1(A_{-1}p) = 0$. Отсюда в силу леммы 1.3 получаем $a_1 = 0$; противоречие. Лемма доказана.

2.5. Жордановы формы операторов D и ψ.

Лемма 2.7. *Если оператор D на A_1 является жордановой клеткой, то оператор $\psi := \psi_x$ на A_1 не может быть диагональным.*

Доказательство. Допустим, что для подходящих базисов (e_1, e_2), (a_1, a_2) и скаляра $\lambda \in \Phi^\times$ (см. лемму 2.3) справедливы равенства

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2, \qquad a_1^\psi = \lambda a_1, \quad a_2^\psi = 0.$$

1^0. Докажем, что $e_2^\psi = 0$. Пусть $e_2^\psi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. Поскольку ψ и D перестановочны, то

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = e_2^\psi = (e_2^D)^\psi = (e_2^\psi)^D = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)^D = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2,$$

откуда $\alpha_1 e_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$ и $e_2^\psi = \alpha_2 e_2$. Проверим, что $\alpha_2 = 0$.

Пусть, от противного, $\alpha_2 \neq 0$. Тогда α_2 является ненулевым собственным значением оператора ψ, значит, $\alpha_2 = \lambda$, $e_2^\psi = \lambda e_2$ и векторы e_2 и a_1 пропорциональны. Поскольку $\mathrm{Im}(\psi) = \langle a_1 \rangle = \langle e_2 \rangle$, то $e_1^\psi = \mu e_2$ для некоторого $\mu \in \Phi$. Итак,

$$e_1^\psi = \mu e_2, \quad e_2^\psi = \lambda e_2.$$

Учитывая перестановочность операторов ψ и D, имеем

$$\mu e_2 = \mu(e_2^D) = (\mu e_2)^D = (e_1^\psi)^D = (e_1^D)^\psi = (e_1 + e_2)^\psi = (\lambda + \mu)e_2,$$

значит, $\lambda = 0$; противоречие.

Тем самым доказано, что $e_2^\psi = 0$.

2^0. Поскольку дефект оператора ψ равен 1, то $\mathrm{Ker}(\psi) = \langle a_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$, т. е. векторы a_2 и e_2 пропорциональны. Разложим e_1 по базису (a_1, e_2):

$$e_1 = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 e_2.$$

Так как векторы $e_1 - \gamma_2 e_2$ и a_1 пропорциональны, то

$$(e_1 - \gamma_2 e_2)^\psi = \lambda(e_1 - \gamma_2 e_2),$$

значит, $e_1^\psi = \lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2$. Наконец,

$$e_1^{\psi D} = (\lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2)^D = \lambda(e_1 + e_2) - \lambda\gamma_2 e_2, \quad e_1^{D\psi} = (e_1 + e_2)^\psi = e_1^\psi = \lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2.$$

Отсюда вновь получаем $\lambda = 0$; противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, *если B — супералгебра диагонального типа, то оператор D на компоненте A_1 совпадает с тождественным отображением, а на компоненте A_{-1} оператор D действует как $-1_{A_{-1}}$.*

§ 3. Общие результаты о структуре супералгебр с диагональным оператором ψ

3.1. Действие оператора ψ на A_{-1}.

Лемма 3.1. *Если оператор $\psi := \psi_x$ на A_1 диагонален, т. е.*

$$a_1^\psi = \lambda a_1, \quad a_2^\psi = 0 \text{ и } \lambda \neq 0,$$

то ψ на A_{-1} также диагонален. Более того, для подходящих $b_1, b_2 \in A_{-1}$

$$b_1^\psi = \lambda b_1, \ \ b_2^\psi = 0.$$

Кроме того, справедливы равенства

$$a_2 \cdot b_1 p = a_1 \cdot b_2 p = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем сначала, что оператор ψ на A_{-1} не может быть жордановой клеткой. Пусть, от противного, для векторов $b_1, b_2 \in A_{-1}$ и скаляра $\mu \in \Phi$

$$b_1^\psi = \mu b_1 + b_2, \quad b_2^\psi = \mu b_2.$$

В силу леммы 2.1 последовательно получаем

$$0 = a_2^\psi \cdot b_2 p = a_2(b_2^\psi \cdot p) = a_2 \cdot (\mu b_2)p = \mu a_2 \cdot b_2 p, \tag{10}$$

$$0 = a_2^\psi \cdot b_1 p = a_2(b_1^\psi \cdot p) = a_2 \cdot (\mu b_1 + b_2)p = \mu a_2 \cdot b_1 p + a_2 \cdot b_2 p, \tag{11}$$

$$\lambda a_1 \cdot b_2 p = a_1^\psi \cdot b_2 p = a_1 \cdot b_2^\psi p = \mu a_1 \cdot b_2 p. \tag{12}$$

Если $\mu \neq 0$, то $a_2 \cdot b_2 p = 0$ в силу (10) и $a_2 \cdot b_1 p = 0$ в силу (11), отсюда вытекает, что $a_2 \cdot A_{-1} p = 0$. Тогда $a_2 = 0$ в силу леммы 2.2; противоречие.

Тем самым доказано, что $\mu = 0$, т. е.

$$b_1^\psi = b_2, \quad b_2^\psi = 0.$$

Кроме того, из (12) и условия $\lambda \neq 0$ следует $a_1 \cdot b_2 p = 0$, а из (11) вытекает $a_2 \cdot b_2 p = 0$, т. е. $b_2 \cdot A_1 p = 0$, что невозможно по лемме 2.2.

Стало быть, ψ диагонален и на пространстве A_{-1}:

$$b_1^\psi = \mu_1 b_1, \quad b_2^\psi = \mu_2 b_2.$$

Заметим, что хотя бы один из скаляров μ_1, μ_2 должен быть ненулевым по лемме 2.2. Докажем, что оба они не могут быть ненулевыми. В самом деле, если они оба отличны от нуля, то

$$0 = a_2^\psi \cdot b_1 p = a_2 \cdot b_1^\psi p = \mu_1 a_2 \cdot b_1 p,$$

т. е. $a_2 \cdot b_1 p = 0$. Аналогично $a_2 \cdot b_2 p = 0$. Значит, $a_2 \cdot A_{-1} p = 0$. Тогда $a_2 = 0$ в силу леммы 2.2, что невозможно. Таким образом, можно считать, что

$$b_1^\psi = \mu b_1, \quad b_2^\psi = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Попутно доказана справедливость равенств (9).

Докажем в заключение, что $\lambda = \mu$. Во-первых,

$$\lambda a_1 \cdot b_1 p = a_1^\psi \cdot b_1 p = a_1 \cdot b_1^\psi p = \mu a_1 \cdot b_1 p,$$

значит, $(\lambda - \mu) a_1 \cdot b_1 p = 0$. Докажем, что $a_1 \cdot b_1 p \neq 0$.

Допустим, что $a_1 \cdot b_1 p = 0$. Поскольку

$$\lambda a_1 \cdot b_2 p = a_1^\psi \cdot b_2 p = a_1 \cdot b_2^\psi p = 0,$$

то $a_1 \cdot A_{-1} p = 0$ и $a_1 = 0$ по лемме 2.2; противоречие. Лемма доказана.

3.2. Выбор канонического базиса. В силу равенств (6) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2. *В супералгебре B справедливы равенства*

$$a_1x_1 = \lambda a_1p, \quad a_2x_1 = 0, \quad a_1x_2 = (1-\lambda)a_1p, \quad a_2x_2 = a_2p,$$

$$b_1x_1 = \lambda b_1p, \quad b_2x_1 = 0, \quad b_1x_2 = (1-\lambda)b_1p, \quad b_2x_2 = b_2p.$$

Определение. Базис супералгебры

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : x_1, x_2 \ (p = x_1 + x_2),$$

$$M_1 : x'_1 = a_1p, \ x'_2 = a_2p, \quad M_{-1} : y'_1 = b_1p, \ y'_2 = b_2p$$

назовем *каноническим*, если умножение базисных элементов задано следующей таблицей при $i = 1, 2$:

1) $a_ix_i = x'_i, \quad b_ix_i = y'_i$,
2) $x'_ix_i = a_i, \quad y'_ix_i = -b_i$,
3) $a_iy'_i = -b_ix'_i$,
4) $(\forall a \in A_1 \cup A_{-1})(\forall m \in M_1 \cup M_{-1}) \quad a \circ m = 0$;

если произведение базисных элементов не указано в таблице, то, как обычно, оно считается нулевым; в частности, произведения базисных элементов с разными индексами равны 0.

Лемма 3.3. *В супералгебре B диагонального типа может быть выбран канонический базис.*

Доказательство. Пусть λ — параметр из леммы 3.2. Введем новый базис в X, считая $\lambda_0 = (1-\lambda)\lambda^{-1}$:

$$z_1 = \lambda^{-1}x_1, \quad z_2 = x_2 - \lambda_0x_1.$$

Заметим, что

$$x_1 = \lambda z_1, \quad x_2 = \lambda_0x_1 + z_2 = \lambda_0\lambda z_1 + z_2 = (1-\lambda)z_1 + z_2.$$

Кроме того, $\lambda_0\lambda = 1 - \lambda$, $\lambda^{-1} - \lambda_0 = 1$. Проверим, что базис

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : z_1, z_2,$$

$$M_1 : x'_1, x'_2, \quad M_{-1} : y'_1, y'_2$$

канонический. Рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Покажем, что $z_1 + z_2 = p$. Имеем

$$z_1 + z_2 = \lambda^{-1}x_1 + x_2 - \lambda_0x_1 = (\lambda^{-1} - \lambda_0)x_1 + x_2 = x_1 + x_2 = p.$$

2^0. Покажем, что произведения базисных элементов с разными индексами равно 0.

В самом деле,

$$a_2z_1 = 0, \quad b_2z_1 = 0,$$

$$a_1z_2 = a_1(x_2 - \lambda_0x_1) = (1-\lambda)a_1p - \lambda_0\lambda a_1p = ((1-\lambda) - \lambda_0\lambda)a_1p = 0,$$

$$b_1z_2 = b_1(x_2 - \lambda_0x_1) = (1-\lambda)b_1p - \lambda_0b_1x_1 = ((1-\lambda) - \lambda_0\lambda)b_1p = 0,$$

$$x'_1z_2 = a_1p \cdot z_2 = a_1z_2 \cdot p = 0, \quad x'_2z_1 = a_2p \cdot z_1 = 0,$$

$$y'_1z_2 = b_1p \cdot z_2 = 0, \quad y'_2z_1 = b_2p \cdot z_1 = 0.$$

3^0. Справедливы необходимые представления элементов x'_1, x'_2, y'_1, y'_2:

$$a_1z_1 = \lambda^{-1}a_1x_1 = a_1p = x'_1, \quad a_2z_2 = a_2x_2 = a_2p = x'_2,$$

$$b_1z_1 = \lambda^{-1}b_1x_1 = b_1p = y_1', \quad b_2z_2 = b_2x_2 = b_2p = y_2'.$$

4^0. Выполнены необходимые равенства для элементов $x_i'z_i$, $y_i'z_i$:

$$x_1'z_1 = a_1p \cdot \lambda^{-1}x_1 = \lambda^{-1}a_1x_1 \cdot p = a_1D = a_1,$$
$$x_2'z_2 = a_2p \cdot (x_2 - \lambda_0x_1) = a_2x_2 \cdot p = a_2D = a_2,$$
$$y_1'z_1 = b_1p \cdot \lambda^{-1}x_1 = \lambda^{-1}b_1x_1 \cdot p = b_1D = -b_1,$$
$$y_2'z_2 = b_2p \cdot (x_2 - \lambda_0x_1) = b_2x_2 \cdot p = b_2D = -b_2.$$

5^0. Заметим, что равенства из п. 4 в определении канонического базиса выполнены в силу (5). Проверим справедливость равенств $a_1y_1' = x_1'b_1$ и $a_2y_2' = x_2'b_2$, используя лемму 1.1(б):

$$a_1y_1' = a_1 \cdot b_1p, \quad x_1'b_1 = -b_1 \cdot a_1p = a_1 \cdot b_1p,$$
$$a_2y_2' = a_2 \cdot b_2p, \quad x_2'b_2 = -b_2 \cdot a_2p = a_2 \cdot b_2p.$$

Лемма доказана.

Можно проверить, что элементы $a_1 \cdot b_1p$ и $a_2 \cdot b_2p$ образуют базис X, однако он мало пригоден для дальнейшего, поскольку неясно, как действует алгебра ∇ на эти элементы.

Лемма 3.4. *В супералгебре B можно выбрать канонический базис*

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : z_1, z_2 \ (p = z_1 + z_2),$$
$$M_1 : x_1' = a_1p, \ x_2' = a_2p, \quad M_{-1} : y_1' = b_1p, \ y_2' = b_2p$$

так, что будут выполнены соотношения

$$a_1 \cdot b_1z_1 = \mu z_1 + z_2, \quad a_2 \cdot b_2z_2 = (1 + \mu\nu)z_1 + (1 + \nu)z_2. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть выбран базис супералгебры B, для которого справедливы равенства из леммы 3.2.

Положим $u = a_1(b_1x_1)$. Покажем, что $u \notin \Phi x_1$. Если $u \in \Phi x_1$, то Φx_1 является собственным ∇-инвариантным подпространством в X, что невозможно по определению расширенного дубля. Тогда для некоторых скаляров α, β верно представление $\alpha x_1 + \beta u = p$, причем $\alpha, \beta \neq 0$ в силу вырожденности x_1 и невырожденности p. Тогда $(\alpha^{-1}\beta a_1)(b_1(\alpha x_1)) = \beta u$. Заменим элемент x_1 пропорциональным элементом $\alpha x_1 \neq 0$. Заметим, что если элементы a_i, b_i заменить ненулевыми пропорциональными элементами, то для новых элементов вновь будут выполнены равенства из леммы 3.2. Тем самым можно считать, что справедливо равенство

$$a_1 \cdot b_1x_1 = x_2.$$

Аналогично $a_2 \cdot b_2x_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$, причем $\gamma \in \Phi^\times$, $\delta \in \Phi$, откуда

$$(\gamma^{-1}a_2) \cdot b_2x_2 = x_1 + (\gamma^{-1}\delta)x_2,$$

значит, можно считать, что

$$a_2 \cdot b_2x_2 = x_1 + \omega x_2.$$

Тогда в обозначениях леммы 3.3 справедливы равенства

$$a_1y_1' = a_1 \cdot b_1x_1 = x_2 = (1 - \lambda)z_1 + z_2,$$
$$a_2y_2' = a_2 \cdot b_2x_2 = x_1 + \omega x_2 = \lambda z_1 + \omega((1 - \lambda)z_1 + z_2) = (\lambda + \omega(1 - \lambda))z_1 + \omega z_2.$$

Полагая $\mu = 1 - \lambda$, имеем

$$a_1 \cdot b_1z_1 = \mu z_1 + z_2, \quad a_2 \cdot b_2z = (1 - \mu + \omega\mu)z_1 + \omega z_2.$$

Замена $\omega = \nu + 1$ приводит к соотношениям (13). Лемма доказана.

§ 4. Структура и изоморфизмы супералгебр диагонального типа

4.1. Структура супералгебр. Лемма 3.4 является основанием для следующего определения.

Определение. Если $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$, то обозначим через $BD(\mu,\nu)$ супералгебру с каноническим базисом:

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : x_1, x_2 \ (p = x_1 + x_2),$$
$$M_1 : x_1' = a_1 p, \ x_2' = a_2 p, \quad M_{-1} : y_1' = b_1 p, \ y_2' = b_2 p,$$

в которой выполнены равенства (13) из леммы 3.4.

Лемма 4.1. *Супералгебра вида $BD(\mu,\nu)$ правоальтернативна.*

Доказательство. Заметим, что супералгебра $BD(\mu,\nu)$ удовлетворяет равенствам (5). Значит, в силу [6, лемма 4.1] достаточно проверить, что для любых базисных элементов $x, y, z \in X$, $x', y', z' \in X'$ выполнены равенства

$$z'[R_x, R_y] = 0, \quad z[L_{x'}, L_{y'}] = 0.$$

Проверим только второе равенство. Из свойств произведений элементов канонического базиса имеем

$$x_1[L_{x_1'}, L_{y_1'}] = y_1'(x_1'x_1) - x_1'(y_1'x_1) = y_1'a_1 + x_1'b_1 = 0,$$
$$x_2[L_{x_2'}, L_{y_2'}] = y_2'(x_2'x_2) - x_2'(y_2'x_2) = y_2'a_2 + x_2'b_2 = 0,$$

если $\{i, j, k\} = \{1, 2\}$, то

$$x_i[L_{x_j'}, L_{x_k'}] = 0, \quad x_i[L_{y_j'}, L_{y_k'}] = 0, \quad x_i[L_{x_j'}, L_{y_k'}] = 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим действие операторов

$$\xi_{11} = -L(a_1)L(b_1), \ \ \xi_{22} = -L(a_2)L(b_2)$$

на базис x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1\xi_{11} &= \mu x_1 + x_2, & x_1\xi_{22} &= 0, \\ x_2\xi_{11} &= 0, & x_2\xi_{22} &= (1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2. \end{aligned}$$

Лемма 4.2. *Пусть E_{ij}, $i, j = 1, 2$, — матричные единицы алгебры 2×2-матриц $M_2(\Phi)$. Тогда матрицы $R = \mu E_{11} + E_{12}$ и $S = \eta E_{21} + \zeta E_{22}$ порождают алгебру $M_2(\Phi)$ при всех μ, η, ζ таких, что $\eta \neq 0$ и $\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим через C подалгебру $M_2(\Phi)$, порожденную элементами R, S. Имеем $RS = (\mu E_{11} + E_{12})(\eta E_{21} + \zeta E_{22}) = \eta E_{11} + \zeta E_{12} \in C$. Поскольку $R, RS \in C$ и $\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \neq 0$, то $E_{11}, E_{12} \in C$. Далее, $SE_{11} = (\eta E_{21} + \zeta E_{22})E_{11} = \eta E_{21} \in C$ и поскольку $\eta \neq 0$, то $E_{21} \in C$. Наконец, $E_{22} = E_{21}R - \mu E_{21} \in C$. Значит, $C = M_2(\Phi)$.

Заметим, что если $\eta = 0$, то матрицы R и S являются верхнетреугольными, значит, не порождают $M_2(\Phi)$. Лемма доказана.

Полагая $\eta = 1 + \mu\nu$, $\zeta = 1 + \nu$, получаем

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1+\mu\nu & 1+\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu - 1 \neq 0.$$

Из леммы 4.2 вытекает, что X — неприводимый модуль над алгеброй ∇.

Лемма 4.3. *Супералгебра $B = BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ является простой, значит, сингулярной.*

Доказательство. В силу [6, лемма 4.3] достаточно проверить равенство $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$. Если $a + b \in \mathrm{Ann}_r(B)$, где $a \in A_1$, $b \in A_{-1}$, то $a, b \in \mathrm{Ann}_r(B)$. Допустим, что $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Тогда

$$\begin{aligned}0 = -(b_1p)a = a(b_1p) = \alpha_1 a_1(b_1p) + \alpha_2 a_2(b_1p)\\ = \alpha_1 a_1(b_1p) = \alpha_1 a_1(b_1x_1) = \alpha_1(\mu x_1 + x_2),\end{aligned}$$

откуда $\alpha_1 = 0$. Можно считать, что $a = a_2$ и в силу (5)

$$0 = -(b_2x_2)a = -(b_2x_2)a_2 = a_2(b_2x_2) = (1 + \mu\nu)x_1 + (1 + \nu)x_2,$$

значит, $\nu = -1$, $\mu = 1$; противоречие.

Стало быть, супералгебра $BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ не имеет ненулевых правых четных аннуляторов. Аналогично проверяется отсутствие в ней и ненулевых нечетных правых аннуляторов. Лемма доказана.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Сингулярная* 10*-мерная супералгебра диагонального типа изоморфна супералгебре $BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$.*

Ограничения $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ в теореме существенны, поскольку при $\mu = 1$ подпространство Φp является ∇-инвариантным; аналогично при $\mu\nu = -1$ подпространство Φx_2 является ∇-инвариантным.

Замечание. Заметим, что супералгебра $BD(0, -1)$ совпадает с супералгеброй $B_{4|6}$, введенной в [6]:

$$a_ix_i = x_i', \quad b_ix_i = y_i', \quad a_iy_i' = -y_i'a_i = -b_ix_i' = x_i'b_i = x_{i^{(12)}}, \quad x_iB = 0,$$

$$b_iy_i' = y_i'b_i = a_ix_i' = x_i'a_i = 0, \quad x_i'x_i = a_i, \quad y_i'x_i = -b_i,$$

где $i = 1, 2$, $(1, 2)$ — транспозиция и, как обычно, считается, что произведения базисных элементов, которые не указаны в таблице, равны нулю.

4.2. Изоморфизм супералгебр диагонального типа.

Лемма 4.4. *В супералгебре $BD(\mu,\nu)$ вырожденными элементами из X являются только элементы вида $\lambda_1x_1, \lambda_2x_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi^\times$.*

Доказательство. В самом деле, если элемент $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, вырожденный на A_1, то для некоторого $0 \neq \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 \in A_1$ верно

$$0 = (\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = \alpha_1\lambda_1x_1' + \alpha_2\lambda_2x_2'.$$

Поскольку элементы x_1', x_2' линейно независимы, то

$$\alpha_1\lambda_1 = \alpha_2\lambda_2 = 0.$$

Так как $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $a = 0$; противоречие. Лемма доказана.

Нам потребуется еще одна лемма, в которой U_4 обозначает мультипликативную группу корней 4-й степени из 1 в поле Φ.

Лемма 4.5. *Пусть* $(1+\nu)(1+\nu') \neq 0$. *Тогда изоморфизм простых супералгебр* $BD(\mu,\nu)$ *и* $BD(\mu',\nu')$ *влечет выполнение соотношений*

$$\mu' \in \mu U_4, \quad \frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} \in \frac{1+\mu\nu}{1+\nu} U_4 \tag{1}$$

или

$$\frac{\mu'(1+\mu\nu)}{1+\nu} \in U_4, \quad \frac{\mu(1+\mu'\nu')}{1+\nu'} \in U_4. \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что супералгебры $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ изоморфны; тогда в алгебре $BD(\mu,\nu)$ существуют элементы

$$[a_i], [b_i] \in A, \quad [x_i] \in X, \quad [x_i'], [y_i'] \in Ap \quad (i=1,2)$$

такие, что они образуют канонический базис в $BD(\mu',\nu')$ и справедливы следующие равенства:

$$[a_1]\cdot[b_1][x_1] = \mu'[x_1] + [x_2], \quad [a_2]\cdot[b_2][x_2] = (1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2].$$

В силу леммы 4.4 возможны два случая:

I. $[x_1] = \lambda_1 x_1, \quad [x_2] = \lambda_2 x_2$;

II. $[x_1] = \lambda_2 x_2, \quad [x_2] = \lambda_1 x_1$ для ненулевых скаляров λ_1, λ_2.

Рассмотрим каждый из них.

I. Пусть $[x_1] = \lambda_1 x_1$, $[x_2] = \lambda_2 x_2$. Поскольку

$$[a_2][x_1] = [b_2][x_1] = [a_1][x_2] = [b_1][x_2] = 0,$$

то

$$[a_i] = \alpha_i a_i + \beta_i b_i, \quad [b_i] = \gamma_i a_i + \delta_i b_i, \quad i=1,2.$$

Поскольку векторы $[a_i]$, $[b_i]$ линейно независимы, матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$, $i=1,2$, невырожденны; пусть $\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix} \neq 0$.

Учитывая равенство $a(bx) = -b(ax)$ для любых $a,b \in A$, $x \in X$, имеем

$$[a_1]\cdot[b_1][x_1] = \lambda_1\Delta_1(a_1\cdot b_1 x_1) = \lambda_1\Delta_1(\mu x_1 + x_2), \quad \mu'[x_1] + [x_2] = \mu'\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

значит,

$$\mu' = \mu\Delta_1, \quad \lambda_2 = \lambda_1\Delta_1. \tag{14}$$

Аналогично

$$[a_2]\cdot[b_2][x_2] = \lambda_2\Delta_2 a_2\cdot b_2 x_2 = \lambda_2\Delta_2((1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2),$$

$$(1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2] = (1+\mu'\nu')\lambda_1 x_1 + (1+\nu')\lambda_2 x_2,$$

значит,

$$\lambda_2\Delta_2(1+\mu\nu) = (1+\mu'\nu')\lambda_1, \quad \Delta_2(1+\nu) = 1+\nu'.$$

Учитывая (14), получаем

$$\Delta_1\Delta_2(1+\mu\nu) = 1+\mu'\nu', \quad \Delta_2(1+\nu) = 1+\nu'. \tag{15}$$

Используя равенства $x_i' x_i = a_i$, $y_i' x_i = -b_i$, имеем

$$[a_i][x_i]\cdot[x_i] = \lambda_i^2(\alpha_i a_i + \beta_i b_i)x_i \cdot x_i = \lambda_i^2(\alpha_i a_i - \beta_i b_i),$$

$$[a_i] = \alpha_i a_i + \beta_i b_i,$$
$$[b_i][x_i]\cdot[x_i] = \lambda_i^2(\gamma_i a_i + \delta_i b_i)x_i \cdot x_i = \lambda_i^2(\gamma_i a_i - \delta_i b_i),$$
$$[b_i] = \gamma_i a_i + \delta_i b_i.$$

Значит,
$$\lambda_i^2 = \pm 1, \quad \alpha_i\beta_i = \gamma_i\delta_i = 0. \tag{16}$$
Итак, в случае I изоморфизм супералгебр $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ влечет выполнение соотношений
$$\mu' \in \mu U_4, \quad \frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} \in \frac{1+\mu\nu}{1+\nu}U_4. \tag{17}$$

II. Пусть $[x_1] = \lambda_2 x_2$, $[x_2] = \lambda_1 x_1$. Рассуждая аналогично предыдущему, проверим справедливость равенств
$$\lambda_1 = \lambda_2\Delta_2(1+\mu\nu), \quad \mu' = \Delta_2(1+\nu), \tag{18}$$
$$\Delta_1\mu = 1+\nu', \quad \Delta_1 = 1+\mu'\nu', \tag{19}$$
где $\lambda_i \in U_4$. Заметим сначала, что
$$[a_2] = \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1, \quad [a_1] = \alpha_2 a_2 + \beta_2 b_2, \quad [b_2] = \gamma_1 a_1 + \delta_1 b_1, \quad [b_1] = \gamma_2 a_2 + \delta_2 b_2.$$
Поскольку
$$[a_1]\cdot[b_1][x_1] = \lambda_2\Delta_2(a_2\cdot b_2x_2) = \lambda_2\Delta_2((1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2),$$
$$\mu'[x_1] + [x_2] = \mu'\lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_1,$$
то
$$\lambda_2\Delta_2(1+\mu\nu) = \lambda_1, \quad \Delta_2(1+\nu) = \mu'.$$
Аналогично
$$[a_2]\cdot[b_2][x_2] = \lambda_1\Delta_1 a_1\cdot b_1 x = \lambda_1\Delta_1(\mu x_1 + x_2),$$
$$(1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2] = (1+\mu'\nu')\lambda_2 x_2 + (1+\nu')\lambda_1 x_1,$$
значит,
$$\Delta_1\mu = 1+\nu', \quad \Delta_1 = 1+\mu'\nu'.$$
По предположению $\nu \neq -1$, $\nu' \neq -1$; тогда из (18), (19) вытекает
$$\frac{\mu'(1+\mu\nu)}{1+\nu} \in U_4, \quad \frac{\mu(1+\mu'\nu')}{1+\nu'} \in U_4. \tag{20}$$
Лемма доказана.

Теперь можно доказать, что семейство простых супералгебр $BD(\mu,\nu)$ над полем комплексных чисел 2-параметрическое.

Теорема 2. *Пусть $\Phi = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; μ,ν,μ',ν' — действительные положительные числа, причем $\mu \neq 1$, $\mu' \neq 1$. Если супералгебры $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ изоморфны, то $(\mu,\nu) = (\mu',\nu')$.*

Доказательство. Пусть эти супералгебры изоморфны. Если выполнен случай I из леммы 4.5, то $\mu' = \mu$ и $\frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} = \frac{1+\mu\nu}{1+\nu}$, значит,
$$(1+\mu\nu')(1+\nu) = (1+\mu\nu)(1+\nu'),$$
откуда $(\mu-1)(\nu'-\nu) = 0$ и $\nu' = \nu$.

Допустим, что выполнен случай II из леммы 4.5. Тогда справедливы равенства

$$\mu'(1+\mu\nu) = 1+\nu, \quad \mu(1+\mu'\nu') = 1+\nu'. \tag{21}$$

Первое равенство не может быть выполнено, если одновременно $\mu, \mu' > 1$ или $0 < \mu, \mu' < 1$. Кроме того, не может быть $\mu\mu' = 1$, поскольку в этом случае получаем $\mu = 1$.

Допустим, что $\mu > 1$, $0 < \mu' < 1$. Если $\mu\mu' > 1$, то

$$\mu(1+\mu'\nu') = \mu + \mu\mu'\nu' > 1+\nu'.$$

Если же $\mu\mu' < 1$, то

$$\mu'(1+\mu\nu) = \mu' + \mu'\mu\nu < 1+\nu.$$

В каждом из вариантов получаем противоречие с равенствами (21). Лемма доказана.

Замечание. Покажем, что если супералгебра $B_{4|6} = BD(0,-1)$ изоморфна супералгебре $BD(\mu',\nu')$, то $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. Пусть $\mu = 0$, $\nu = -1$ и супералгебры $BD(\mu,\nu)$, $BD(\mu',\nu')$ изоморфны. В случае I из соотношений (14) и (15) получаем $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. В случае II из равенств (18) и (19) получаем $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. Заметим, что выполнение равенств (14), (15), (18) и (19) не связано с ограничением $(1+\nu)(1+\nu') \neq 0$, которое предполагалось выполненным в лемме 4.5.

§ 5. Расширенные 10-мерные дубли с максимальным спектром $\Lambda_0(D)$

Как и прежде, $\dim(B) = 10$, $D = R_p^2$, где p — невырожденный переключатель. Предположим, что спектр $\Lambda_0(D)$ имеет ровно 4 значения. Можно считать, что одно их них равно 1. Пусть $\mu \neq \pm 1$ — фиксированное собственное значение оператора D. Тогда в силу леммы 1.4 имеем $\Lambda_0(D) = \{\pm 1, \pm\mu\}$. Покажем, что в супералгебре B можно выбрать невырожденный переключатель q такой, что спектр $\Lambda_0(R_q^2)$ состоит из двух значений ± 1, причем все ненулевые весовые векторы оператора R_q^2 собственные, а сама супералгебра B имеет диагональный тип.

Дальнейшие рассмотрения представим в виде ряда пунктов.

1^0. Пусть, как и ранее, ∇ — подалгебра, порожденная операторами L_aL_b, где $a, b \in A$. Из п. 1.2 следует, что для $a_\kappa \in A_\kappa$, $a_\nu \in A_\nu$, $\kappa, \nu \in \Lambda_0(D)$ верно

$$XL_{a_\kappa}L_{a_\nu} = 0, \text{ если } \kappa + \nu \neq 0.$$

Пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle$, $A_{-1} = \langle a_{-1} \rangle$, $A_\mu = \langle a_\mu \rangle$, $A_{-\mu} = \langle a_{-\mu} \rangle$. Поскольку $XL_aL_b \subseteq X$, алгебра ∇ порождается двумя операторами

$$\xi_1 = -L_{a_1}L_{a_{-1}}, \quad \xi_\mu = -L_{a_\mu}L_{a_{-\mu}}.$$

Заметим, что $[A]$ является прямой суммой четырех 1-мерных пространств:

$$[A] = [A]_1 \oplus [A]_{-1} \oplus [A]_\mu \oplus [A]_{-\mu}, \text{ где } [A]_\lambda = \langle a_\lambda p \rangle, \ \lambda \in \Lambda_0(D).$$

2^0. Кроме того, в силу леммы 1.3 $X = \langle x, y \rangle$, где $x = p\xi_1$, $y = p\xi_\mu$ и $p = \alpha_x x + \alpha_y y$, где $\alpha_x, \alpha_y \in \Phi^\times$. Изменяя базисы в A_1 и A_μ, можно считать, что

$$p = x + y. \tag{22}$$

Для любого $t \in X$ найдется скаляр $\gamma \in \Phi$:

$$a_\lambda t = \gamma a_\lambda p,$$

поскольку $\dim[A]_\lambda = 1$ и векторы $a_\lambda t, a_\lambda p$ пропорциональны. Значит, для $\lambda \in \Lambda_0(D)$ имеем

$$a_\lambda x = \gamma_\lambda a_\lambda p, \quad a_\lambda y = \delta_\lambda a_\lambda p. \tag{23}$$

Отсюда для $\lambda \in \Lambda_0(D)$ верно

$$(a_\lambda x)p = \gamma_\lambda (a_\lambda p)p = \gamma_\lambda a_\lambda D = \lambda \gamma_\lambda a_\lambda, \quad (a_\lambda y)p = \delta_\lambda (a_\lambda p)p = \delta_\lambda a_\lambda D = \lambda \delta_\lambda a_\lambda,$$

значит,

$$(a_\lambda x)p = \lambda \gamma_\lambda a_\lambda, \quad (a_\lambda y)p = \lambda \delta_\lambda a_\lambda. \tag{24}$$

Далее, ввиду леммы 1.1

$$\lambda \gamma_\lambda a_\lambda (a_{-\lambda} p) = (a_\lambda x p)(a_{-\lambda} p) = (a_{-\lambda} x p)(a_\lambda p) = -\lambda \gamma_{-\lambda} a_{-\lambda}(a_\lambda p) = \lambda \gamma_{-\lambda} a_\lambda (a_{-\lambda} p).$$

Тем самым получаем $\gamma_\lambda = \gamma_{-\lambda}$ и аналогично $\delta_\lambda = \delta_{-\lambda}$, т. е.

$$\gamma_\lambda = \gamma_{-\lambda}, \quad \delta_\lambda = \delta_{-\lambda}. \tag{25}$$

Учитывая равенства (23)–(25), имеем

$$x\xi_1 = a_1(a_{-1}x) = \gamma_1 a_1(a_{-1}p) = \gamma_1 x, \quad y\xi_1 = a_1(a_{-1}y) = \gamma_1 a_1(a_{-1}p) = \delta_1 x.$$

Аналогично

$$x\xi_2 = a_\mu(a_{-\mu}x) = \gamma_\mu a_\mu(a_{-\mu}p) = \gamma_\mu y, \quad y\xi_2 = a_\mu(a_{-\mu}y) = \delta_\mu a_\mu(a_{-\mu}p) = \delta_\mu y.$$

3^0. Так как $p = x + y$ в силу (22), то

$$\gamma_1 + \delta_1 = 1, \quad \gamma_\mu + \delta_\mu = 1. \tag{26}$$

Пусть $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ и $\nu \in \{\pm\mu\}$. В силу равенств (23)

$$a_\varepsilon x = \gamma_1 a_\varepsilon p, \quad a_\nu x = \gamma_\mu a_\nu p, \tag{27}$$

$$a_\varepsilon y = \delta_1 a_\varepsilon p, \quad a_\nu y = \delta_\mu a_\nu p. \tag{28}$$

4^0. Полагая $z = \delta_1 x - \gamma_1 y$, $t = \delta_\mu x - \gamma_\mu y$ и $\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_\mu & \delta_\mu \end{vmatrix}$, покажем, что справедливы следующие четыре равенства:

$$a_\varepsilon z = 0, \quad a_\nu z = -\Delta a_\nu p, \quad a_\varepsilon t = -\Delta a_\varepsilon p, \quad a_\nu t = 0.$$

Первое и третье равенства следуют из определения элементов z, t и равенств (27) и (28).

Заметим, что $\Delta \neq 0$, иначе $Az = 0$, тогда $z = 0$ в силу леммы 1.2(г). Значит, $\delta_1 = 0 = \gamma_1$, что противоречит равенству (26).

Используя равенства (27) и (28), проверим справедливость второго и четвертого соотношений:

$$a_\nu z = a_\nu(\delta_1 x - \gamma_1 y) = \delta_1 a_\nu x - \gamma_1 a_\nu y = \delta_1 \gamma_\mu a_\nu p - \gamma_1 \delta_\mu a_\nu p = -\Delta a_\nu p,$$

$$a_\nu t = a_\nu(\delta_\mu x - \gamma_\mu y) = \delta_\mu a_\nu x - \gamma_\mu a_\nu y = \delta_\mu \gamma_\mu a_\nu p - \gamma_\mu \delta_\mu a_\nu p = 0.$$

5^0. Итак, переключатели z и t вырожденны, а операторы ψ_z и ψ_t диагональны. Далее, переключатели z и t непропорциональны, так как $\Delta \neq 0$, значит, они образуют базис в пространстве X.

Далее, $AR_zR_t = 0$, $a_\varepsilon R_z^2 = 0$, $a_\nu R_t^2 = 0$ и

$$a_\nu R_z^2 = -\Delta a_\nu R_p R_z = -\Delta a_\nu R_z R_p = \Delta^2 a_\nu R_p^2 = \nu \Delta^2 a_\nu,$$

$$a_\varepsilon R_t^2 = -\Delta a_\varepsilon R_p R_z = -\Delta a_\varepsilon R_z R_p = \Delta^2 a_\varepsilon R_p^2 = \varepsilon \Delta^2 a_\varepsilon.$$

6^0. Покажем, что переключатель вида $q = \beta_1 z + \beta_2 t$ невырожденный, если $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^\times$. В самом деле, если $a_\varepsilon \neq 0$ и $a_\nu \neq 0$, то

$$a_\varepsilon q = -\beta_2 \Delta a_\varepsilon p \neq 0, \quad a_\nu q = -\beta_1 \Delta a_\nu p \neq 0.$$

7^0. Наконец, покажем, что если $\beta_1 = (\sqrt{\mu} \cdot \Delta)^{-1}$, $\beta_2 = \Delta^{-1}$, то оператор R_q^2 совпадает с тождественным отображением на пространстве $\langle a_1, a_\mu \rangle$. Имеем

$$a_1 R_q^2 = \beta_1^2 a_1 R_z^2 + \beta_2^2 a_1 R_t^2 = \beta_2^2 a_1 R_t^2 = \beta_2^2 \Delta^2 a_1 = a_1,$$

$$a_\mu R_q^2 = \beta_1^2 a_\mu R_z^2 + \beta_2^2 a_\mu R_t^2 = \beta_1^2 a_\mu R_t^2 = \beta_1^2 \mu \Delta^2 a_\mu = a_\mu.$$

Тем самым доказано, что супералгебра имеет диагональный тип.

Благодарность. Автор признателен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ряд замечаний, способствующих ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельманов Е. И. , Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 676–693.
2. *Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P.* On right alternative syperalgebras // Commun. Algebra. 2016. V. 44, N 1. P. 240–252.
3. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1078–1089.
4. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Сингулярные 6-мерные супералгебры // Сиб. электрон. мат. изв. http://semr.math.nsc.ru. 2018. Т. 15. С. 92–105.
5. *Pchelintsev S. V., Shashkov O. V.* Linearly generated singular superalgebras // J. Algebra. 2020. V. 546, N . P. 580–603.
6. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Алгебраически порожденные супералгебры // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 65, № 6. С. 67–83.
7. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Строение сингулярных супералгебр с 2-мерной четной частью и новые примеры сингулярных супералгебр // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 6. С. 742–765.
8. *Pchelintsev S. V., Shashkov O. V.* A finite-dimensional singular superalgebra is algebraically generated // J. Algebra. 2024. V. 645, N 1. P. 86–93.
9. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Лань, 2009.
10. *Jacobson N.* Lie algebras. New York; London: Interscience, 1962. (Intersci. Tracts Pure Appl. Math.; V. 10).

Поступила в редакцию 7 июля 2024 г.
После доработки 5 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович (ORCID 0000-0001-7857-9532)
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр-т, 49/2, Москва 125167
pchelinzev@mail.ru