Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТИПА $L_{p(\cdot)}$ $(L_{q(\cdot)})$ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

А. Н. Артюшин

Аннотация. Определяются итерированные (квази)нормированные пространства типа $L_{p(\cdot)}$ $(L_{q(\cdot)}(\dots))$ с показателями, зависящими от всех переменных. Для таких пространств доказан аналог интегрального неравенства Минковского для смешанных норм и мультипликативное неравенство интерполяционного типа. С помощью этих теорем доказана теорема вложения для пространства функций переменной гладкости, различной по разным направлениям.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.101

Ключевые слова: дробные производные, переменный показатель гладкости, переменный показатель суммируемости, итерированные пространства.

1. Введение

Пусть $Q = (0,T) \times (0,1)$, $0 < \nu,\mu < 1$, $1 < p < \infty$. Пусть $u(t,x) \in L_p(Q)$ такова, что

$$\partial_t^\nu u(t,x) \in L_p(Q), \quad \partial_x^\mu u(t,x) \in L_p(Q).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{p} > \frac{\nu\mu}{\nu+\mu},$$

и положим

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\nu\mu}{\nu+\mu}. \tag{1.1}$$

Тогда согласно известной теореме вложения (см. [1, 2]) справедливо включение $u(t,x) \in L_q(Q)$. Среди последних результатов в этом направлении отметим работу [3] с теоремами вложения для дробных мультианизотропных пространств.

Нас будет интересовать случай переменных показателей гладкости $\nu = \nu(x)$, $\mu = \mu(t)$. Вопросы такого рода возникают, например, при анализе уравнения дробной диффузии с переменным показателем производной

$$\partial_t^{\nu(x)} u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x).$$

Есть основания считать, что смешанная задача для такого уравнения обладает свойством максимальной регулярности в $L_p(Q)$. Иными словами, для $f(t,x) \in L_p(Q)$ имеют место включения

$$\partial_t^{\nu(x)} u(t,x), \Delta u(t,x) \in L_p(Q).$$

Естественным образом возникает вопрос: какому пространству принадлежит сама функция $u(t,x)$?

Формально применяя формулу (1.1), приходим к вложению $u(t,x) \in L_{q(\cdot)}(Q)$, где

$$\frac{1}{q(t,x)} = \frac{1}{p} - \frac{\nu(x)\mu(t)}{\nu(x)+\mu(t)}.$$

Оказывается, что при разумных условиях на показатели $\nu = \nu(x)$ и $\mu = \mu(t)$ данное вложение действительно имеет место. Вообще говоря, теоремы вложения для пространств с переменным показателем суммируемости изучаются с помощью максимальных функций Харди — Литтлвуда. Но мы получим данные результаты совершенно иным способом. А именно, применим мультипликативное неравенство интерполяционного типа для специальных анизотропных пространств суммируемых функций, обобщающих пространства типа $L_p(0,T;L_q(0,1))$. Такое обобщение сравнительно легко проделать в случае $p = p(t)$, $q = q(t,x)$ (см. [4]), но нам нужен случай полной зависимости $p = p(t,x)$, $q = q(t,x)$. Для такого обобщения требуется особая конструкция.

В [5] рассматривались пространства вида $W^1_{\overline{p}(\cdot)}(\Omega)$, $\overline{p}(x) = (p_1(x),\dots,p_n(x))$. Однако теорему вложения с предельным показателем получить не удалось. Представленные здесь результаты частично решают эту проблему. Более подробные комментарии будут даны ниже.

2. Лебеговы пространства с переменным показателем суммируемости

Напомним некоторые свойства пространств функций с переменным показателем суммируемости (см. [6]).

Пусть $\Omega \subset R^n$, $p(x)$ — измеримая функция на множестве Ω, $p_- = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} p(x)$, $p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} p(x)$, причем $0 < p_- \le p_+ < \infty$. Такие функции будем называть *допустимыми*. Легко видеть, что множество допустимых показателей замкнуто относительно операций сложения, умножения и деления. Всюду далее, не оговаривая особо, рассматриваем только допустимые $p(x)$.

Пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ состоит из функций с конечным интегралом

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty.$$

Для $f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$ корректно определена квазинорма

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \left\{\inf \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}. \tag{2.1}$$

Отметим, что для $f \not\equiv 0$ инфимум всегда достигается (непрерывность по λ).

Особо выделяем множество

$$\mathscr{P}_1(\Omega) = \{p(x) : 1 < p_- \le p_+ < \infty\}.$$

Обычно из контекста ясно, о каком множестве идет речь. Поэтому в дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, пишем просто $\mathscr{P}_1$ без явного указания множества Ω. Если $p(x) \in \mathscr{P}_1$, то $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ — норма (Люксембурга). Снабженное такой нормой $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ становится рефлексивным банаховым пространством. Сопряженным к нему является пространство $L_{q(\cdot)}(\Omega)$, где

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

Как обычно, сопряженный показатель обозначаем через $q = p'$. Легко проверяется, что $q(x) \in \mathscr{P}_1$.

В дальнейшем особую роль играет неравенство Юнга. Пусть $0 \le \theta \le 1$. Тогда для любых $a, b \ge 0$

$$a^\theta b^{1-\theta} \le \theta a + (1-\theta)b \le a + b.$$

Поточечно применяя неравенство Юнга с $\theta = 1/p(x)$, легко получаем

$$\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}} \int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-}.$$

Таким образом, имеет место неравенство Гёльдера (с константой)

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-}\right) \|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, положим

$$g_f(x) = \left(\frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)-1}.$$

Легко убедиться, что $\|g_f(x)\|_{q(\cdot)} \le 1$ и, следовательно,

$$\|f(x)\|_{p(\cdot)} = \int\limits_\Omega f(x)g_f(x)\,dx \le \sup_{\|g(x)\|_{q(\cdot)}\le 1} \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

Значит, имеет место эквивалентность норм

$$\|f(x)\|_{p(\cdot)} \sim \sup_{\|g(x)\|_{q(\cdot)}\le 1} \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

3. Пространства типа $L_{(t,x),(p,q)}$

Во многих доказательствах теорем вложения используются итерированные пространства вида $L_p(0,T;L_q(\Omega))$. Мы обобщаем такие пространства на случай показателей $p(t,x)$, $q(t,x)$. Отметим, что конструкция такого рода уже была ранее описана в [7]. Но, по-видимому, никакого дальнейшего развития эта идея не получила. Хочется сказать, что определение носит довольно необычный характер, поэтому сначала более подробно рассматривается случай двух переменных. После этого будет дано индуктивное определение и для других размерностей.

В дальнейшем рассматриваются функции многих переменных и применяются к ним различные (квази)нормы по той или иной переменной. В тех случаях, когда могут возникнуть сомнения, рядом с показателем нормы указывается соответствующая переменная. Например, запись $B(t) = \|u(t,x)\|_{x,p(t,x)}$ означает следующее. Для всякого фиксированного t рассматриваем функции $\widetilde{u}(x) = u(t,x)$ и $\widetilde{p}(x) = p(t,x)$ и полагаем $B(t) = \|\widetilde{u}(x)\|_{\widetilde{p}(x)}$.

Пусть $\Omega = R^2$, $p(t,x)$ и $q(t,x)$ — допустимые показатели. Для всякой функции $u(t,x)$ формально определяем величину $B_u(t) = \| |u|^p \|_{x,q/p}$. Пространство $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ состоит из функций, для которых

$$J_{(t,x),(p,q)}(u) = \int\limits_R B_u(t)\, dt < \infty.$$

Согласно (2.1) для всякого t величина $B_u(t)$ определяется из равенства

$$\int\limits_R \frac{|u|^{q(t,x)}(t,x)}{B_u^{\frac{q}{p}(t,x)}(t)}\, dx = 1 \tag{3.1}$$

при условии, что $u(t,x) \not\equiv 0$ (в противном случае $B_u(t) = 0$). Из равенства (3.1) легко выводим, что $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ — векторное пространство. Особо отметим, что в определении не требуется неравенство $p(t,x) \le q(t,x)$.

Очевидно, что переменные t и x входят в определение пространства несимметричным образом. Поэтому следует указывать явный порядок их использования. В дальнейшем, когда этот порядок не меняется и ясен из контекста, пишем просто $L_{p,q}(R^2)$ и $J_{p,q}(u)$.

Лемма 3.1. *Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $|u(t,x)| \le |v(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$, то*

$$J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(v).$$

Для любой ограниченной функции $a(t,x) \ge 0$

$$A_- J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(au) \le A_+ J_{p,q}(u), \tag{3.2}$$

где

$$A_- = \operatorname*{ess\,inf}_{R^2} a(t,x)^{p(t,x)}, \quad A_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{R^2} a(t,x)^{p(t,x)}.$$

Если $u(t,x) \not\equiv 0$, то функция $J_{p,q}(\mu u)$ непрерывна и строго монотонно возрастает при $\mu \in (0,\infty)$. При этом

$$\lim_{\mu\to 0} J_{p,q}(\mu u) \to 0, \quad \lim_{\mu\to\infty} J_{p,q}(\mu u) \to \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из равенства (3.1) следует, что для п.в. $t \in R$ справедливо неравенство $B_u(t) \le B_v(t)$, а значит, $J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(v)$.

Рассмотрим функцию $v(t,x) = u(t,x)A_+^{1/p(t,x)}$. Ясно, что $a(t,x)u(t,x) \le v(t,x)$ и $B_v(t) = A_+ B_u(t)$. Следовательно,

$$J_{p,q}(au) \le J_{p,q}(v) = A_+ J_{p,q}(u).$$

Аналогично доказываем неравенство $J_{p,q}(au) \ge A_- J_{p,q}(u)$.

Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2$. Тогда из неравенства (3.2) следует, что

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p_-} J_{p,q}(\mu_1 u) \le J_{p,q}(\mu_2 u) \le \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p_+} J_{p,q}(\mu_1 u). \tag{3.4}$$

В частности, $J_{p,q}(\mu_2 u) > J_{p,q}(\mu_1 u)$. Устремляя либо $\mu_1 \to 0$, либо $\mu_2 \to \infty$, получаем (3.3). $\square$

Как и ранее, вводим в рассмотрение однородный функционал типа Минковского

$$\|u\|_{p,q} = \left\{\inf \lambda > 0 : J_{p,q}(u/\lambda) \le 1\right\}. \tag{3.5}$$

Из леммы 3.1 следует, что данное определение корректно и для нетривиальных $u(t,x)$ требуемый инфимум достигается при $\lambda = \|u\|_{p,q}$. Как увидим далее, этот функционал задает квазинорму, а в случае $p,q \in \mathscr{P}_1$ эта квазинорма эквивалентна некоторой норме. Пока отметим некоторые простые следствия данного определения. Легко видеть, что для постоянных $p(t,x) \equiv p$ и $q(t,x) \equiv q$ только что определенное пространство в точности совпадает с $L_p(R; L_q(R))$. В случае $p(t,x) = q(t,x)$ имеет место «естественное» равенство

$$L_{(t,x),(p,p)}(R^2) = L_{(x,t),(p,p)}(R^2) = L_p(R^2).$$

Лемма 3.2. *Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $|u(t,x)| \le |v(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$, то*

$$\|u\|_{p,q} \le \|v\|_{p,q}.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $u_1 = u/\|u\|_{p,q}$ и $v_1 = v/\|u\|_{p,q}$. Очевидно, что $|u_1(t,x)| \le |v_1(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$. Следовательно, по лемме 3.1

$$1 = J_{p,q}(u_1) \le J_{p,q}(v_1),$$

и $\|v_1\|_{p,q} \ge 1$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $u(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $\|u\|_{p,q} \ge 1$, то*

$$\|u\|_{p,q}^{p_-} \le J_{p,q}(u) \le \|u\|_{p,q}^{p_+}. \tag{3.6}$$

Если $\|u\|_{p,q} \le 1$, то

$$\|u\|_{p,q}^{p_+} \le J_{p,q}(u) \le \|u\|_{p,q}^{p_-}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $\|u\|_{p,q} > 1$. Положим $\mu_1 = 1/\|u\|_{p,q}$, $\mu_2 = 1$ и применим неравенство (3.4). Получим неравенство (3.6). Аналогично доказываем неравенство (3.7). $\square$

В дальнейшем нам понадобится одна специальная конструкция, которую назовем *разложением нормы*. Пусть $u \in L_{p,q}(R^2)$. Обозначим

$$m_u(t) = \operatorname{mes}\{x \in R : |u(t,x)| \ne 0\}, \quad R_{ut} = \{t \in R : m_u(t) \ne 0\}.$$

Оказывается, что для нетривиальной функции $u(t,x)$ единственным образом определена такая пара N_0, $N_1(t) \ge 0$, что

$$N_1(t) = 0, \quad t \notin R_{ut}, \tag{3.8}$$

$$N_1(t) > 0, \quad t \in R_{ut}, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_R N_1(t)\, dt = 1, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_R \frac{u^q}{N_0^q N_1^{q/p}}\, dx = 1, \quad t \in R_{ut}. \tag{3.11}$$

Для тривиальной функции $u(t,x) \equiv 0$ эти величины просто равны 0.

Действительно, положим $N_0 = \|u\|_{p,q}$ и рассмотрим функцию $v = u/N_0$. Как и ранее, рассматриваем $B_v(t)$ и полагаем $N_1(t) = B_v(t)$. Тогда согласно определениям (3.1), (3.5) выполнены соотношения (3.8)–(3.11). Покажем единственность. Пусть $t \in R_{ut}$. Из (3.11) следует, что $\|u(t,\cdot)/N_{u0}\|_{x,q/p} = N_{u1}(t)$. В силу (3.8), (3.10) $J_{p,q}(u/N_{u0}) = 1$, а значит, $N_0 = \|u\|_{p,q}$. Тогда с необходимостью $N_1(t) = B_v(t)$.

4. Теорема о сравнении перестановочных квазинорм

Как отмечено выше, переменные t и x входят в определение пространства $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ несимметрично. В связи с этим возникает естественный вопрос: что произойдет, если поменять порядок переменных? Или при каких условиях можно сравнивать квазинормы $\|u\|_{(t,x),(p,q)}$ и $\|u\|_{(x,t),(q,p)}$?

Для постоянных показателей p, q сравнивать квазинормы позволяет известное интегральное неравенство Минковского (см., например, [8, с. 60]). Для переменных показателей вида $p(t) \geq q(x) \geq 1$ неравенство для смешанных норм было заявлено (с пробелами в доказательстве) в [4] (окончательный результат см. в [9]). Оказывается, что и в общем случае это можно делать при условии $p(t,x) \geq q(t,x)$ (или наоборот).

Теорема 4.1. *Пусть для допустимых показателей выполнено неравенство $p(t,x) \geq q(t,x)$ для п.в $(t,x) \in R^2$. Тогда для некоторой константы $C(p,q)$*

$$\|u\|_{(t,x),(p,q)} \leq C(p,q)\|u\|_{(x,t),(q,p)}.$$

Доказательство. Пусть $\|u\|_{(t,x),(p,q)} = 1$. Как и ранее, для $t \in R$ вводим функцию $B_u(t) = \||u|^p\|_{x,q/p}$. По определению это означает, что для $t \in R_{ut}$

$$\int\limits_R \frac{|u|^q(t,x)}{B_u^{q/p}(t)}\,dx = 1, \quad \int\limits_R B_u(t)\,dt = 1.$$

Следовательно,

$$1 = \int\limits_{R_{ut}} dt \int\limits_R B(t)\frac{|u|^q(t,x)}{B_u^{q/p}(t)}\,dx = \int\limits_R dx \int\limits_R |u|^q B_u^{(p-q)/p}\,dt. \tag{3.12}$$

Здесь можно было бы воспользоваться неравенством Гёльдера (2.2), но для этого нужно включение $(p/q) \in \mathscr{P}_1$.

Положим $\theta(t,x) = q/p$. Тогда $1-\theta = (p-q)/p$. Обозначим $N(x) = \||u|^q\|_{t,p/q}$. По неравенству Юнга если $N(x) \neq 0$, то

$$|u|^q B_u^{(p-q)/p} \leq N(x)\left(\theta\frac{|u|^p}{N^{p/q}(x)} + (1-\theta)B(t)\right).$$

Подставляя это неравенство в (3.12), получаем

$$1 \leq C_\theta \int\limits_R \|u^q\|_{(t,p/q)}\,dx$$

с константой

$$C_\theta = \operatorname*{ess\,sup}_{R^2}\theta(t,x) + \operatorname*{ess\,sup}_{R^2}(1-\theta(t,x)), \quad 1 \leq C_\theta \leq 2.$$

Поэтому

$$J_{(x,t),(q,p)}(u) \geq \frac{1}{C_\theta}.$$

По лемме 3.3

$$\|u\|_{(x,t),(q,p)}(u) \geq \frac{1}{C_\theta^{1/q_-}}. \quad \square$$

5. Многомерный случай

Рассмотрим случай произвольного количества переменных.

Пусть $n > 2$. Пусть для $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задан векторный показатель $\overline{p}(\overline{x}) = (p_1(\overline{x}), p_2(\overline{x}), \dots, p_n(\overline{x}))$ с допустимыми компонентами $p_k(\overline{x})$, $k = \overline{1, n}$. Как и в двумерном случае, следует указать некоторую перестановку индексов, задающую порядок использования переменных x_k. Это существенно осложнит все обозначения и рассуждения. Поэтому чтобы не загромождать изложение излишними обозначениями, считаем, что указана естественная перестановка в порядке возрастания индексов.

Далее индуктивным образом определяем пространство $L_{\overline{p}(\overline{x})}(R^n)$ и соответствующую квазинорму. Для $n = 2$ они уже были определены ранее ($L_{p_1,p_2}(R^2)$ и $\|\cdot\|_{p_1,q_1}$). Пусть дана функция $u(\overline{x})$. Для $x_1 \in R$ обозначим $\overline{y} = (x_2, \dots, x_n)$, $\overline{q}(\overline{y}) = (p_2(x_1, \overline{y}), \dots, p_n(x_1, \overline{y}))$, $v(\overline{y}) = |u(x_1, \overline{y})|^{p_1(x_1, \overline{y})}$. После этого формально определим

$$B_u(x_1) = \|v(\overline{y})\|_{L_{\overline{q}/p_1}(R^{n-1})}. \tag{5.1}$$

Пространство $L_{\overline{p}(\overline{x})}(R^n)$ состоит из тех функций, у которых

$$J_{\overline{p}}(u) = \int\limits_R B_u(x_1)\, dx_1 < \infty.$$

При этом формально определен однородный функционал

$$\|u\|_{\overline{p}} = \left\{\inf \lambda > 0 : J_{\overline{p}}(u/\lambda) \le 1\right\}.$$

Позже докажем, что этот функционал задает квазинорму.

Лемма 5.1. *Пусть $u(\overline{x}), v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Если $|u(\overline{x})| \le |v(\overline{x})|$ для п.в. $\overline{x} \in R^n$, то*

$$J_{\overline{p}}(u) \le J_{\overline{p}}(v). \tag{5.2}$$

Для любой ограниченной функции $a(\overline{x}) \ge 0$

$$A_- J_{\overline{p}}(u) \le J_{\overline{p}}(au) \le A_+ J_{\overline{p}}(u),$$

где

$$A_- = \operatorname*{ess\,inf}_{R^n} a(\overline{x})^{\overline{p}(\overline{x})}, \quad A_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} a(\overline{x})^{\overline{p}(\overline{x})}.$$

Если $u(\overline{x}) \not\equiv 0$, то функция $J_{\overline{p}}(\mu u)$ непрерывна и строго монотонно возрастает при $\mu \in (0, \infty)$. При этом

$$\lim_{\mu \to 0} J_{\overline{p}}(\mu u) \to 0, \quad \lim_{\mu \to \infty} J_{\overline{p}}(\mu u) \to \infty.$$

Функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ корректно определен, и $\|u\|_{\overline{p}} \le \|v\|_{\overline{p}}$.

Доказательство. Применяем индукцию по размерности. Для $n = 2$ утверждение леммы доказано в леммах 3.1 и 3.2. Пусть утверждение леммы верно для некоторого $n = n_0$. Рассмотрим случай $n = n_0 + 1$.

Фиксируем $x_1 \in R$. В силу индуктивного предположения справедливы неравенства

$$J_{\overline{q}/p_1}(|u|^{p_1}(x_1, \overline{y})) \le J_{\overline{q}/p_1}(|v|^{p_1}(x_1, \overline{y})), \quad \||u|^{p_1}(x_1, \overline{y})\|_{\overline{q}/p_1} \le \||v|^{p_1}(x_1, \overline{y})\|_{\overline{q}/p_1}.$$

А отсюда уже следует неравенство (5.2). Все остальные рассуждения дословно повторяют доказательства из лемм 3.1 и 3.2. $\square$

Введем обозначение $\overline{z}_k = (x_1, \dots, x_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Лемма 5.2 (разложение нормы). *Для всякой нетривиальной функции* $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *однозначно определены константа* $N_{u0} > 0$ *и набор функций* $N_{uk}(\overline{z}_k) \geq 0$, $k = \overline{1, n-1}$ *со следующими свойствами. Функция* $N_{u1}(x_1)$ *нетривиальна и*

$$\int\limits_R N_{u1}\, dx_1 = 1. \tag{5.3}$$

Далее, для всякого $k = \overline{2, n-1}$ *обозначим*

$$J_k(\overline{z}_{k-1}) = \int\limits_R N_{uk}\, dx_k.$$

Тогда для любого $\overline{z}_{k-1} \in R^{k-1}$

$$\text{либо } J_k(\overline{z}_{k-1}) = 0, \quad \text{либо } J_k(\overline{z}_{k-1}) = 1. \tag{5.4}$$

Для всякого $\overline{z}_{n-1}$ *либо* $u(\overline{z}_{n-1}, x_n) \equiv 0$, *либо* $N_{uk}(\overline{z}_k) \neq 0$ *для всех* $k = \overline{1, n-1}$ *и*

$$\int\limits_R \frac{|u|^{p_n}}{N_{u0}^{p_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\, dx_n = 1. \tag{5.5}$$

При этом имеет место равенство $N_{u0} = \|u\|_{\overline{p}}$.

Доказательство. В равенстве (5.5) в знаменателе присутствуют величины, которые могут обращаться в 0. Поэтому приходится делать многочисленные оговорки. В частности, в (5.4) мы не можем требовать равенства, аналогичного (5.3). То же самое можно сказать и про условия, когда имеет место равенство (5.5). Поэтому далее исключительно ради простоты изложения считаем $|u(\overline{x})| > 0$ для всех $\overline{x} \in R^n$. При таком предположении все величины $N_{uk}(\overline{z}_k) \neq 0$ и все оговорки становятся не нужны.

При $n = 2$ требуемое (единственное) разложение вытекает из (3.10), (3.11). Рассмотрим случай $n = 3$. Положим $N_{u0} = \|u\|_{\overline{p}}$ и рассмотрим $v = u/\|u\|_{\overline{p}}$. Фиксируем $x_1 \in R$. Обозначим

$$w(x_2, x_3) = |v(x_1, x_2, x_3)|^{p_1(x_1, x_2, x_3)}.$$

Согласно (5.1) следует рассмотреть квазинорму $B_v(x_1) = \|w\|_{r_2, r_3}$ с показателями $r_2 = p_2/p_1$ и $r_3 = p_3/p_1$, причем по индуктивному предположению $\|w\|_{r_2, r_3} = N_{w0}$. Из разложения (3.10), (3.11) следует, что

$$\int\limits_R \frac{|w|^{r_3}}{N_{w0}^{r_3} N_{w1}^{r_3/r_2}(x_2)}\, dx_3 = 1, \quad \int\limits_R N_{w1}\, dx_2 = 1.$$

Для данного фиксированного x_1 полагаем

$$N_{u1}(x_1) = N_{w0}, \quad N_{u2}(x_1, x_2) = N_{w1}(x_2).$$

Тогда с учетом определения величин r_2 r_3 и равенства $v = u/N_{u0}$ получаем

$$\int\limits_R \frac{|u|^{p_3}}{N_{u0}^{p_3} N_{u1}^{p_3/p_1}(x_1) N_{u2}^{p_3/p_2}(x_1, x_2)}\, dx_3 = 1, \quad \int\limits_R N_{u2}(x_1, x_2)\, dx_2 = 1.$$

Кроме этого в силу равенства $\|v\|_{\overline{p}}=1$ имеем

$$\int\limits_R N_{u1}(x_1)\,dx_1=\int\limits_R B_v(x_1)\,dx_1=1.$$

Покажем единственность такого разложения. Пусть выполнены равенства (5.3)–(5.5). Для каждого фиксированного $x_1\in R$ рассмотрим функцию $w=u/N_{u0}$ и равенства (5.4), (5.5). Из единственности разложения нормы для размерности 2 следует, что

$$N_{u1}(x_1)=N_{w0}=\|w^{p_1}\|_{\frac{p_2}{p_1},\frac{p_3}{p_1}},\quad N_{u2}(x_1,x_2)=N_{w1}(x_2).$$

Из (5.3) следует $J_{\overline{p}}(u/N_{u0})=1$ и $\|u\|_{\overline{p}}=N_{u0}$. Но тогда и N_{u1}, N_{u2} определяются однозначно для любого $x_1\in R$ как элементы разложения нормы однозначно определенной функции w.

Далее действуем индуктивным образом. $\square$

Ниже нам понадобится одна полезная лемма с оценкой разложения нормы.

Лемма 5.3. *Пусть $u(\overline{x})\in L_{\overline{p}}(R^n)$, и пусть для некоторых $M_0>0$, $M_k(\overline{z}_k)\geq 0$, $k=\overline{1,n-1}$, выполнены неравенства*

$$u(\overline{x})=0,\quad \text{если } \prod_{k=1}^{n-1}M_k(\overline{z}_k)=0,\quad J_0(\overline{z}_{n-1})=\int\limits_R\frac{|u|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}M_k^{p_n/p_k}(\overline{z}_k)}\,dx_n\leq 1,$$

$$J_1=\int\limits_R M_1(x_1)\,dx_1\leq 1,\quad J_k(\overline{z}_{k-1})=\int\limits_R M_k(\overline{z}_k)\,dx_k\leq 1,\quad k=\overline{2,n-1}.$$

Тогда $\|u\|_{\overline{p}}\leq M_0$.

Доказательство. Положим

$$v(\overline{x})=\frac{u(\overline{x})}{J_0^{1/p_n}(\overline{z}_{n-1})J_1^{1/p_1}\prod\limits_{k=2}^{n-1}J_k^{1/p_k}(\overline{z}_{k-1})},\quad \text{если } u(\overline{x})\neq 0,$$

$$\widetilde{M}_1(x_1)=\frac{M_1(x_1)}{J_1},$$

$$\widetilde{M}_k(\overline{z}_k)=\frac{M_k(\overline{z}_k)}{J_k(\overline{z}_{k-1})},\quad \text{если } J_k(\overline{z}_{k-1})\neq 0,\quad k=\overline{2,n-1}.$$

Тогда при условии $\prod\limits_{k=1}^{n-1}M_k(\overline{z}_k)\neq 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_R\frac{|v|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\widetilde{M}_k^{p_n/p_k}}\,dx_n=1$$

и для функций $\widetilde{M}_k(\overline{z}_k)$ выполнены соотношения (5.3), (5.4). Из единственности разложения нормы следует, что $\|v\|_{\overline{p}}=M_0$. При этом, очевидно, $v(\overline{x})\geq u(\overline{x})$ для п.в. $\overline{x}\in R^n$. По лемме 5.1 $\|u\|_{\overline{p}}\leq M_0$. $\square$

Теорема 5.1. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Найдется константа* $C(\varepsilon)$ *такая, что для любых* $u(\overline{x}), v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *имеет место неравенство*

$$\|u+v\|_{\overline{p}} \le (1+\varepsilon)\|u\|_{\overline{p}} + C(\varepsilon)\|v\|_{\overline{p}}.$$

В частности, функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ *задает квазинорму.*

Доказательство. Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Пусть $Z, \delta, \gamma > 0$. Рассмотрим разложения нормы N_{uk}, N_{vk}, и положим

$$M_0 = (1+\varepsilon)N_{u0} + ZN_{v0}, \quad M_k = (1-\delta)N_{uk} + \delta N_{vk}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Несложно убедиться, что для некоторой константы $C(\gamma) > 0$

$$|u+v|^{p_n} \le (1+\gamma)^{p_n}|u|^{p_n} + C^{p_n}(\gamma)|v|^{p_n}.$$

Поэтому

$$\frac{|u+v|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{p_n/p_k}} \le \theta^{p_n}\frac{|u|^{p_n}}{N_{u0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}} + \frac{C(\gamma,\delta)|v|^{p_n}}{Z^{p_n}N_{v0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{p_n/p_k}},$$

где

$$\theta = \frac{1+\gamma}{(1+\varepsilon)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\delta)^{1/p_k}}.$$

Выбираем Z, γ, δ так, чтобы $\theta^{p_n} \le \theta_0 < 1$ и $C(\gamma,\delta)/Z^{p_n} \le 1 - \theta_0$. После этого применяем лемму 5.3. $\square$

Следствие 5.1 (регуляризация разложения нормы). *Пусть* $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$, $u(\overline{x}) \not\equiv 0$. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $u_\varepsilon(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *такая, что*

$$u_\varepsilon(\overline{x}) \ne 0,\ \overline{x} \in R^n, \quad |u_\varepsilon(\overline{x}) - u(\overline{x})| \le \varepsilon,\ \overline{x} \in R^n, \quad \|u_\varepsilon\|_{L_{\overline{p}}(R^n)} \le \|u\|_{L_{\overline{p}}(R^n)} + \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим функцию

$$v(\overline{x}) = \begin{cases} u(\overline{x}) + \operatorname{sign}(u(\overline{x}))\delta e^{-|\overline{x}|^2}, & u(\overline{x}) \ne 0, \\ \delta e^{-|\overline{x}|^2}, & u(\overline{x}) = 0. \end{cases}$$

После этого устремляем $\delta \to 0$ и применяем теорему 5.1. $\square$

С помощью данного следствия в дальнейшем можно отказаться от всех оговорок при использовании разложения нормы.

6. Мультипликативное неравенство

Для пространств с постоянным показателем хорошо известен следующий факт. Если $u \in L_p(\Omega)$ и $u \in L_q(\Omega)$, то $u \in L_r(\Omega)$, где

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

причем

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}.$$

Оказывается, что для описанных выше пространств применима интерполяция нескольких пространств $L_{\overline{p}_j}(R^n)$, $j = \overline{1, m}$, с поточечными множителями $\theta_j(\overline{x})$. Исключительно для простоты изложения ниже рассматриваем случай $m = 2$.

Теорема 6.1. *Пусть заданы два допустимых показателя $p(\overline{x})$, $q(\overline{x})$ и две измеримых функции $0 \le \theta_p(\overline{x}), \theta_q(\overline{x}) \le 1$, причем*

$$\theta_p(\overline{x}) + \theta_q(\overline{x}) = 1.$$

Определим допустимый показатель $\overline{r}(\overline{x})$ следующим образом:

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\theta_p}{p_k} + \frac{\theta_q}{q_k}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.6}$$

Пусть $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$, $v(\overline{x}) \in L_{\overline{q}}(R^n)$ и их квазинормы равны $\overline{U}$, $\overline{V}$ соответственно. Обозначим

$$w(\overline{x}) = |u|^{\theta_p}|v|^{\theta_q}.$$

Тогда

$$\|w\|_{\overline{r}} \le C \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} |\overline{U}|^{\theta_p}|\overline{V}|^{\theta_q}.$$

Доказательство. Для оценки $\|w\|_{\overline{r}}$ применим лемму 5.3. Рассмотрим разложения нормы N_{uk}, N_{vk} и для $k = \overline{1, n-1}$ положим

$$M_k(\overline{z}_k) = \frac{1}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{(x_{k+1},\ldots,x_n)\in R^{n-k}} N_{uk}^{\frac{\theta_p r_k}{p_k}} N_{vk}^{\frac{\theta_q r_k}{q_k}}.$$

В силу (5.6) можно применять неравенства Юнга

$$\int\limits_R M_k(\overline{z}_k)\, dx_k \le 1.$$

Для $k = 0$ полагаем

$$M_0 = 2^\gamma \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} N_{u0}^{\theta_p} N_{v0}^{\theta_q}, \quad \gamma \ge \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}\right)_+.$$

Тогда

$$\frac{w^{r_n}}{M_0^{r_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{r_n/r_k}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{u^{p_n}}{N_{u0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\right)^{\frac{\theta_p r_n}{p_n}} \left(\frac{v^{q_n}}{N_{v0}^{q_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{q_n/q_k}}\right)^{\frac{\theta_q r_n}{q_n}}.$$

Снова используем неравенство Юнга:

$$\int\limits_R \frac{w^{r_n}}{M_0^{r_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{r_n/r_k}}\, dx_n \le 1.$$

Осталось применить лемму 5.3. $\square$

7. Сравнение перестановочных квазинорм в многомерном случае

Как и в двумерном случае, возникает вопрос о сравнении квазинорм, получаемых после перестановки переменных. Оказывается, что и в многомерном случае можно сравнивать квазинормы после перестановки двух соседних переменных при выполнении соответствующего неравенства.

Теорема 7.1. *Пусть на R^n задан допустимый показатель $\overline{p}(\overline{x})$. Предположим, что для некоторого $k < n$ для п.в. $\overline{x} \in R^n$ справедливо неравенство $p_k(\overline{x}) \geq p_{k+1}(\overline{x})$. Рассмотрим перестановку переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_n)$ и показателей $\overline{q} = (p_1, \ldots, p_{k+1}, p_k, \ldots, p_n)$. Тогда для $u \in L_{\widetilde{x},\overline{q}}(R^n)$ имеет место неравенство*

$$\|u\|_{\overline{x},\overline{p}} \leq C\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}}.$$

Доказательство. Далее без потери общности считаем, что $\|u\|_{\overline{x},\overline{p}} = 1$. Применяем индукцию по k. Пусть $k = 1$. Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 4$. Все характерные черты доказательства будут видны и в этом случае. Рассмотрим разложение квазинормы $\|u\|_{\overline{x},\overline{p}}$: $N_1(x_1)$, $N_2(x_1, x_2)$, $N_3(x_1, x_2, x_3)$. Вместе с ним рассматриваем разложение квазинормы $\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}}$: M_0, $M_1(x_2)$, $M_2(x_2, x_1)$, $M_3(x_2, x_1, x_3)$. Обозначим

$$U = |u|^{p_4} \prod_{k=1}^{3} N_k^{1-p_4/p_k}.$$

Из (5.3)–(5.5) следует равенство

$$\int\limits_{R^4} U \, d\overline{x} = 1.$$

Пусть $0 < s < \min((p_1)_-, (p_2)_-, (p_3)_-, (p_4)_-)$. Имеет место равенство $U = U_N U_M D_3 D_{12}$, где

$$U_N = \frac{|u|^{p_4-s}}{\prod\limits_{k=1}^{3} N_k^{(p_4-s)/p_k}}, \quad U_M = \frac{|u|^s}{M_0^s M_1^{s/p_2} M_2^{s/p_1} M_3^{s/p_3}},$$

$$D_3 = M_3^{s/p_3} N_3^{1-s/p3}, \quad D_{12} = N_1 N_2 \left(\frac{M_0 M_1^{1/p_2} M_2^{1/p_1}}{N_1^{1/p1} N_2^{1/p2}} \right)^s.$$

Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Учитывая определение s, с помощью неравенства Юнга легко получаем

$$U_N U_M \leq \frac{|u|^{p_4}}{\prod\limits_{k=1}^{3} N_k^{p_4/p_k}} + \frac{|u|^{p_4}}{M_0^{p_4} M_1^{p_4/p_2} M_2^{p_4/p_1} M_3^{p_4/p_3}},$$

$$D_3 \leq M_3 + N_3,$$

$$D_{12} \leq N_1 N_2 \left(\varepsilon + C(\varepsilon) \left(\frac{M_0 M_1^{1/p_2} M_2^{1/p_1}}{N_1^{1/p1} N_2^{1/p2}} \right)^{p_2} \right).$$

По условию $p_2(\overline{x}) \leq p_1(\overline{x})$. В последнем неравенстве снова можно применить неравенство Юнга

$$D_{12} \leq \varepsilon N_1 N_2 + C(\varepsilon) M_0^{p_2} M_1 M_2^{p_2/p_1} N_1^{1-p_2/p1} \leq \varepsilon N_1 N_2 + C(\varepsilon) M_0^{p_2} M_1 (M_2 + N_1).$$

Заметим, что $M_1(x_2)$ не зависит от x_1 и

$$\int\limits_{R} (M_2(x_2, x_1) + N_1(x_1)) \, dx_1 = 2.$$

Поэтому

$$1 = \int\limits_{R^4} U\, d\overline{x} \le 4\varepsilon + 8C(\varepsilon)\max\bigl(M_0^{(p_2)_+}, M_0^{(p_2)_-}\bigr).$$

Выбираем $\varepsilon < 1/4$ и получаем $\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}} = M_0 \ge C$. Итак, в случае $k = 1$ требуемое утверждение доказано.

Пусть утверждение теоремы справедливо для $k = k_0$. Рассмотрим случай $k = k_0 + 1$. В этом случае перестановка не меняет первый показатель p_1. По определению

$$1 = \|u\|_{\overline{x},\overline{p}} = \int\limits_{R} \||u|^{p_1}\|_{(x_2,\dots,x_n),(p_2/p_1,\dots,p_n/p_1)}\, dx_1.$$

К квазинорме под интегралом можно применить индуктивное предположение и получить неравенство $J_{\widetilde{x},\overline{q}}(u) \ge C$. Для доказательства теоремы осталось только применить многомерный аналог леммы 3.3. $\square$

8. Случай $\overline{p} \in \mathscr{P}_1$

В этом разделе, особо не оговаривая, считаем, что $p_k \in \mathscr{P}_1$, $k = \overline{1,n}$. В этом случае определены сопряженные показатели $p'_k \in \mathscr{P}_1$. Далее будем обозначать $\overline{p}' = (p'_1, \dots, p'_n)$.

Лемма 8.1 (неравенство Гёльдера для квазинормы). *Если $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ и $v \in L_{\overline{p}'}(R^n)$, то*

$$\int\limits_{R^n} |uv|\, dx \le C_{\overline{p},\overline{p}'}\|u\|_{\overline{p}}\|v\|_{\overline{p}'},$$

где

$$C_{\overline{p},\overline{p}'} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(p_k)_-} + \frac{1}{(p'_k)_-}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим разложения норм N_{uk} и N_{vk}, $k = \overline{0, n-1}$. Очевидным образом

$$Z = \frac{|uv|}{N_{u0}N_{v0}} = \left(\frac{|u|}{N_{u0}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{1/p_k}}\frac{|v|}{N_{v0}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{1/p'_k}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(N_{uk}^{1/p_k}N_{vk}^{1/p'_k}\bigr).$$

К каждой паре в скобках применяем неравенство Юнга:

$$Z \le \left(\frac{|u|^{p_n}}{(p_n)_- N_{u0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}} + \frac{|v|^{p'_n}}{(p'_n)_- N_{v0}^{p'_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{p'_n/p'_k}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{N_{uk}}{(p_k)_-} + \frac{N_{vk}}{(p'_k)_-}\right).$$

Осталось применить равенства (5.3)–(5.5). $\square$

Лемма 8.2. *Пусть $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ и $\|u\|_{\overline{p}} = 1$. Обозначим*

$$v(t,x) = |u|^{p_n - 1}\prod_{k=1}^{n} N_{uk}^{1 - p_n/p_k}.$$

Тогда $\|v\|_{\overline{p}'} = 1$ *и* $N_{vk}(\overline{z}_k) = N_{uk}(\overline{z}_k)$ *для* $k = \overline{1, n-1}$. *Кроме этого*

$$\int\limits_{R^n} uv\,dx = 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{|v|^{p'_n}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p'_n/p'_k}} = |u|^{p_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{N_{uk}^{\frac{(p_k-p_n)}{p_k}\frac{p_n}{(p_n-1)}}}{N_{uk}^{\frac{p_n}{(p_n-1)}\frac{(p_k-1)}{p_k}}} = \frac{|u|^{p_n}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}.$$

В силу единственности разложения нормы получаем первое утверждение леммы. При этом в силу (5.3)–(5.5)

$$\int\limits_{R^n} uv\,dx = \int\limits_{R^n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} N_{uk}\right) \frac{|u|^{p_n}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\,dx = 1. \quad \square$$

Определим норму в пространстве $L_{\overline{p}}(R^n)$. Обозначим

$$U_1 = \{u(t,x) : \|u\|_{\overline{p}} \le 1\}.$$

Если это множество выпуклое, то функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ удовлетворяет неравенству треугольника, а значит, является нормой. В общем случае рассматриваем выпуклое уравновешенное множество $\widetilde{U}_1 = \operatorname{conv} U_1$, которое порождает некоторую полунорму. Оказывается, что на самом деле будет порождаться норма, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\overline{p}}$. Отметим, что с технической точки зрения проще использовать множество $\widetilde{U}_1$ в неявном виде.

Пусть $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Рассмотрим всевозможные разложения u в конечную сумму $u(\overline{x}) = \sum\limits_k u_k(\overline{x})$ и положим

$$\Phi_{\overline{p}}(u) = \inf_{\sum\limits_k u_k = u} \sum_k \|u_k\|_{\overline{p}}. \tag{5.7}$$

Легко видеть, что функционал $\Phi_{\overline{p}}$ однородный и для него справедливо неравенство треугольника, так что этот функционал задает некоторую полунорму. Отметим между прочим, что из определения (5.7) тривиально следует неравенство $\Phi_{\overline{p}}(u) \le \|u\|_{\overline{p}}$.

Лемма 8.3 (неравенство Гёльдера для нормы). *Если* $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *и* $v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}'}(R^n)$, *то*

$$J = \int\limits_{R^n} |uv|\,dx \le C_{\overline{p},\overline{p}'} \Phi_{\overline{p}}(u) \Phi_{\overline{p}'}(v)$$

с константой $C_{\overline{p},\overline{p}'}$ *из леммы* 8.1.

Доказательство. Пусть

$$u = \sum_k u_k, \quad v = \sum_j v_j.$$

Тогда по лемме 8.1

$$J \le C_{\overline{p},\overline{p}'} \sum_{k,j} \|u_k\|_{\overline{p}} \|v_j\|_{\overline{p}'} = C_{\overline{p},\overline{p}'} \Big(\sum_k \|u_k\|_{\overline{p}}\Big)\Big(\sum_j \|v_j\|_{\overline{p}'}\Big). \quad \square$$

Теорема 8.1. *Функционал $\Phi_{\overline{p}}$ задает норму на пространстве $L_{\overline{p}}(R^n)$, причем*

$$\frac{1}{C_{\overline{p},\overline{p}'}}\|u\|_{\overline{p}} \leq \Phi_{\overline{p}}(u) \leq \|u\|_{\overline{p}}$$

с константой $C_{\overline{p},\overline{p}'}$ из леммы 8.1.

Доказательство. Как отмечалось ранее, правая часть требуемого неравенства тривиально следует из определения $\Phi_{\overline{p}}$. Пусть $\|u\|_{\overline{p}} = 1$. По лемме 8.2 найдется функция $v(t,x) \in L_{\overline{p}'}(R^n)$ такая, что $\|v\|_{\overline{p}'} = 1$ и

$$\int\limits_{R^n} uv\,dx = 1.$$

Следовательно, $\Phi_{\overline{p}'}(v) \leq \|v\|_{\overline{p}'} = 1$, и по лемме 8.3

$$1 \leq C_{\overline{p},\overline{p}'}\Phi_{\overline{p}}(u)\Phi_{\overline{p}'}(v) \leq C_{\overline{p},\overline{p}'}\Phi_{\overline{p}}(u). \quad \square$$

Из доказанной теоремы следует, что квазинорма $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ эквивалентна некоторой норме, задаваемой функционалом $\Phi_{\overline{p}}(\cdot)$.

Замечание 8.1. Есть все основания считать, что пространство $L_{\overline{p}}(R^n)$ полное и рефлексивное, а $L_{\overline{p}'}(R^n)$ — его сопряженное. Но здесь эти факты не понадобятся, и эти вопросы не рассматриваются.

9. Теорема вложения

В качестве приложения установленных результатов докажем одну теорему вложения. Для простоты рассмотрим лишь двумерный случай.

Лемма 9.1. *Пусть $p(y) \in \mathscr{P}_1(R)$, $0 < \nu_- \leq \nu(y) \leq \nu_+ < 1$, $p_+\nu_+ < 1$. Обозначим*

$$\frac{1}{p_\nu(y)} = \frac{1}{p(y)} - \nu(y).$$

Пусть $u(x,y), \partial_x^{\nu(y)}(x,y) \in L_p(R^2)$. Тогда

$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)} + \|u\|_{(y,x),(p,p_\nu)} \leq C(\|u\|_p + \|\partial_x^{\nu(y)}u\|_p).$$

Доказательство. Как и ранее, без потери общности считаем, что

$$\|u\|_p + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u\right\|_p = 1.$$

Согласно известной теореме Харди — Литтлвуда (см., например, [1, теорема 9]) для $y \in R$

$$\|u(\cdot,y)\|_{x,p_\nu} \leq C\big(\|u(\cdot,y)\|_{x,p} + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u(\cdot,y)\right\|_{x,p}\big).$$

Но тогда (коль скоро $p(y)$ не зависит от x)

$$\|u^p(\cdot,y)\|_{x,p_\nu/p} \leq C\big(\|u(\cdot,y)\|_{x,p} + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u(\cdot,y)\right\|_{x,p}\big)^p,$$

$$J_{(y,x),(p,p_\nu)}(u) \leq C\big(J_{(y,x),(p,p)}(u) + J_{(y,x),(p,p)}(\partial_x^{\nu(y)}u)\big) \leq C.$$

По лемме 3.3

$$\|u\|_{(y,x),(p,p_\nu)}(u) \leq C.$$

Очевидным образом $p < p_\nu$. Тогда по теореме 4.1

$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)}(u) \leq C. \quad \square$$

Теорема 9.1. *Пусть* $0 < \nu_- \le \nu(y) \le \nu_+ < 1$, $0 < \mu_- \le \mu(x) \le \mu_+ < 1$, $p(y) \in \mathscr{P}_1(R)$, $q(x) \in \mathscr{P}_1(R)$, *причем* $\nu_+ p_+ < 1$ *и* $\mu_+ q_+ < 1$. *Предположим, что*

$$u, \partial_x^{\nu(y)} u \in L_p(R^2), \quad u, \partial_y^{\mu(x)} u \in L_q(R^2).$$

Пусть $0 \le \theta(x,y) \le 1$. *Тогда*

$$u(x,y) \in L_{(x,y),(s,r)}(R^2) \cap L_{(y,x),(r,s)}(R^2),$$

где

$$\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) = \theta\left(\frac{1}{p} - \nu, \frac{1}{q}\right) + (1-\theta)\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} - \mu\right).$$

В частности (*см.* [2, *теорема* 2]),

$$u(x,y) \in L_{r^*(x,y)}(R^2),$$

где

$$1 = \frac{1}{p\nu} + \frac{1}{q\mu} - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{r^*}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\frac{1}{p_\nu(y)} = \frac{1}{p(y)} - \nu(y), \quad \frac{1}{q_\mu(x)} = \frac{1}{q(x)} - \mu(x).$$

По лемме 9.1

$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)} \le C\big(\|u\|_p + \big\|\partial_x^{\nu(y)} u\big\|_p\big), \quad \|u\|_{(x,y),(q,q_\mu)} \le C\big(\|u\|_q + \big\|\partial_y^{\mu(x)} u\big\|_q\big).$$

После этого применяем теорему 6.1. В частном случае, когда $\theta = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, имеем $s = r = r^*$. $\square$

Замечание 9.1. Случай $p_+\nu_+ \ge 1$ или $q_+\mu_+ \ge 1$ тоже поддается исследованию, хотя и существенно сложнее. Вместо леммы 9.1 приходится использовать дополнительные мультипликативные неравенства, которые здесь не приведены. В конечном итоге в докритическом случае $r_+^* < \infty$ утверждение теоремы 9.1 остается в силе при условии log-Гёльдер непрерывности всех показателей. Как отмечено выше, такой результат частично решает проблему из [5] в случае $p = p(y)$ и $q = q(x)$. Самый общий случай $p(x,y)$ и $q(x,y)$ рассмотреть не удается даже при условиях теоремы 9.1. Более того, для таких показателей утверждение леммы 9.1, по-видимому, неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E^n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325–353.
2. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева $L_p^{(r_1,\dots,r_n)}$ с дробными производными // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 3. С. 508–511.
3. *Карапетян Г. А.* Дробные мультианизотропные пространства и теоремы вложения для них // Мат. тр. 2019. Т. 22, № 2. С. 76–89.
4. *Бандалиев Р. А.* Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 323–333.
5. *Eddine N. C., Ragusa M. A., Repovš D. D.* On the concentration-compactness principle for anisotropic variable exponent Sobolev spaces and its applications. // Fract. Calc. Appl. Anal. 2024. V. 27. P. 725–756.

6. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Rŭžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Berlin: Springer-Verl., 2011.

7. *Almeida A., Hästö P.* Besov spaces with variable smoothness and integrability // J. Funct. Anal. 2010. V. 258, N 5. P. 1628–1655.

8. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.

9. *Бандалиев Р. А.* Письмо в редакцию // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 319–320.

Поступила в редакцию 5 декабря 2024 г.
После доработки 5 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Артюшин Александр Николаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`alexsp3@yandex.ru`