Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 515.12

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ПОНТРЯГИНА — ШНИРЕЛЬМАНА

А. В. Иванов

Аннотация. Нижняя емкостная размерность метрического компакта X впервые была рассмотрена в работе Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана 1932 г., где было доказано, что величина нижней емкостной размерности всегда не меньше топологической размерности X и на любом метризуемом компакте существует метрика, для которой нижняя емкостная размерность равна топологической размерности. В настоящей статье доказано, что для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа b, больше либо равного топологической размерности X (включая бесконечность), на X существует совместимая с топологией метрика, для которой нижняя емкостная размерность X равна b.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.104

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, теорема Понтрягина — Шнирельмана.

Нижняя емкостная размерность $\underline{\dim}_B$ метрического компакта (X, ρ) впервые рассмотрена (по названием «метрический порядок») в работе Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана [1], где была доказана следующая фундаментальная теорема.

Теорема 1 [1]. *Топологическая размерность* $\dim X$ *метризуемого компакта* X *совпадает с точной нижней гранью нижних емкостных размерностей этого компакта по всем метрикам, совместимым с топологией* X.

При этом в работе [1] фактически было установлено, что на X всегда существует метрика ρ, для которой $\underline{\dim}_B(X, \rho) = \dim X$. Основным результатом настоящей статьи является теорема, утверждающая, что для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа b такого, что $\dim X \leq b \leq \infty$, на X существует совместимая с топологией метрика ρ, для которой $\underline{\dim}_B(X, \rho) = b$.

Напомним необходимые определения. Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Будем использовать следующие обозначения:

$$O(x, \varepsilon, \rho) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}, \quad B(x, \varepsilon, \rho) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\},$$

где $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Через $N(X, \varepsilon, \rho)$ обозначим наименьшее число точек в ε-сетях X. Нижняя емкостная размерность компакта (X, ρ) определяется по формуле

$$\underline{\dim}_B(X, \rho) = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(X, \varepsilon, \rho)}{-\log \varepsilon}.$$

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Теория емкостных размерностей изложена в [2, гл. 2].

Нам будет удобно модифицировать данное выше определение $\underline{\dim}_B(X,\rho)$. Подмножество $A \subset X$ назовем ε-разреженным (для $\varepsilon > 0$), если $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in X$. Через $K(X,\varepsilon,\rho)$ обозначим наибольшее число точек в ε-разреженных подмножествах X. Если A — максимальное (по включению) ε-разреженное подмножество X, то A — ε-сеть. Следовательно,

$$K(X,\varepsilon,\rho) \geq N(X,\varepsilon,\rho). \tag{1}$$

Покажем, что

$$K(X,\varepsilon,\rho) \leq N(X,\varepsilon/3,\rho). \tag{2}$$

Пусть B — $\varepsilon/3$-сеть в X, $|B| = N(X,\varepsilon/3,\rho)$, и A —ε-разреженное подмножество X, $|A| = K(X,\varepsilon,\rho)$. Для любой точки $x \in A$ пересечение $O(x,\varepsilon/2,\rho) \cap B$ непусто. При этом окрестности $O(x,\varepsilon/2,\rho)$ и $O(y,\varepsilon/2,\rho)$ не пересекаются для двух различных точек $x, y \in A$. Следовательно, $|A| \leq |B|$, что и требовалось. Из неравенств (1) и (2) следует

Предложение 1. *Для любого метрического компакта* (X,ρ)

$$\underline{\dim}_B(X,\rho) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log K(X,\varepsilon,\rho)}{-\log\varepsilon}.$$

Справедливо также следующее

Предложение 2. *Если последовательность* $\varepsilon_k > 0$ *монотонно* ($\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1}$) *сходится к* 0 *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log\varepsilon_{k+1}}{\log\varepsilon_k} = 1$, *то*

$$\underline{\dim}_B(X,\rho) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log K(X,\varepsilon_k,\rho)}{-\log\varepsilon_k}.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1 из [3].

В дальнейшем неоднократно будем рассматривать произведения метрических компактов $(X_1,\rho_1),\ldots,(X_n,\rho_n)$ (в частности отрезков числовой прямой) и при этом всегда будем предполагать, что на $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ задана max-метрика $\rho^{\max}$ по формуле

$$\rho^{\max}(x,y) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) : i = 1,\ldots,n\},$$

где x_i, y_i — i-е координаты точек $x, y \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Известно, что метрика $\rho^{\max}$ согласована с топологией произведения.

Аналогично можно ввести метрику $\rho^{\max}$ на счетном произведении $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ метрических компактов (X_i,ρ_i), $i \in \mathbb{N}$:

$$\rho^{\max}(x,y) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

при условии, что $\operatorname{diam}(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Легко проверить, что в этом случае метрика $\rho^{\max}$ согласована с топологией тихоновского произведения.

Теорема 2. *Для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа $b \in [\dim X, \infty]$ существует метрика ρ на X такая, что $\underline{\dim}_B(X, \rho) = b$.*

Доказательство. Пусть $\dim X = n$. В [1] построено вложение $f_0 : X \to Q_0$ компакта X в $(2n+1)$-мерный куб $Q_0 = [0,1]^{2n+1}$, при котором max-метрика на Q_0 определяет метрику ρ_0 на X, удовлетворяющую условию $\underline{\dim}_B(X, \rho_0) = n$.

Пусть $b > n$. Поскольку $\underline{\dim}_B(X, \rho_0) < b$, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$K(X, \varepsilon_1, \rho_0) < [(1/\varepsilon_1)^b]$$

(квадратные скобки обозначают здесь целую часть числа).

Положим
$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1}{2^{i-1}}.$$

Пусть $k_1 = [(1/\varepsilon_1)^b]$. Покажем, что на X можно ввести метрику ρ_1 так, что для любых $x, y \in X$

1) $\rho_0(x, y) \le \rho_1(x, y)$,

2) $\rho_1(x, y) - \rho_0(x, y) \le \varepsilon_1$,

3) существует число $p > 0$ такое, что $\rho_1(x, y) \le p\rho_0(x, y)$,

4) $K(X, \varepsilon_1, \rho_1) = k_1$.

Фиксируем ε_1-разреженное подмножество $A \subset X$, для которого

$$|A| = K(X, \varepsilon_1, \rho_0) = m_1 < k_1.$$

Пусть $z \notin A$ и $r = \min\{\rho_0(z, A), \varepsilon_1/2\}$. Определим функцию $f_1^1 : X \to [0, \varepsilon_1]$ по формуле

$$f_1^1(x) = 0 \quad \text{при } x \notin O(z, r, \rho_0),$$
$$f_1^1(x) = (r - \rho_0(x, z))\varepsilon_1/r \quad \text{при } x \in B(z, r, \rho_0).$$

Легко проверить, что функция f_1^1 непрерывна и $f_1^1(z) = \varepsilon_1$.

Положим $g_1^1 = f_0 \Delta f_1^1 : X \to Q_0 \times [0, \varepsilon_1]$, где $f_0 \Delta f_1^1$ — диагональное произведение отображений, действующее по формуле

$$f_0 \Delta f_1^1(x) = (f_0(x), f_1^1(x)).$$

Отображение g_1^1 инъективно, следовательно, g_1^1 определяет вложение X в $Q_0 \times [0, \varepsilon_1]$. На произведении $Q_0 \times [0, \varepsilon_1]$ задана max-метрика, ограничение которой на X обозначим через ρ_1^1. Очевидно, что

$$\rho_1^1(x, y) = \max\bigl\{\rho_0(x, y), \bigl|f_1^1(x) - f_1^1(y)\bigr|\bigr\}. \tag{3}$$

(Здесь и далее точки $x \in X$ отождествляются с их образами при вложениях f_0, g_1^1 и др. Заметим, что при таком отождествлении ограничение проекции $Q_0 \times [0, \varepsilon_1] \to Q_0$ на X совпадает с тождественным отображением X.)

В силу выбора отображения f_1^1 для любых двух точек $x, y \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$ будет $\rho_1^1(x, y) = \rho_0(x, y)$ и $\rho_1^1(z, a) \ge \varepsilon_1$ для любого $a \in A$. Следовательно, $A \cup \{z\}$ — ε_1-разреженное подмножество $\bigl(X, \rho_1^1\bigr)$. Таким образом,

$$K\bigl(X, \varepsilon_1, \rho_1^1\bigr) \ge m_1 + 1.$$

Докажем обратное неравенство. Предположим противное. Пусть C — ε_1-разреженное подмножество $\bigl(X, \rho_1^1\bigr)$ и $|C| = m_1 + 2$. Поскольку $\rho_1^1(x, y) = \rho_0(x, y)$ для точек $x, y \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$, хотя бы две точки $c_1, c_2 \in C$ лежат в $O(z, r, \rho_0)$. Имеем

$$\varepsilon_1 \le \rho_1^1(c_1, c_2) = \max\bigl\{\rho_0(c_1, c_2), \bigl|f_1^1(c_1) - f_1^1(c_2)\bigr|\bigr\},$$

где $\rho_0(c_1, c_2) < 2r \le \varepsilon_1$ и $\left|f_1^1(c_1) - f_1^1(c_2)\right| < \varepsilon_1$; противоречие.

Итак, $K\big(X, \varepsilon_1, \rho_1^1\big) = m_1 + 1$. Покажем, что метрика ρ_1^1 удовлетворяет условиям 1–3, если ее рассматривать в качестве ρ_1. Условия 1 и 2 сразу следуют из формулы (3). Покажем, что

$$\rho_1^1(x, y) \le (\varepsilon_1/r)\rho_0(x, y). \tag{4}$$

Если $x, y \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$, то $\rho_1^1(x, y) = \rho_0(x, y)$ и неравенство (4) очевидно. Если же $x \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$, $y \in O(z, r, \rho_0)$ и

$$\rho_1^1(x, y) = \max\big\{\rho_0(x, y), f_1^1(y)\big\} = f_1^1(y) = (r - \rho_0(y, z))(\varepsilon_1/r),$$

то в силу неравенства треугольника $\rho_0(z, y) + \rho_0(y, x) \ge r$, а значит, $r - \rho_0(y, z) \le \rho_0(x, y)$ и неравенство (4) выполнено.

Наконец, если $x, y \in O(z, r, \rho_0)$ и $\rho_1^1(x, y) = \left|f_1^1(x) - f_1^1(y)\right|$, то

$$\rho_1^1(x, y) = (\varepsilon_1/r)|\rho_0(x, z) - \rho_0(y, z)| \le (\varepsilon_1/r)\rho_0(x, y)$$

в силу неравенства треугольника. Проверка неравенства (4) выполнена.

На этом завершен первый шаг индуктивного построения метрики ρ_1. Если $m_1 + 1 = k_1$, то метрика $\rho_1 = \rho_1^1$ искомая. Если же $m_1 + 1 < k_1$, то делаем следующий шаг. А именно, по аналогии строим отображение $f_1^2 : X \to [0, \varepsilon_1]$ и определяем вложение

$$g_1^2 = g_1^1 \Delta f_1^2 : X \to Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^2.$$

На произведении $Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^2$ определена max-метрика, ограничение которой на X обозначим через ρ_1^2. Повторив рассуждения первого шага, получаем, что

$$K\big(X, \varepsilon_1, \rho_1^2\big) = m_1 + 2.$$

Кроме того, для ρ_1^2 выполняются условия 1, 2 и следующее условие:

3_2) $\rho_1^2(x, y) \le p_2\rho_1^1(x, y)$ для некоторой константы $p_2 > 0$.

После выполнения $k_1 - m_1$ таких шагов получим вложение

$$f_1 = g_1^{k_1 - m_1} : X \to Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^{k_1 - m_1},$$

которое определит искомую метрику $\rho_1 = \rho_1^{k_1 - m_1}$ на компакте X. (Условие 3 для метрики ρ_1 будет выполняться для $p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k_1 - m_1}$.)

В силу условия 1 для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$K(X, \varepsilon, \rho_1) \ge K(X, \varepsilon, \rho_0), \tag{5}$$

а в силу 3

$$K(X, \varepsilon, \rho_1) \le K(X, \varepsilon/p, \rho_0). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$\underline{\dim}_B(X, \rho_0) = \underline{\dim}_B(X, \rho_1) = n < b.$$

Положим $Q_1 = [0, \varepsilon_1]^{k_1 - m_1}$, $s_1 = 1$. На этом первый шаг главного индукционного процесса завершен.

Переходим к второму шагу. Пусть s_2 — наименьшее натуральное число, которое больше s_1 и удовлетворяет условию $K(X, \varepsilon_{s_2}, \rho_1) < [(1/\varepsilon_{s_2})^b]$. Поскольку в силу предложений 1 и 2

$$\underline{\dim}_B(X, \rho_1) = \varliminf_{i \to \infty} \frac{\log K(X, \varepsilon_i, \rho_1)}{-\log \varepsilon_i} < b,$$

такое число s_2 существует. Положим $k_2 = [(1/\varepsilon_{s_2})^b]$, $m_2 = K(X, \varepsilon_{s_2}, \rho_1)$.

Повторим построения первого шага с увеличением всех индексов на 1 и заменой ε_1 на ε_{s_2} (напомним, что $s_1 = 1$). В результате получим вложение

$$f_2 : X \to Q_0 \times Q_1 \times Q_2,$$

где $Q_2 = [0, \varepsilon_{s_2}]^{k_2 - m_2}$. На $Q_0 \times Q_1 \times Q_2$ определена max-метрика, ограничение которой на X задает метрику ρ_2 (как и выше, точки X отождествляем с точками $f_2(X)$).

Продолжая индукцию, на шаге k получим натуральное число $s_k > s_{k-1}$, вложение

$$f_k : X \to \prod_{i=0}^{k} Q_i$$

и метрику ρ_k на X такие, что

1_k) $\rho_k(x, y) \geq \rho_i(x, y)$, $i < k$, $x, y \in X$;

2_k) $\rho_k(x, y) - \rho_i(x, y) \leq \varepsilon_{s_{i+1}}$, $i < k$, $x, y \in X$;

3_k) $K(X, \varepsilon_i, \rho_{k-1}) > [(1/\varepsilon_i)^b]$ при $i \in (s_{k-1}, s_k)$;

4_k) $K(X, \varepsilon_{s_k}, \rho_k) = [(1/\varepsilon_{s_k})^b]$;

5_k) $\underline{\dim}_B(X, \rho_k) = n < b$;

6_k) $\pi_i^k \circ f_k = f_i$ где $\pi_i^k : \prod\limits_{j=0}^{k} Q_j \to \prod\limits_{j=0}^{i} Q_j$ — проекция, $i < k$;

7_k) диаметр Q_k (по max-метрике) равен ε_{s_k}.

В результате индукционного процесса возникает обратный спектр

$$S = \left\{ \prod_{j=0}^{k} Q_j, \pi_i^k : i < k; i, k \in \mathbb{N} \right\},$$

пределом которого является $\prod\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$. В силу условия 6_k семейство вложений $f_k : X \to \prod\limits_{i=0}^{k} Q_i$, $k \in \mathbb{N}$, задает отображение компакта X в S, предел которого является вложением

$$f = \lim f_k : X \to \lim S = \prod_{j=0}^{\infty} Q_j.$$

В силу условия 7_k на $\prod\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$ определена max-метрика, ограничение которой на $X = f(X)$ обозначим через ρ.

Покажем, что $\underline{\dim}_B(X, \rho) = b$. В силу условия 1_k $\rho(x, y) \geq \rho_i(x, y)$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $x, y \in X$. Отсюда в силу условий 3_k и 4_k следует, что $K(X, \varepsilon_i, \rho) \geq [(1/\varepsilon_i)^b]$ для любого i. Из этого неравенства получаем, что $\underline{\dim}_B(X, \rho) \geq b$.

Докажем обратное неравенство. Для этого достаточно показать, что

$$K(X, 2\varepsilon_{s_k}, \rho) \leq [(1/\varepsilon_{s_k})^b], \tag{7}$$

поскольку

$$\underline{\dim}_B(X, \rho) \leq \varliminf_{k \to \infty} \frac{\log K(X, 2\varepsilon_{s_k}, \rho)}{-\log \varepsilon_{s_k}}.$$

Пусть C — $2\varepsilon_{s_k}$-разреженное подмножество (X, ρ). В силу условия 2_k

$$\rho(x, y) - \rho_k(x, y) \leq \varepsilon_{s_{k+1}}.$$

Следовательно, C является ε_{s_k}-разреженным подмножеством (X, ρ_k). В силу условия 4_k имеем $|C| \leq [(1/\varepsilon_{s_k})^b]$. Неравенство (7) тем самым доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть случай $b = \infty$. Здесь можно использовать схему проведенных выше рассуждений (с некоторой модификацией), но есть и более простой вариант.

Пусть Y — одноточечная компактификация натурального ряда: $Y = \mathbb{N} \cup \{p\}$. Разобьем $\mathbb{N}$ на счетное семейство непересекающихся подмножеств A_i так, что $|A_i| = 2^{i^2}$. Определим на Y метрику ρ' следующим образом:

если $x \in A_i$, $y \in A_j$ и $i \geq j$, то $\rho'(x, y) = 1/2^j$;

если $x \in A_i$, $y = p$, то $\rho'(x, y) = 1/2^i$.

Каждое множество A_i является $(1/2^i)$-разреженным подмножеством (Y, ρ'). Следовательно,

$$K(X, 1/2^i, \rho') \geq 2^{i^2}.$$

Таким образом,

$$\underline{\dim}_B(Y, \rho') = \infty.$$

По условию теоремы X является бесконечным компактом. Следовательно, Y топологически вкладывается в X. Согласно теореме Хаусдорфа (см. [4]) метрика ρ', заданная на Y, может быть продолжена до некоторой метрики ρ на X. Поскольку нижняя емкостная размерность монотонна (см. [2]), получаем, что

$$\underline{\dim}_B(X, \rho) \geq \underline{\dim}_B(Y, \rho') = \infty. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pontryagin L., Shnirelman L.* On one metric property of dimension // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 156–162.

2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.

3. *Иванов А. В.* О размерности квантования вероятностных мер // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 8. С. 41–51.

4. *Torunczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fundam. Math. 1973. V. 77. P. 191–193.

Поступила в редакцию 18 ноября 2024 г.
После доработки 18 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru