Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.542

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ВТОРОЙ СПОРАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЯНКО

А. Х. Журтов,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Доказывается, что любой разрешимый главный фактор конечной группы, имеющей то же множество порядков элементов, что и группа автоморфизмов простой спорадической группы Янко, является 2-группой порядка 2, 2^4, 2^6 или 2^20.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.103

Ключевые слова: спектр, группа автоморфизмов, группа Янко.

1. Введение. Для конечной группы G *спектром* называется множество $\omega(G)$ порядков элементов группы G. Спектр группы G замкнут относительно делимости и поэтому однозначно определяется множеством $\mu(G)$, состоящим из максимальных относительно делимости элементов спектра $\omega(G)$.

Если для групп G и H их спектры совпадают, то G и H называются *изоспектральными.* Очевидно, что группы G и H изоспектральны тогда и только тогда, когда $\mu(G) = \mu(H)$. Число попарно не изоморфных групп, изоспектральных данной группе G, обозначается через $h(G)$. Если $h(G) = 1$, то G называется *распознаваемой по спектру*, а если $h(G)$ бесконечно, то G называется *нераспознаваемой по спектру.* В [1] доказано, что группа автоморфизмов каждой простой спорадической группы, не изоморфной M^cL, M_{12}, M_{22}, He, Suz, $O'N$ и J_2, распознается по спектру. В [2] то же самое доказано для остальных спорадических групп за исключением, быть может, J_2.

В [3] показано, что конечная неразрешимая группа G, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо изоморфна $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо содержит нетривиальную нормальную 2-подгруппу N, для которой G/N изоморфна знакопеременной группе степени 8. В [4] доказана неразрешимость G.

Основная цель настоящей работы — уточнить строение G.

Теорема. *Конечная группа G, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо изоморфна $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо обладает нормальной нетривиальной 2-подгруппой N, фактор-группа по которой изоморфна знакопеременной группе A_8. При этом любой главный фактор группы G, лежащий в N, является абсолютно неприводимым A_8-модулем размерности* 4, 6 *или* 20.

1. Доказательство теоремы. Пусть G — конечная группа, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, но не изоморфная $\mathrm{Aut}(J_2)$.

Работа второго и третьего автора выполнена за счет Российского научного фонда, проект № 23-41-10003.

Лемма 1. (1) $\mu(G) = \{2^3 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5\}$.
(2) $E = O_2(G) \neq 1$ *и* $G/E \simeq A_8$.

Доказательство. П. (1) вытекает из таблицы неприводимых характеров $J_2.2$ в [5], п. (2) — следствие [3] и [4].

Лемма 2. *Степень любого неприводимого представления группы* A_8 *над полем порядка* 2 *равна* 1, 4, 6, 14, 20 *или* 64.

Доказательство. В табл. 1, взятой из [6, с. 48], перечислены брауэровы характеры группы A_8 в характеристике 2.

Таблица 1. Характеры Брауэра группы A_8

	$1A$	$3A$	$3B$	$5A$	$7A$	$B**$	$15A$	$B**$
φ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ_2	4	-2	1	-1	$-b7$	$**$	$-b15$	$**$
φ_3	4	-2	1	-1	$**$	$-b7$	$**$	$-b15$
φ_4	6	3	0	1	-1	-1	-2	-2
φ_5	14	2	-1	-1	0	0	2	2
φ_6	20	-4	-1	0	-1	-1	$b15-1$	$**$
φ_7	20	-4	-1	0	-1	-1	$**$	$b15-1$
φ_8	64	4	-2	-1	1	1	-1	-1

В ней $b_7 = 1/2(-1 + i\sqrt{7})$, $b_{15} = 1/2(-1 + i\sqrt{15})$, символы $**$ рядом с $-b_7$ означают числа, комплексно сопряженные с $-b_7$, а символы $**$ рядом с $-b_{15}$ и $b_{15}-1$ означают числа, комплексно сопряженные с $-b_{15}$ и $b_{15}-1$ соответственно. Характер φ_3 алгебраически сопряжен с φ_2, а φ_7 алгебраически сопряжен с φ_6. Пятая степень элемента из класса $15A$ содержится в классе $3A$.

Согласно [7] все представления группы A_8, характеры которых перечислены в табл. 1, реализуются над полем порядка 2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любое неприводимое представление группы* A_8 *степени* 1, 14 *и* 64 *над полем порядка* 2 *содержит ненулевую неподвижную точку циклической подгруппы* A *порядка* 15 *из* A_8.

Доказательство. Поскольку $(2, 15) = 1$, ограничение характера Брауэра φ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, на A является обыкновенным характером A, поэтому число

$$T_i = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \varphi_i(a)$$

равно размерности пространства неподвижных точек группы A в соответствующем φ_i представлении V_i группы A_8. Простые вычисления с помощью табл. 1 показывают, что $T_i > 0$ для $i = 1, 5, 8$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Предположим противное. Пусть $1 = B_0 \leq B_1 \leq B_2 \leq \cdots \leq B_m = O_2(G)$ — неуплотняемый ряд подгрупп, инвариантных в G. Тогда $V = B_k/B_{k-1}$ — неприводимый A_8-модуль над полем порядка 2 для $k = 1, 2, \ldots, m$. Если для какого-то k модуль V эквивалентен V_i для $i = 1, 5, 8$, то по лемме 3 V содержит ненулевую неподвижную точку группы A и $C_{O_2(G)}(A) \neq 1$, где A — подгруппа из A_8 порядка 15. Но тогда в G есть элемент порядка 30, что противоречит лемме 1. Теорема доказана.

Отметим, что вопрос о распознаваемости группы $\mathrm{Aut}(J_2)$ по спектру остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R., Darafsheh A. R.* On the characterizability of the automorphism groups of sporadic simple groups by their element orders // Acta Math. Sinica. 2004. V. 20, N 4. P. 653–662.

2. *Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R.* Recognizing by spectrum for the automorphism groups of sporadic simple groups // Commun. Math. Stat. 2015. V. 3, N 4. P. 478–483.

3. *Журтов А. Х., Шерметова М. Х.* О группах, изоспектральных группе автоморфизмов второй спорадической группе Янко // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1011–1016.

4. *Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* Неразрешимость конечных групп, изоспектральных группе автоморфизмов второй спорадической группы Янко // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 1. С. 71–75.

5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

6. *Jansen Ch., Lux K., Parker R., Wilson R.* An atlas of Brauer characters. New York: Oxford Univ. Press Inc., 1995.

7. *Atlas of finite group representations.* Version 3. http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/atl/A8.

Поступила в редакцию 29 августа 2024 г.
После доработки 20 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Журтов Арчил Хазешович (ORCID 0009-0004-9516-5808)
Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик 360004
`zhurtov_a@mail.ru`

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`daria.lytkin@gmail.com`

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
`vic.mazurov@gmail.com`